科學圖書大庫

有限差分初步

譯者 趙文敏 校閱 郭汾派

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

有限差分初步

譯者　趙文敏　　校閱　郭汾派

徐氏基金會出版

我們的工作目標

文明的進度，因素很多，而科學居其首。科學知識與技術的傳播，是提高工業生產、改善生活環境的主動力。在整個社會長期發展上，乃對人類未來世代的投資。從事科學研究與科學教育者，自應各就專長，竭智盡力，發揮偉大功能，共使科學飛躍進展，同將人類的生活，帶進更幸福、更完善之境界。

近三十年來，科學急遽發展之收穫，已超越以往多年累積之成果。昔之認爲若幻想者，今多已成爲事實。人類一再親履月球，是各種科學綜合建樹與科學家精誠合作的貢獻，誠令人無限興奮！時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就科學人才，促進科學研究與發展，允爲社會、國家的基本使命。培養人才，起自中學階段，此時學生對基礎科學，如物理、數學、生物、化學，已有接觸。及至大專院校專科教育開始後，則有賴於師資與圖書的指導啓發，始能爲蔚爲大器。而從事科學研究與科學教育的學者，志在貢獻研究成果與啓導後學，旨趣崇高，彌足欽佩！

本基金會係由徐銘信氏捐資創辦；旨在協助國家發展科學知識與技術，促進民生樂利，民國四十五年四月成立於美國紐約。初由旅美學人胡適博士、程其保博士等，甄選國內大學理工科優秀畢業生出國深造，前後達四十人，惜學成返國服務者十不得一。另曾贈送國內數所大學儀器設備，輔助教學，尚有微效；然審情度理，仍嫌未能普及，遂再邀請國內外權威學者，設置科學圖書編譯委員會，主持「科學圖書大庫」編譯事宜。以主任委員徐銘信氏爲監修人，編譯委員林碧鏗氏爲編輯人，各編譯委員擔任分組審查及校閱工作。「科學圖書大庫」首期擬定二千種，凡四億言。門分類別，細大不捐；分爲叢書，合則大庫。爲欲達成此一目標，除編譯委員外，本會另聘從事

翻譯之學者五百餘位，於英、德、法、日文出版物中精選最近出版之基本與實用科技名著，譯成中文，供給各級學校在校學生及社會大衆閱讀，內容嚴求深入淺出，圖文並茂。幸賴各學科之專家學者，於公私兩忙中，慨然撥冗贊助，譯著圖書，感人至深。其旅居國外者，亦有感於爲國人譯著，助益青年求知，遠勝於短期返國講學，遂不計稿酬多寡，費時又多，迢迢乎千萬里，書稿郵航交遞，其報國熱忱，思源固本，至足欽仰！

今科學圖書大庫已出版一千餘種，都二億八千餘萬言；尚在排印中者，約數百種，本會自當依照原訂目標，賡續進行，以達成科學報國之宏願。

本會出版之書籍，除質量並重外，並致力於時效之爭取，舉凡國外科學名著，初版發行半年之內，本會即擬參酌國內需要，選擇一部份譯成中文本發行，惟欲實現此一目標，端賴各方面之大力贊助，始克有濟。
茲特掬誠呼籲：

自由中國大專院校之教授，研究機構之專家、學者，與從事工業建設之工程師；

旅居海外從事教育與研究之學人、留學生；

大專院校及研究機構退休之教授、專家、學者

主動地精選最新、最佳外文科學名著，或個別參與譯校，或就多年研究成果，分科撰著成書，公之於世。本基金會自當運用基金，並藉優良發行系統，善任傳播科學種子之媒介。尚祈各界專家學人，共襄盛舉是禱！

徐氏基金會　敬啓

中華民國六十四年九月

校閱小言

有限差分學初步，是演算重於理論之書籍。本書係作者應學生之要求而增開之科目所沿用之教材也。作此要求之學生並非研究理論數學者而是研究統計與保險數學等應用科學者，則本書於實用方面之價值已不言而喻。全書共分六章，一、二及六章係討論差分之定義，其反運算和分之求法與級數求和之應用，最後作者以較長之篇幅介紹差分方程式之解法。蓋差分學之用於統計、機率，或其他應用學科係以差分方程式之形式爲最多，作者不憚其煩地舉例說明，爲使學者讀之而有所獲也。此部分不僅爲一般大學生所應研究者，即一般高中學生已習級數及歸納法或遞廻定義法求數列者亦可作爲參考。二、五兩章作者特地介紹Bernoulli 多項式，Euler 多項式，Gamma函數，Betta 函數。第四章之插值法是一般之數值分析(numerical analysis)上之重要部分，係應用方面頗爲重要者，作者不僅以差分之公式介紹許多插值公式並將數值積分法各公式之來龍去脈，實用價值作詳細介紹。總而言之，欲學習應用學科者，有限差分不得不學，欲學有限差分，則本書係一本良好之入門書籍也。

郭汾派

五十九年九月

前　言

數年前，余應研究保險與統計理論等學生之所請，特爲彼等開課講授有限差分之演算，授課期間定爲一學期。近年來令余欣慰者是：該課程不僅是上列學生之所需，甚至頗受研究電機工程與物理等學生之歡迎。時至今日，有限差分之演算已是三、四年級學生之選修課程之一，而此本“初步”書籍正是介紹上開課程之內容也。

此書之成也，不以過份嚴密爲標榜，其中所強調者乃演算之方法也，而其特點則是練習題數量之多，俾供學生反覆演習而求對其中各原理之精熟也。因此，全書所介紹只引用微分學中一部分基本概念，此外無須其他預備知識。

余著作此書之真正原因乃是：坊間無合乎吾等需要之近代而簡單之教科書可資利用。蓋吾人所能尋得者皆屬較精深之書，非程度較高之學生無法接受。例如 Fort, Milne-Thompson，及 Jordan 等氏之書（參看第137頁），單其內容所引用之概念與預備知識已非美國大學三年級程度學生所能應付裕如者。其中尤以 Milne Thompson 及 Jordan 之書已可列入百科全書之流而完全不適吾人之需要。至於 Nörlund 氏之書，無可諱言地係一部傑出作品，但此書已屬精深之論著而未能做爲介紹性之教科書。而且，此書以德文寫成而至今尚無英譯本問世，實亦爲美國學術界之一大遺憾。

「有限差分」之演算的研究始於二百餘年前，早期之有貢獻者如Daniel，Jakob Bernoulli，Leonard Euler 及 Jacobo Stirling 等。此後，有關差分演算之作品甚多，Nörlund 氏曾於其書中目錄內詳加介紹。而余著書之本意在於將一學期之課程內必需了解之最低限度載於書中。倘若讀者除讀畢此書外，尚完成高等微積分，微分方程，以及複變數函數論等課程，則彼等可進一步研讀上列各書，必能有更大之收穫。

余早期講授有限差分之課程時，曾獲當時學生不少善意之批評而能多所改進，因此特於此書問世之際向諸生之助表示謝意。此外，北卡羅林納大學之 L. L. Garner 教授與華盛頓州亞美利加大學之講座 Ernest E. Blanche

博士，曾將此書之原稿油印後講授多年，Garner 教授甚至爲此書校對。因此，二氏對此書之錯處指正甚多，余就此一併申謝。雖如此，因余之疏忽倉促，錯誤之處在所難免，敬祈海內方家，多多指正批評，余不勝銘感！

C. H. Richardson 於

勒維斯堡，布克內爾大學

1953 年12月30日

目　録

第一章 引　　言

1. 定義與記號

所謂**有限差分學**，就其廣義言之，乃研究：當自變數之值改變時，**其函數值，或因變數之值所發生之改變之情形**。舉例言之，於函數x^2中，若x值增加Δx，則x^2值增至$(x+\Delta x)^2$，亦即函數值之**增量**為$(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+\overline{\Delta x}^2$。

依一般習慣，變數為x之函數通常記為$f(x)$，$F(x)$，$\phi(x)$，或U，V，等。但在有限差分之計算中，此類表示法或多或少地易引起混淆，因此將原本寫在括弧內之x移至右下角而成字尾，即將x之函數表為U_x。例如，若$U_x=x^2$，則得$U_{x+\Delta x}=(x+\Delta x)^2$，而$U_{x+\Delta x}-U_x=2x\Delta x+\overline{\Delta x}^2$。

當變數x之增量為Δx時，相對於x與$x+\Delta x$，函數U_x之二值之差，即$U_{x+\Delta x}-U_x$，稱為**U_x之第一差分**，記為

$$\underset{\Delta x}{\Delta} U_x = U_{x+\Delta x} - U_x$$

上式中之Δx，對於$U_{x+\Delta x}-U_x$甚為重要，故上式左端之記法特別列出。不過，在有限差分之計算，Δx通常取為固定之常數，並以h表之。依此，則U_x之第一差分變成

$$\underset{h}{\Delta} U_x = U_{x+h} - U_x \text{。} \tag{1}$$

既然自變數之增量Δx取為定數，也就是自變數之差為定數，因此，所取之自變數形成一等差數列。依此，可將有限差分學之研究內容視為：當自變數之值是某一等差數列之各項時，則所對應之各函數值之間有何關係。

從上述之例$U_x=x^2$可看出，將一函數U_x作$\underset{h}{\Delta}$之差分運算後所得者仍為x之一函數，簡言之，$\underset{h}{\Delta}U_x$仍為x之函數。因此，可將$\underset{h}{\Delta}U_x$再作差分運算

。所得者稱爲U_x之第二差分，即

$$\underset{h}{\Delta}(\underset{h}{\Delta}U_x)=(U_{x+2h}-U_{x+h})-(U_{x+h}-U_x)$$

第二差分以$\underset{h}{\Delta}^2U_x$表之，即得

$$\underset{h}{\Delta}^2U_x=U_{x+2h}-2U_{x+h}+U_x$$

仿此類推，可得第三，第四，……，第n次差分

$$\underset{h}{\Delta}^3U_x\ ,\ \underset{h}{\Delta}^4U_x\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ \underset{h}{\Delta}^nU_x$$

其相互間關係爲

$$\underset{h}{\Delta}^sU_x=\underset{h}{\Delta}(\underset{h}{\Delta}^{s-1}U_x)\text{。}$$

上述提過自變數之增量一般取爲定數h，而實際之使用方面，h之值一般取爲1。關於此作法，吾人說明兩點理由如下。

第一：在本書第二章以後，讀者就能發現，有限差分之重要應用之一是**級數之求和**。級數係由數列定義而得，而所謂數列也就是定義於自然數系之函數。例如，數列

$$1^2\ ,\ 2^2\ ,\ 3^2\ ,\ \ldots\ldots$$

其一般項或第x項爲x^2，亦即函數$U_x=x^2$，其中自變數x僅取正整數。既然差分應用於級數，級數又與定義於自然數之函數密切相關。因此，遂仿後者之自變數值，取增量$h=1$。

第二：設有一個以t爲自變數之函數，若t之增量雖爲固定常數，却不是1。則吾人可將t換成另一自變數x，使x之固定增量爲1。詳言之，設U_t爲t之一函數，而$\Delta t=h$（h爲常數）；令$t=hx$，代入得

$$\Delta t=\Delta(hx)=h(x+\Delta x)-hx=h\Delta x$$

但因$\Delta t=h$，故$h=h\Delta x$，亦即$\Delta x=1$。

依上述二理由，吾人乃將自變數之**差分區間**（即自變數之固定增量）定爲1。而h之值既然取爲1，則$\underset{1}{\Delta}$中之1遂依下述聲明而予以省略：本書中，運算符號Δ即表示$\underset{1}{\Delta}$之意。則前述定義可寫成

$$\Delta U_x=U_{x+1}-U_x \tag{2}$$

例如：

$$\Delta x^2 = (x+1)^2 - x^2 = 2x+1$$

$$\Delta \log x = \log(x+1) - \log x = \log\left(\frac{x+1}{x}\right) = \log\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$\Delta \sin x = \sin(x+1) - \sin x = 2\sin\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$\Delta 2^x = 2^{x+1} - 2^x = 2^x(2-1) = 2^x$$

依(2)式易證

$$\Delta(U_x \pm V_x) = \Delta U_x \pm \Delta V_x \tag{3}$$

習　題

1、求下列各函數之第一差分：

(a) $3x^4$。　(b) $\cos x$。

(c) $\tan x$。　(d) a^x。

(e) $x(x-1)(x-2)(x-3)$。　(f) $x(x+1)(x+2)(x+3)$。

(g) $\sin^{-1}x$。　(h) $\log\sin x$。

(i) $x!$。　(j) x^n。

(k) ${}_xC_r = \dfrac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-r+1)}{r!}$。

2、試證

(a) $\Delta^3 U_x = U_{x+3} - 3U_{x+2} + 3U_{x+1} - U_x$。

(b) $\Delta^4 U_x = U_{x+4} - 4U_{x+3} + 6U_{x+2} - 4U_{x+1} + U_x$。

3、若函數U_x滿足　$\Delta U_x = U_x$，則U_x應爲什麼函數？

4、試就下列二函數求$\Delta^n U_x$：

(a) $U_x = a^x$。　(b) $U_x = e^{a-bx}$。

5、U_x分別爲下列各函數，求ΔU_x：

(a) $x(x-1)3^x$。　(b) $[x(x+1)(x+2)]^{-1}$。

(c) $\operatorname{Cot} 2^x$。　(d) ax^2+bx+c。

(e) ax^3+bx^2+cx+d。

6、試證：$\Delta^n x^n = n!$。

7、設ΔU_x分別爲下列各函數，則U_x應爲什麼函數？

(a) x 。 (b) x^2 。 (c) a^x 。 (d) x^3 。 (e) e^{a+bx} 。

8、試證：$\Delta\frac{1}{2^{x-1}}\cot\frac{\theta}{2^{x-1}}=\frac{1}{2^x}\tan\frac{\theta}{2^x}$ 。

9、試證：$\Delta\left(2^{x-1}\sin\frac{\theta}{2^{x-1}}\right)^2=\left(2^x\sin^2\frac{\theta}{2^x}\right)^2$ 。

10、試證：$\Delta\left(\frac{1}{2^{x-1}}\csc\frac{\theta}{2^{x-1}}\right)^2=-\left(\frac{1}{2^x}\sec\frac{\theta}{2^x}\right)^2$ 。

11、試證：$\Delta\cot 2^x\theta=-\frac{1}{2}[\tan 2^x\theta+\cot 2^x\theta]=-\csc 2^{x+1}\theta$ 。

12、試證：$\Delta 2^{x-2}\sin\frac{\theta}{2^{x-1}}=2^x\sin\frac{\theta}{2^x}\left(\sin\frac{\theta}{2^{x+1}}\right)^2$

13、試證：$\Delta\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{1}{1+x+x^2}$ 。

14、試證：$\Delta 2^x\cot 2^x\theta=-2^x\tan 2^x\theta$ 。

15、試證：$\Delta\tan\frac{\theta}{2^{x-1}}=-\tan\frac{\theta}{2^x}\sec\frac{\theta}{2^{x-1}}$ 。

16、試證：$\Delta\frac{\sin(x-1)\theta\cos^x\theta}{\sin\theta}=\cos^x\theta\cos x\theta$ 。

17、試證：$\Delta\frac{\sin x\theta}{\sin\theta\cos^{x-1}\theta}=\cos x\theta\sec^x\theta$ 。

18、試證：$\Delta\frac{c^x(ax+b)}{x}=\frac{c^x[Ax^2+Bx+D]}{x(x+1)}$ 。其中 $A=a(c-1)$

$D=-b$， 而 $B=(a+b)(c-1)$ 。

19、試證：$\Delta\left[-\frac{1}{2^{x-1}}\log(2\sin 2^x\theta)\right]=\frac{1}{2^x}\log\tan 2^x\theta$ 。

20、試證：$\Delta\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2^{x-2}}=\sin\frac{\theta}{2^{x-1}}\sin\frac{3\theta}{2^{x-1}}$ 。

21、試依數學歸納法證明：$(\cos x+i\sin x)^n=\cos nx+i\sin nx$ (棣莫夫定理)。

22、試證：$\Delta\sinh(a+bx)=2\sinh\frac{b}{2}\cosh\left(a+\frac{b}{2}+bx\right)$ 。

23、試證：$\Delta\cosh(a+bx)=2\sinh\frac{b}{2}\sinh\left(a+\frac{b}{2}+bx\right)$。

2. 差分表

求函數之各次差分時，吾人先將此函數之各值列出，而後使用減法即可求出。爲使各個有關之値皆能淸楚了然，乃列成下表。此稱爲**差分表**。此表之功用不僅用於求各次差分而已。許多重要之關係式亦可自表上讀出。茲以函數 x^3 爲例：

表1. x^3 之差分

x	x^3	Δx^3	$\Delta^2 x^3$	$\Delta^3 x^3$	$\Delta^4 x^3$
0	0				
		1			
1	1		6		
		7		6	
2	8		12		0
		19		6	
3	27		18		0
		37		6	
4	64		24		
		61			
5	125				

上表中之第一行爲所需之諸 x 値，第二行爲對應之函數値，第三行（即有 Δx^3 之標示者）爲第一差分，其求法是前一行之各數減去其上一數而得。第四行（即有 $\Delta^2 x^3$ 者）爲第二差分，其求法是前一行（Δx^3 之行）之各數減去其上一數而得。特別需注意者是上表中之第三差分爲常數，而第四以及更高次之差分皆爲0。

將上法推廣，令 U_x 爲 x 之一函數，將 x 之値分別取爲

$$\cdots-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$$

則對應之函數値分別爲

$$\cdots U_{-3},\ U_{-2},\ U_{-1},\ U_0,\ U_1,\ U_2,\ U_3,\ \cdots\cdots$$

以上述諸値，吾人將 U_x 之第一至第五差分列成表2：

表 2.　對角線差分表

	U_x	ΔU_x	$\Delta^2 U_x$	$\Delta^3 U_x$	$\Delta^4 U_x$	$\Delta^5 U_x$
-3	U_{-3}					
		ΔU_{-3}				
-2	U_{-2}		$\Delta^2 U_{-3}$			
		ΔU_{-2}		$\Delta^3 U_{-3}$		
-1	U_{-1}		$\Delta^2 U_{-2}$		$\Delta^4 U_{-3}$	
		ΔU_{-1}		$\Delta^3 U_{-2}$		$\Delta^5 U_{-3}$
0	U_0		$\Delta^2 U_{-1}$		$\Delta^4 U_{-2}$	
		ΔU_0		$\Delta^3 U_{-1}$		$\Delta^5 U_{-2}$
1	U_1		$\Delta^2 U_0$		$\Delta^4 U_{-1}$	
		ΔU_1		$\Delta^3 U_0$		
2	U_2		$\Delta^2 U_1$			
		ΔU_2				
3	U_3					

形如表2之表稱爲**對角線差分表**。在有限差分之討論上，大都使用此表。不過，下表3則較爲緊密，在某些應用上經常使用，此稱爲**水平差分表**。

表 3.　水平差分表

x	U_x	ΔU_x	$\Delta^2 U_x$	$\Delta^3 U_x$	$\Delta^4 U_x$	$\Delta^5 U_x$	$\Delta^6 U_x$
-3	U_{-3}	ΔU_{-3}	$\Delta^2 U_{-3}$	$\Delta^3 U_{-3}$	$\Delta^4 U_{-3}$	$\Delta^5 U_{-3}$	$\Delta^6 U_{-3}$
-2	U_{-2}	ΔU_{-2}	$\Delta^2 U_{-2}$	$\Delta^3 U_{-2}$	$\Delta^4 U_{-2}$	$\Delta^5 U_{-2}$	
-1	U_{-1}	ΔU_{-1}	$\Delta^2 U_{-1}$	$\Delta^3 U_{-1}$	$\Delta^4 U_{-1}$		
0	U_0	ΔU_0	$\Delta^2 U_0$	$\Delta^3 U_0$			
1	U_1	ΔU_1	$\Delta^2 U_1$				
2	U_2	ΔU_2					
3	U_3						

於表2中，吾人可看出由左上之函數值開始往右下之一列數值中每個之足數皆相同。吾人將此列中之差分稱爲該函數值之領導差分。例如，ΔU_0，$\Delta^2 U_0$，及 $\Delta^3 U_0$，等卽爲 U_0 之**領導差分**。

在水平差分表中，函數值及其領導差分係位於同一列中，而非自左上至右下之對角線。

兩種差分表名稱之不同，僅因各函數值及其領導差分之關係位置而已。而二者之內容則是相同的，兩種表之製作方法皆依此規則，

$$\Delta U_x = U_{x+1} - U_x$$

其一般式則爲

$$\Delta^{k+1} U_x = \Delta^k U_{x+1} - \Delta^k U_x$$

此規則需謹記，以使製表時方便。

上述二表尚有一共同點是：表中各項皆以Δ之符號表出。有時爲應用之便利，亦可將各次差分皆以U_x之函數值表示。例如

$$\Delta U_0 = U_1 - U_0$$

$$\Delta U_1 = U_2 - U_1$$

$$\Delta U_2 = U_3 - U_2$$

························

$$\Delta U_n = U_{n+1} - U_n$$

同理，

$$\Delta^2 U_0 = \Delta U_1 - \Delta U_0 = U_2 - 2U_1 + U_0$$

$$\Delta^2 U_1 = \Delta U_2 - \Delta U_1 = U_3 - 2U_2 + U_1$$

$$\Delta^2 U_2 = \Delta U_3 - \Delta U_2 = U_4 - 2U_3 + U_2$$

等等。

仿上法，可求得第三差分如下

$$\Delta^3 U_0 = \Delta^2 U_1 - \Delta^2 U_0 = U_3 - 3U_2 + 3U_1 - U_0$$

$$\Delta^3 U_1 = \Delta^2 U_2 - \Delta^2 U_1 = U_4 - 3U_3 + 3U_2 - U_1$$

等等。

形如上述之關係式只要作差分表就能很容易地得出。吾人作表4如下，將上述關係式列出。

表4.　以U_x之值表出其差分

x	U_x	ΔU_x	$\Delta^2 U_x$	$\Delta^3 U_x$
0	U_0	U_1-U_0	$U_2-2U_1+U_0$	$U_3-3U_2+3U_1-U_0$
1	U_1	U_2-U_1	$U_3-2U_2+U_1$	$U_4-3U_3+3U_2-U_1$
2	U_2	U_3-U_2	$U_4-2U_3+U_2$	$U_5-3U_4+3U_3-U_2$
3	U_3	U_4-U_3	$U_5-2U_4+U_3$	
4	U_4	U_5-U_4		
5	U_5			

習　題

1、試作差分表以求下列諸值

(a) 數列8，12，19，29，42，…之第六項。

(b) 數列0，0，2，6，12，20，…之第七項與第八項。

(c) 下一數列之第一項。第二項起爲8，3，0，－1，0，…。

(d) 數列3，14，39，84，155，258，…之第十項。

定義各數列之函數均設爲多項函數。

2、試證：$U_3=U_2+\Delta U_1+\Delta^2 U_0+\Delta^3 U_0$。

3、設函數U_x滿足：$U_0=-3$，$U_1=6$，$U_2=8$，$U_3=12$，且其第三差分爲常數，求U_6。

4、求$\Delta\, ab^{cx}$與$\Delta^2\, ab^{cx}$。

5、分別就下列二情形求$\Delta^n U_x$。(1)$U_x=ax^n$。(2)$U_x=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$。

6、若$U_x=e^{ax}$，試證：U_0及其領導差分成一幾何數列。

3.差分公式

差分之計算，有一些簡便之公式，本節中吾人介紹一些與之有關的定理。

定理1. 若c爲常數，則$\Delta c=0$。

證明：$\Delta c=c-c=0$。

其實，只要C_x爲以1爲週期之函數，即$C_{x+1}=C_x$，則$\Delta C_x=0$。