应用数学和力学讲座丛书

空间弹性力学

复变函数论的应用

樊大钧等 编著

SL

四川科学技术出版社

《应用数学和力学》讲座丛书

空 间 弹 性 力 学

复 变 函 数 论 的 应 用

樊 大 钧 等 编著

四 川 科 学 技 术 出 版 社

一九八五年·成都

责任编辑　崔泽海
封面设计　李文金

《应用数学和力学》讲座丛书
空间弹性力学
复变函数论的应用　　樊大钧等　编著
四川科学技术出版社出版　（成都盐道街三号）
新华书店重庆发行所发行　重庆印制一厂印刷
开本 787×1092 毫米 1/16　印张 17.75　字数 423 千
1985 年 12 月第一版　1985 年 12 月第一次印刷
印数：1—4,130 册
书号：15298·81　定价：3.40 元

[内 容 简 介]

本书扼要而系统地介绍了国际上近二十年来用复变函数论方法研究弹性力学三维问题的成果及作者的工作。在国内是第一本这方面的专著。全书分为三篇共九章。

第一篇重点而系统地介绍曲线坐标系弹性力学三维问题的基本方程，现有的各种解法(复变函数论方法除外)及许多实用例题。

第二篇和第三篇是本书主要部分。在这里介绍了单通区，多通区内三维问题中复变量解析函数在旋转对称体轴对称问题和非对称问题中的应用，附有工程应用实例（如空间断裂问题的讨论)。复变量广义解析函数在轴对称和非对称问题中的应用（如地下环形隧道，水下储罐问题)。这些问题用古典方法是解决不了的。

本书适用于工程设计人员（特别是机械、土建、石油、地质工程)，从事固体力学的研究人员，高等院校力学和应用数学专业师生。

《应用数学和力学》讲座丛书序

《应用数学和力学》编委会为了适应四化建设的需要，推动应用数学和力学方面的学术交流，自去年五月起在全国各地举办不定期的《应用数学和力学》讲座，由本刊编委同志义务分任主讲，讲授有关专题，介绍最新成就，深得各方同志支持和欢迎。去年已举办讲座五期，今后将继续举办。由于场地、名额所限，希望能参加听讲而向隅的同志很多，纷纷提出要求。为此，在四川人民出版社马骏副总编的建议下，特将讲座材料内容，编成丛书，陆续分册出版，（1984年开始，用四川科技出版社名义出版）以供读者。

长期以来，应用数学和力学是相辅相成的。晚近的发展更加如此。例如：由于人类生产活动的飞速发展，生产材料的日益更新，我们要处理比弹性、塑性性、不可压缩流体、非粘性流体等更为复杂的介质，从而要研究有记忆性能的材料、有极化性质的材料和有非局部性质的材料等的力学性质。为了描述这些力学性质，人们就要求大量使用泛函分析和群论的方法。又例如：为了处理巨型的机械、特大的载荷和高速的运动，人们面对着大量的非线性问题。为了处理这些非线性问题，二十年来，力学界开发了奇异摄动理论的研究。又例如：计算机的发展，提供了力学原理直接用于工程上复杂结构物强度计算的可能性，从而开创了近代的有限元理论，以及和有限元理论密切相关的广义变分原理。其它如嘉当张量之用于极化材料的分析，突变理论之用于处理稳定性问题，沃许函数之用于映象理论等，也无不如此。此外，随机过程和模糊数学等学科的发展，也正深刻地反映在力学原理处理真实生产问题的过程之中，从而使生产问题的处理更真实地反映了现实。

《应用数学和力学》讲座和讲座丛书，将尽可能地反映这种日新月异的发展情况。

《应用数学和力学》编委会谨藉丛书发行之际，向主讲的编委同志和编辑部的工作同志们致谢，由于他们的无私劳动和辛勤努力，讲座才能办成，丛书才得出版。

恳请读者不吝指教，对本丛书的任何意见，都将是对《应用数学和力学》编委会工作的支持和爱护。

钱伟长

一九八一年元月二十九日于北京清华园照澜院

前　言

这本书是为《应用数学和力学》讲座而编写的。本书主要包括两大部分内容。第一部分概要地讲述了一般空间弹性力学的方程(在不同坐标系)、解法和一些重要问题的解。对于方程的推导与解的存在和唯一性没有讨论。第二部分是重点，它讨论复变函数论方法在空间弹性力学中的应用。为了使读者便于了解这部分内容，又较为简明地讨论了复变函数论方法在平面问题中的应用。因为这里要由平面问题过渡到立体问题。最后又介绍了广义解析函数在解问题中的应用。没有讨论各向异性体中的问题，这拟在讲座中作专题介绍。由于讲座的性质和时间所限，这本书不是按普通教材的编写方式编写的。它主要是重点较为突出地写空间弹性力学中如何应用复变函数论方法，一些不重要的推导和一些演算略去了。若是用于教学，教师还要添必要的推算。这种方法的特点在与本书第一部分内容比较后，便可了然。这种复变函数论方法的应用还正在发展，看来在理论和实用方面，还要深入研究。

本书的编写与编辑出版，得到钱伟长教授的关怀，《应用数学和力学》编辑部和四川科学技术出版社的大力支持，作者对此表示由衷感谢。

在本书的编写过程中，得到王维叔和严伯陶两位老师的热心帮助，特此表示感谢。

由于笔者的水平有限，本书会有错误，希望读者提出宝贵意见，非常感谢。

樊大钧

一九八三年十一月十日

目　　录

第一篇　基础知识和弹性力学基本方程

第二篇　复变量解析函数在空间问题中的应用

第三篇　复变量广义解析函数在弹性力学对称问题中的应用

第一篇　基础知识和弹性力学基本方程

第一章　弹性力学的基本方程及解法

本章简要介绍三维基本方程及其解法，不作证明。

§1-1　平衡方程

1.　**正交曲线坐标系中的平衡方程**

$$\frac{\partial(H_h\Delta)}{\partial\alpha_h}-\frac{1}{2}\sum_{\nu}\frac{V_\nu\Delta}{g_\nu}\cdot\frac{\partial g_\nu}{\partial\alpha_h}+\sum_{\nu}\frac{\partial}{\partial\alpha_\nu}\left(\frac{V_h\Delta g_h}{\sqrt{g_\nu g_h}}\right)+H\Delta\sqrt{g_h}=\gamma\Delta\sqrt{g_h}\frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2},$$

式中　α_h，α_ν——正交曲线坐标(α_1，α_2，α_3)，

H_h，V_ν——正应力，

$H_\nu=V_h$——剪应力，

g_h，g_ν——系数。

$\sqrt{g_h}d\alpha_h=ds_h$——坐标线单元长度，并且

$$ds^2=\sum_{h=1}^{3}g_h d^2\alpha_h.$$

$$g_h=\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha_h}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\alpha_h}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\alpha_h}\right)^2,\quad \frac{\partial x}{\partial\alpha_h}=\sqrt{g_h}\frac{\partial\alpha_h}{\partial x}.$$

表面α_1上法线的方向余弦表为：

$$\cos(\alpha_1,x)=\sqrt{g_1}\frac{\partial\alpha_1}{\partial x},\quad \cos(\alpha_1,y)=\sqrt{g_1}\frac{\partial\alpha_1}{\partial y},\quad \cos(\alpha_1,z)=\sqrt{g_1}\frac{\partial\alpha_1}{\partial z}.$$

$\Delta=\sqrt{g_1g_2g_3}$——单位体积系数，

$dV=\Delta d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3$——体积单元，

H——沿坐标α_h方向的单位体积的体力，

u_h，u_ν——沿曲线坐标方向的位移。

2. 直角坐标系中的平衡方程

在直角坐标系中，可知$\alpha_1=x$，$\alpha_2=y$，$\alpha_3=z$，$g_1=g_2=g_3=1$，$dV=dxdydz$，于是平衡方程写为：

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+X=0 \quad \left(=\gamma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right),$$

$$\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+Y=0 \quad \left(=\gamma\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right),$$

$$\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z=0 \quad \left(=\gamma\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right).$$

3. 圆柱坐标系中的平衡方程

在圆柱坐标系中，可知$\alpha_1=r$表示圆柱面，$\alpha_2=\theta$表示过Oz轴的平面，$\alpha_3=z$表示平行于xOy面的平面。见图1.1。

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z;$$

$$g_1=1,\quad g_2=r^2,\quad g_3=1;\quad \Delta=r;\quad dV=rdrd\theta dz.$$

于是得到如下平衡方程：

$$\frac{\partial R_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial R_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial R_z}{\partial z}+\frac{R_r-R_\theta}{r}+R=0 \quad \left(=\gamma\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}\right),$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial B_z}{\partial z}+2\frac{B_r}{r}+B=0 \quad \left(=\gamma\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial t^2}\right),$$

$$\frac{\partial Z_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial Z_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}+\frac{Z_r}{r}+Z=0 \quad \left(=\gamma\frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2}\right).$$

4. 球坐标系中的平衡方程

在球坐标系中，令$\alpha_1=r$表示球面，$\alpha_2=\theta$表示过Oz轴的平面，$\alpha_3=\beta$表示顶点为O点的圆锥，如图1.2所示。

由图1.2可以得出直角坐标和球坐标之间的关系为

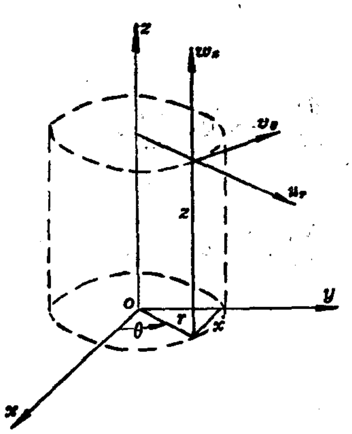

图 1.1

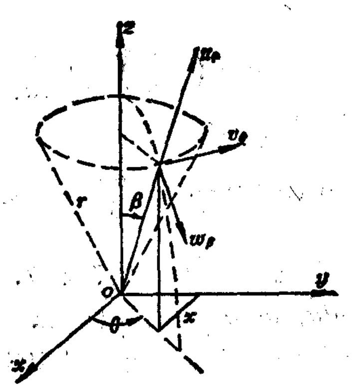

图 1.2

$$x=r\sin\beta\cos\theta,\ y=r\sin\beta\sin\theta,\ z=r\cos\beta.$$

于是

$$g_1=1,\ g_2=r^2\sin^2\beta,\ g_3=r^2;\ \Delta=r^2\sin\beta,$$
$$dV=r^2\sin\beta d\beta dr d\theta,\ ds^2=dr^2+r^2\sin^2\beta d\beta^2+r^2d\alpha^2.$$

这样得出平衡方程为

$$\frac{\partial R_r}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\beta}\frac{\partial R_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial R_\beta}{\partial\beta}+\frac{2R_r-B_\theta+R_\beta\mathrm{ctg}\beta-A_\beta}{r}+R=0\ \left(=\gamma\frac{\partial^2u_r}{\partial t^2}\right),$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\beta}\frac{\partial B_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial B_\beta}{\partial\beta}+\frac{B_\beta(3+2\mathrm{ctg}\beta)}{r}+B=0\ \left(=\gamma\frac{\partial^2v_\theta}{\partial t^2}\right),$$

$$\frac{\partial A_r}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\beta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\beta}{\partial\beta}+\frac{(R_r-R_\theta)\mathrm{ctg}\beta-3A_r}{r}+A=0\ \left(=\gamma\frac{\partial^2w_\beta}{\partial t^2}\right).$$

在以上各式中

R_r，B_θ，Z_z——圆柱坐标系中的正应力，

B_r，Z_r，Z_θ——圆柱坐标系中的剪应力，

而且$B_r=R_\theta$，$Z_r=R_z$，$Z_\theta=B_z$；

R_r，B_θ，A_β——球坐标系中的正应力，

B_r，A_r，A_θ——球坐标系中的剪应力，而且$B_r=B_\theta$，$A_r=R_\beta$，$A_\theta=B_\beta$。

5. 在边界面上的边界条件

物体表面上，法线为ν的点的局部边界条件为

$$\sigma_{\nu x}=\sigma_x l+\tau_{xy}m+\tau_{xz}n,$$
$$\sigma_{\nu y}=\tau_{yx}l+\sigma_y m+\tau_{yz}n,$$
$$\sigma_{\nu z}=\tau_{zx}l+\tau_{zy}m+\sigma_z n.$$

若用积分边界条件，则表示小面积上，外力与小面积上应力的平衡。

在法线为ν的小面积上的正应力σ_ν和剪应力τ_ν分别为：

$$\sigma_\nu=\sigma_x l^2+\sigma_y m^2+\sigma_z n^2+2\tau_{xy}ml+2\tau_{yz}mn+2\tau_{xz}nl,$$
$$\tau_\nu=\sqrt{\sigma_{\nu x}^2+\sigma_{\nu y}^2+\sigma_{\nu z}^2-\sigma_\nu^2},$$

在此小面积上的总应力σ_Σ为

$$\sigma_\Sigma=\sqrt{\sigma_\nu^2+\tau_\nu^2}.$$

6. 某一点的应力状态

在物体中某点的主应力（σ_1，σ_2，σ_3）是以下方程的根

$$\sigma^3-J_1\sigma^2+J_2\sigma-J_3=0,$$

这里J_i是应力状态的不变量

$$J_1=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z,$$
$$J_2=\sigma_x\sigma_y+\sigma_x\sigma_z+\sigma_y\sigma_z-\tau_{xy}^2-\tau_{yz}^2-\tau_{zx}^2,$$

$$J_3=\begin{vmatrix}\sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx}\\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z\end{vmatrix}.$$

在其它坐标系，可仿此写出应力不变量。

若以主应力表示应力不变量，则

$$J_1=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3,\quad J_2=\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1,\quad J_3=\sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

主剪应力为

$$\tau_{12}=\pm(\sigma_1-\sigma_2)/2,\quad \tau_{23}=\pm(\sigma_2-\sigma_3)/2,\quad \tau_{31}=\pm(\sigma_3-\sigma_1)/2,$$

若$\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$，则最大与最小剪应力为

$$\tau_{\substack{\max\\ \min}}=\pm(\sigma_1-\sigma_3)/2.$$

§1-2 形 变 方 程

1. 正交曲线坐标系中的形变方程

$$e_{hh}=\frac{1}{\sqrt{g_h}}\frac{\partial u_h}{\partial \alpha_h}+\sum_{\nu}\frac{1}{\sqrt{g_h g_\nu}}\frac{\partial\sqrt{g_h}}{\partial \alpha_\nu}u_\nu,$$

$$e_{h\nu}=\sqrt{\frac{g_h}{g_\nu}}\frac{\partial}{\partial \alpha_\nu}\left(\frac{u_h}{\sqrt{g_h}}\right)+\sqrt{\frac{g_\nu}{g_h}}\frac{\partial}{\partial \alpha_h}\left(\frac{u_\nu}{\sqrt{g_\nu}}\right),$$

式中e_{hh}是线形变，$e_{h\nu}$是角形变。

而体积膨胀为

$$\theta_0=\sum_{1}^{3}e_{hh}=\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\sqrt{g_2g_3}\,u_1+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\sqrt{g_1g_3}\,u_2+\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\sqrt{g_2g_1}\,u_3\right]\Big/\Delta,$$

转动分量为

$$\omega_1=\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\sqrt{g_3}\,u_3-\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\sqrt{g_2}\,u_2\right]\frac{1}{2\sqrt{g_2g_3}},$$

$$\omega_2=\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\sqrt{g_1}\,u_1-\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\sqrt{g_3}\,u_3\right]\frac{1}{2\sqrt{g_3g_1}},$$

$$\omega_3=\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\sqrt{g_2}\,u_2-\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\sqrt{g_1}\,u_1\right]\frac{1}{2\sqrt{g_1g_2}}.$$

式中转动分量要满足如下方程

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\sqrt{g_2g_3}\,\omega_1+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\sqrt{g_3g_1}\,\omega_2+\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\sqrt{g_1g_2}\,\omega_3=0.$$

曲线坐标系的形变连续方程很冗长复杂，可参A. И. 鲁利叶著《弹性理论空间问题》.

2. 直角坐标系中的形变方程

取此坐标系中沿x, y, z方向的位移为u, v, w，则得到

形变方程

$$e_x=\partial u/\partial x,\qquad \gamma_{xy}=\partial u/\partial y+\partial v/\partial x,$$

$$e_y=\partial v/\partial y,\qquad \gamma_{yz}=\partial v/\partial z+\partial w/\partial y,$$

$$e_z=\partial w/\partial z,\qquad \gamma_{zx}=\partial w/\partial x+\partial u/\partial z.$$

体积膨胀

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}.$$

转动分量

$$\omega_x=\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\Big/2,\quad \omega_y=\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\Big/2,\quad \omega_z=\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Big/2.$$

形变连续方程

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 e_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 e_z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 e_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 e_x}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}\right]=2\frac{\partial^2 e_x}{\partial y\partial z},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}\right]=2\frac{\partial^2 e_y}{\partial z\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right]=2\frac{\partial^2 e_z}{\partial x\partial y}.$$

3. 圆柱坐标系中的形变方程

用u_r，v_θ，w_z 表示此坐标系的位移。

形变方程

$$e_r=\frac{\partial u_r}{\partial r},\quad e_\theta=\frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta}+\frac{u_r}{r},\quad e_z=\frac{\partial w_z}{\partial z},$$

$$\gamma_{r\theta}=\partial u_r/r\partial\theta+\partial v_\theta/\partial r-v_\theta/r,$$

$$\gamma_{\theta z}=\partial v_\theta/\partial z+\partial w_z/r\partial\theta,$$

$$\gamma_{zr}=\partial w_z/\partial r+\partial u_r/\partial z.$$

体积膨胀

$$\theta=\frac{u_r}{r}+\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta}+\frac{\partial w_z}{\partial z}.$$

转动分量

$$\omega_r=\frac{1}{2r}\left(\frac{\partial w_z}{\partial\theta}-r\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right),$$

$$\omega_\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{\partial w_z}{\partial r}\right),$$

$$\omega_z=\frac{1}{2r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta)-\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right].$$

形变连续方程

$$\frac{\partial^2 e_r}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 e_z}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{rz}}{\partial r\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 e_\theta}{\partial z^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 e_z}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial e_z}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{\theta z}}{\partial \theta}+\gamma_{rz}\right),$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 e_r}{\partial \theta^2}+\frac{\partial}{r\partial r}\left(r^2\frac{\partial e_\theta}{\partial r}\right)-\frac{\partial e_r}{\partial r}=\frac{\partial^2(r\gamma_{\theta r})}{r\partial r\partial \theta},$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{r\theta}}{\partial z^2}-r\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}\left(\frac{\gamma_{\theta z}}{r}\right)-\frac{\partial^2 \gamma_{rz}}{r\partial\theta\partial z}=-2\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial r}\left(\frac{e_z}{r}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial(r\gamma_{\theta z})}{r\,\partial r}\right]-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2(r^2\gamma_{\theta r})}{\partial r\partial z}-\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\left(\frac{\gamma_{rz}}{r}\right)=-\frac{2}{r}\frac{\partial^2 e_r}{\partial\theta\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{rz}}{\partial \theta^2}-\frac{\partial^2(r\gamma_{\theta z})}{\partial r\partial\theta}-\frac{\partial^2(r\gamma_{\theta r})}{\partial z\partial\theta}=r\frac{\partial}{\partial z}\left[e_r-\frac{\partial(re_\theta)}{\partial r}\right].$$

4. 球坐标系中的形变方程

用u_r，v_θ，w_β表示此坐标系的位移。

形变方程

$$e_r=\partial u_r/\partial r,\quad e_\beta=\partial w_\beta/r\partial\beta+u_r/r,$$

$$e_\theta=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\beta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+u_r+w_\beta\operatorname{ctg}\beta\right),$$

$$\gamma_{r\theta}=\frac{1}{r\sin\beta}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right),$$

$$\gamma_{r\beta}=r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{w_\beta}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\beta},$$

$$\gamma_{\theta\beta}=\frac{1}{r\sin\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\beta}(v_\theta\sin\beta)+\frac{\partial u_\beta}{\partial\theta}\right].$$

体积膨胀

$$\theta_e=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2u_r)+\frac{1}{r\sin\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\beta}(w_\beta\sin\beta)+\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\right].$$

转动分量

$$\omega_r=\frac{1}{2r\sin\beta}\left[\frac{\partial w_\beta}{\partial\theta}-\frac{\partial}{\partial\beta}(v_\theta\sin\beta)\right],$$

$$\omega_\theta=\frac{1}{2r}\left[\frac{\partial u_r}{\partial\beta}-\frac{\partial}{\partial r}(rw_\beta)\right],$$

$$\omega_\beta=\frac{1}{2r\sin\beta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta\sin\beta)-\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right].$$

球坐标系中的形变连续方程在A. И. 鲁利叶著《弹性理论空间问题》中有详细说明.

5. 某一点的形变状态

物体中某点的主形变e_1，e_2，e_3是下列方程的三个根

$$\begin{vmatrix} 2(e_x-e) & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & 2(e_y-e) & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & 2(e_z-e) \end{vmatrix}=0.$$

主形变的方向余弦由以下方程求到

$$\left.\begin{aligned} &2(e_x-e_i)l_i+\gamma_{xy}m_i+\gamma_{xz}n_i=0, \\ &\gamma_{yx}l_i+2(e_y-e_i)m_i+\gamma_{yz}n_i=0, \\ &\gamma_{zx}l_i+\gamma_{zy}m_i+2(e_z-e_i)n_i=0. \end{aligned}\right\} \quad (i=1,\ 2,\ 3)$$

沿方向余弦为l，m，n的方向上的形变为

$$e=e_xl^2+e_ym^2+e_zn^2+\gamma_{xy}lm+\gamma_{yz}mn+\gamma_{zx}nl.$$

§1-3　弹性力学基本方程

1.　正交曲线坐标系

正反形式的虎克定律

$$e_h=\frac{1}{2G}\left(H_h-\frac{\mu}{1+\mu}\sum_1^3 H_h\right),$$

$$e_{h\nu}=\gamma_{h\nu}=H_\nu/G,$$

式中的H_h，H_ν又可改为

$$H_h=\lambda\theta_0+2Ge_h,\quad H_\nu=G\gamma_{h\nu}.$$

用位移表示的平衡方程

$$(\lambda+2G)\sqrt{\frac{g_2g_3}{g_1}}\frac{\partial\theta_0}{\partial\alpha_1}-2G\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(\sqrt{g_3}\omega_3)-\frac{\partial}{\partial\alpha_3}(\sqrt{g_2}\omega_2)\right]+\sqrt{g_2g_3}H_1=0,$$

$$(\lambda+2G)\sqrt{\frac{g_3g_1}{g_2}}\frac{\partial\theta_0}{\partial\alpha_2}-2G\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_3}(\sqrt{g_1}\omega_1)-\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(\sqrt{g_3}\omega_3)\right]+\sqrt{g_3g_1}H_2=0,$$

$$(\lambda+2G)\sqrt{\frac{g_1g_2}{g_3}}\frac{\partial\theta_0}{\partial\alpha_3}-2G\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(\sqrt{g_2}\omega_2)-\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(\sqrt{g_1}\omega_1)\right]+\sqrt{g_1g_2}H_3=0.$$

2.　直角坐标系

正反形式的虎克定律

$$e_x=\frac{1}{2G}\left[\sigma_x-\frac{\mu}{1+\mu}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)\right],\qquad \gamma_{xy}=\tau_{xy}/G,$$

$$e_y=\frac{1}{2G}\left[\sigma_y-\frac{\mu}{1+\mu}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)\right],\qquad \gamma_{yz}=\tau_{yz}/G,$$

$$e_z=\frac{1}{2G}\left[\sigma_z-\frac{\mu}{1+\mu}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)\right],\qquad \gamma_{zx}=\tau_{zx}/G,$$

$$\sigma_x=\lambda\tilde{\theta}+2G\frac{\partial u}{\partial x},\quad \tau_{xy}=G\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

$$\sigma_y=\lambda\tilde{\theta}+2G\frac{\partial v}{\partial y},\quad \tau_{yz}=G\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

$$\sigma_z=\lambda\tilde{\theta}+2G\frac{\partial w}{\partial z},\quad \tau_{zx}=G\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

以位移表示的平衡方程

$$(\lambda+G)\partial\tilde{\theta}/\partial x+G\nabla^2u+X=0,$$
$$(\lambda+G)\partial\tilde{\theta}/\partial y+G\nabla^2v+Y=0,$$
$$(\lambda+G)\partial\tilde{\theta}/\partial z+G\nabla^2w+Z=0,$$

式中

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

由平衡方程和连续方程得出的应力形式的方程为

$$\nabla^2\sigma_x+\frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Theta=-2\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\mu}{1-\mu}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right),$$

$$\nabla^2\sigma_y+\frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Theta=-2\frac{\partial Y}{\partial y}-\frac{\mu}{1-\mu}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right),$$

$$\nabla^2\sigma_z+\frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Theta=-2\frac{\partial Z}{\partial z}-\frac{\mu}{1-\mu}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right);$$

$$\nabla^2\tau_{xy}+\frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial y}=-\left(\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial x}\right),$$

$$\nabla^2\tau_{yz}+\frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial z}=-\left(\frac{\partial Y}{\partial z}+\frac{\partial Z}{\partial y}\right),$$

$$\nabla^2\tau_{zx}+\frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z\partial x}=-\left(\frac{\partial Z}{\partial x}+\frac{\partial X}{\partial z}\right),$$

式中 $\Theta=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$, $\tilde{\theta}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$,

X, Y, Z为沿x, y, z方向的体力。

3. 圆柱坐标系

正反形式的虎克定律

$$e_r=\frac{1}{2G}\left(R_r-\frac{\mu}{1+\mu}\Theta\right),\quad \gamma_{r\theta}=\frac{1}{G}R_\theta,$$

$$e_\theta=\frac{1}{2G}\left(B_\theta-\frac{\mu}{1+\mu}\Theta\right),\quad \gamma_{\theta z}=\frac{1}{G}B_z,$$

$$e_z=\frac{1}{2G}\left(Z_z-\frac{\mu}{1+\mu}\Theta\right),\quad \gamma_{zr}=\frac{1}{G}Z_r;$$

$$R_r=\lambda\hat{\theta}+2G\frac{\partial u_r}{\partial r},\quad R_\theta=G\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right],$$

$$B_\theta=\lambda\hat{\theta}+\frac{2}{r}G\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+u_r\right),\quad B_z=G\left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right],$$

$$Z_z=\lambda\theta+2G\frac{\partial w_z}{\partial z},\quad Z_r=G\left[\frac{\partial w_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\right].$$

以位移表示的平衡方程

$$(\lambda+2G)r\frac{\partial\theta}{\partial r}-2G\left[\frac{\partial w_z}{\partial\theta}-\frac{\partial}{\partial z}(r\omega_\theta)\right]+rR=0,$$

$$(\lambda+2G)\frac{\partial\theta}{\partial\theta}-2Gr\left[\frac{\partial w_r}{\partial z}-\frac{\partial w_z}{\partial r}\right]+rB=0,$$

$$(\lambda+2G)r\frac{\partial\theta}{\partial z}-2G\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\,\omega_\theta)-\frac{\partial\omega_r}{\partial\theta}\right]+rZ=0.$$

以应力表示的平衡方程

$$\nabla^2R_r-\frac{2}{r^2}(R_r-B_\theta)-\frac{4}{r^2}\frac{\partial R_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2}=0,$$

$$\nabla^2B_\theta+\frac{2}{r^2}(R_r-B_\theta)+\frac{4}{r^2}\frac{\partial B_r}{\partial\theta}+\frac{1}{1+\mu}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\Theta=0,$$

$$\nabla^2Z_z+\frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}=0;$$

$$\nabla^2R_\theta+\frac{1}{1+\mu}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}(R_r-R_\theta)-\frac{4}{r^2}R_\theta=0,$$

$$\nabla^2B_z+\frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2\Theta}{r\partial\theta\partial z}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial Z_r}{\partial\theta}-\frac{B_z}{r^2}=0,$$

$$\nabla^2Z_r+\frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial r\partial z}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial Z_\theta}{\partial\theta}-\frac{Z_r}{r^2}=0,$$

这里 $\Theta=R_r+B_\theta+Z_z$,

$$\nabla^2=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

4. 球坐标系

正反形式的虎克定律

$$e_r=\frac{1}{2G}\left(R_r-\frac{\mu}{1+\mu}\Theta\right),\quad \gamma_{r\theta}=\frac{1}{G}R_\theta,$$

$$e_\theta=\frac{1}{2G}\left(B_\theta-\frac{\mu}{1+\mu}\Theta\right),\quad \gamma_{\theta\beta}=\frac{1}{G}B_\beta,$$

$$e_\beta=\frac{1}{2G}\left(A_\beta-\frac{\mu}{1+\mu}\Theta\right),\quad \gamma_{\beta r}=\frac{1}{G}A_r,$$

$$R_r=\lambda\theta_s+2G\frac{\partial u_r}{\partial r},$$

$$B_\theta=\lambda\theta_s+\frac{2G}{r}\left(\frac{1}{\sin\beta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+u_r+w_\beta\operatorname{ctg}\beta\right),$$