

袖珍電算器分析

Scientific analysis on
the pocket calculator

原著者 J. M. Smith

譯述者 郭 俊 良

複校者 陸 圖

科技圖書股份有限公司

袖珍電算器分析

Scientific analysis on
the pocket calculator

原著者 J. M. Smith

譯述者 郭 俊 良

複校者 陸 圖



科技圖書股份有限公司

序 言

這本書為擁有或正在使用近代的掌中型或桌上型電算器 (pocket calculator or desk calculator) (合稱為袖珍電算器，有別於大型電算機 computer) 的人們而寫，尤其是工程師、科學家、理工科學生、數學家、統計學家、物理家、化學家、電算器分析師、與理工科教師等人們。

若能正確使用數值方法，則袖珍電算器可成為很有功效的計算工具。微小數值方法 (micronumerical methods) 將幫助讀者能發揮花費在袖珍電算器上每元錢的計算能力。

大部份方法都可適用到任何袖珍電算器。凡僅適用於某些型式電算器的特別方法，在需要時，另行詳細說明。並討論有關代數型與逆 - 改良 (reverse - polish) 型電算器的按鍵次序。事實上，在本書中，對所有類型的袖珍電算器的鍵盤與功能皆討論到，顯示本書中的數值方法，可廣泛地應用於一般袖珍電算器的分析。

本書的每一部份提出一個主題，並詳細討論這些方法，復列出能適用於袖珍電算器的公式。目的是提供讀者一些數值技巧、數值近似法、表格、有用的圖形以及可利用袖珍電算器操作的快速而正確的計算用流程圖等。

數值方法係由下列四個論點發展：

1. 每一數值方法的數值計算觀念。
2. 每一方法所使用的方式。
3. 每一方法的優點及其限制。
4. 有用的公式，列成適於袖珍電算器分析的表格。

BNEPP/02

重點又置於某些型態的資料處理用數值方法。諸如調和分析 (harmonic analysis) 與統計分析 (statistical analysis)。且發展成為直接可被工程師、科學家與程式設計師們能利用的型式。

本書的目標是為袖珍電算器提供一些在科學分析上的新方向。顯然，對於用數值計算函數與處理資料，袖珍電算器是很有用的。再者，能使分析師經由袖珍電算器學習數學模式與工具，可迅速獲得關於任何技巧訓練 (自己的或別人的) 詳細而且具體的知識。簡言之，袖珍電算器乃變成分

析師的學習機器。一個分析師不需先發展一個複雜程序或系統的數學模式，而轉變為數值計算的程式。換言之，可在書房或辦公室利用最簡單的四功能電算器（four-function calculator）來計算複雜的函數（和分析複雜的問題）。

全世界用袖珍電算器的分析師們，在其特殊訓練中，創造自己的數值方法來解決問題。因此，袖珍電算器成為一種探討的工具，分析師可為自己的目的而發展自己的數值方法。

在整本書中，將重點置於應用方面，而不重理論。雖然這課題的處理是有關數學，但並不超越袖珍電算器分析所需的範圍。舉出每一技巧與方法的數值例題，並仔細討論其所供給的工具。

本書包括四篇，共分為十二章，在處理這些課題時，盡量避免過於一般化，因為數值分析不僅是科學的，亦是藝術的。本書第一篇介紹袖珍電算器中有益於工程師與科學家的潛力（包括其功能與限制）。尤其偏重於對科學分析師的重要計算性質。第一篇中亦說明了數學的初步概念與進一步的討論，並發展出一些適用於袖珍電算器分析的基本數值方法。從算術到代數及用複數來分析的課題亦包括在內。

第二篇說明計算數學函數的數值方法與公式。又處理在高等工程數學中，通常使用函數的重括弧型式（nest parenthetical form）。在重括弧型式中，其一連串的算術運算，可視為袖珍電算器作進一步分析的依據。例如， $\sin(x) \approx x - x^3/3! + x^5/5!$ 式的三位浮點計算值需用 14 次乘、2 次除、2 次加、與 108 次數據進入，總共 126 次按鍵與 5 個儲存記錄。但計算 $\sin(x) \approx x(1 - (x^2/6)(1 - x^2/20))$ 達相同正確度，僅需 54 次按鍵，且不需儲存記錄。雖然，我們可用四功能電算器如此計算 $\sin(x)$ ，但這例題並不說明許多通常需要儲存器以計算複雜公式可寫成重化（nested）型式，而不需儲存器就可方便的使用四功能袖珍電算器來計算。

重括弧型式為數值計算的“快速”型式。亦即，函數寫成重括弧型式所需的運算，較同一函數的“最簡單代數型式”所需的還少。因此，重化型式的計算較其未重化的更快。

在第二篇又包括計算函數與執行分析的重覆公式。重覆公式是唯一的，為其他有限記憶型式（finite memory form）計算的無限記憶型式（in-

finite memory form)。這公式能使袖珍電算器在實質上有無限記憶來儲存資料，創造出許多為資料處理（如統計）的數值方法，而重寫成適於袖珍電算器分析的重覆型式。再能強調的是，即使四功能電算器，不需記憶器亦可作熟練的分析。當重括弧型式與重覆公式的概念，與屈比雪夫式節約化（Chebyshev economization）及有理多項式近似法之結合，即使用四功能袖珍電算器亦能計算複雜函數，並有很大的適應性與準確度。事實上，嚴肅的分析師直到幾年前，未曾聽過在舒適方便的書房或旅行中仍可執行精確的計算。第三篇為討論袖珍電算器執行更進一步分析的方法與公式。包括定積定以及數據微分（numerical differentiation）、解微分方程式（differential equation）、模擬線性程序（simulating linear processes）、執行統計分析（statistical analysis）、與調和分析（harmonic analysis）等。

第四篇處理附有程式的袖珍電算器的分析法。本章描述有關袖珍電算器在計算能力上的躍進。此係“希派公司”（Hewlett-Packard Corporation）所發展的袖珍程式電算器（programmable pocket calculator）。基於各人經驗來解決大數目的問題。這討論是一般化的，可瞭解袖珍程式電算器已發展成功了。

本書係就電算器數值方法經過八年研究的成果。這些方法是多年間反覆研究，使能適用於桌上型或掌中型電算器的分析。有許多分析師所發現的方法散見於各種出版物中，如桌上型或掌中型電算器的使用說明或手冊、論文、雜誌、與一些教科書等，但大部份皆由筆者自己或同事們所發展出來。我非常感激在軟體研究所（Software Research Coporation）與麥唐道公司（McDonnell-Douglas Coporation）的同事們，他們提供許多寶貴的經驗，且提出許多重要問題。我對當代最偉大的數值分析家，拜爾（Bell）實驗室的海明博士（Dr. Richard Hamming）致最高的敬意，他幫助修改本書的原稿。

我感謝希派公司的員工幫忙修改原稿，特別是HP-65型程式電算器的領導人童丘先生（Chung Tong）。

感謝約瑟夫（Joseph）與古特斯汀（Sarah Goldstein）先生，他們告訴我一句金科玉律的話“一氣呵成”。

感謝吾妻勞麗（Laurie）熬夜趕寫目錄的辛勞。

最後感謝皮蓋特先生（Mr. Florence Piaget），他幫助原稿的打字與出版的準備。

Jon M. Smith

斯密斯

目 錄

第一編 袖珍電算器分析概論

第一章 袖珍電算器

1.1 概論	3
1.2 袖珍電算器在數學方面的差異	4
1.3 指令與數據進入的方法	7
1.4 記憶器	9
1.5 指令組	10
1.6 袖珍程式電算器	14
1.7 本書討論的電算器	14
1.8 算術計算與語言	17
1.9 科學用函數鍵盤的計算	28
1.10 函數計算的準確度	39
1.11 參考資料	47

第二章 差分表、數據分析與函數計算

2.1 概論	53
2.2 等距數據的差分表	54
2.3 數據內插	57
2.4 數據外插	63
2.5 數據誤差的位置與修正	68
2.6 遺漏項	70
2.7 朗格倫日內插公式	72
2.8 除差分表	74
2.9 反內插法	75
2.10 從二位數的數據表得出十三位精度	75
2.11 參考資料	78

第二編 袖珍電算器之函數數值計算

第三章 袖珍電算器之基本分析

3.1	概論	81
3.2	級數的數值計算	81
3.3	絕對與相對誤差的定義	87
3.4	無限級數	90
3.5	多項式的解	96
3.6	連續近似法	99
3.7	基本超越函數	102
3.8	複變數與函數	108
3.9	參考資料	113

第四章 高級函數數值計算

4.1	概論	114
4.2	指數、正弦與餘弦積分	116
4.3	迦瑪函數與其相關函數	122
4.4	誤差函數與費司乃爾積分	125
4.5	勒勤特函數	127
4.6	貝塞爾函數	129
4.7	匯合超幾何函數	134
4.8	屈比雪夫、漢彌德與拉古里多項式	134
4.9	參考資料	135

第三編 袖珍電算器之高級分析

第五章 富利葉分析

5.1	概論	139
5.2	連續函數的富利葉級數	139

5.3	離散函數的富利葉級數	141
5.4	離散與連續富利葉級數展開式間的關係	142
5.5	富利葉係數的數值計算	144
5.6	摘要	147
5.7	參考資料	147

第六章 數值積分

6.1	概論	154
6.2	定積分	154
6.3	梯形積分的誤差	157
6.4	中點積分	159
6.5	不定數值積分	164
6.6	修正尤拉不定積分法	167
6.7	開始值	169
6.8	誤差估計及修正預測修正程序	170
6.9	其它有用的不定數值積分公式	171
6.10	T - 積分	178
6.11	參考資料	179

第七章 線性系統模擬

7.1	概論	180
7.2	用數值積分替代法推導差分方程式	180
7.3	穩定差分方程式	189
7.4	方差傳遞	194
7.5	參考資料	197

第八章 分析替代用屈比雪夫與有理多項近似式

8.1	概論	198
8.2	屈比雪夫多項式之定義	199
8.3	用有理多項式的分析替代近似法	211
8.4	參考資料	223

第九章 求函數之根

9.1 概論	224
9.2 連續函數的實根	225
9.3 虛位法	228
9.4 牛頓法	229
9.5 複數零點	232
9.6 一個改進搜索法	239
9.7 定多項式零點問題	240
9.8 參考資料	241

第十章 統計與概率

10.1 概論	242
10.2 頻數分析	243
10.3 集中趨勢的估值	245
10.4 離散估計值	249
10.5 分佈形態的估計	251
10.6 概率	253
10.7 概率分佈	255
10.8 取樣	260
10.9 統計估計	263
10.10 小樣本	265
10.11 幾方	267
10.12 幾 - 方檢驗	268

第四編 袖珍程式電算器

第十一章 袖珍程式電算器

11.1 概論	283
11.2 硬體構造	285

11.3 固定體	287
11.4 軟體	288
11.5 程式袖珍電算器技巧	289
11.6 程式袖珍電算器的分析方法	296

第十二章 擇適

12.1 概論	300
12.2 極大與極小	301
12.3 無束制的參數擇適	304
12.4 同等束制的參數擇適問題	304
12.5 斜率法	307
12.6 柯倫德氏碾點函數法	308
12.7 參考資料	322

附錄

附錄 1 袖珍電算器用若干技巧

A 1.1 在四功能電算器上計算 π 與 e 值	323
A 1.2 在無指數記號電算器上截短某一數值	326
A 1.3 在具有運算堆組與逆放良記號電算器上，計算任一 函數的羅甲西維克算法	326
A 1.4 分析替代的多項式加速近似法	328
A 1.5 在四功能電算器上計算倒數的方法	331
A 1.6 袖珍電算器上的字母 - 數字	331

附錄 2 袖珍電算器用矩陣分析

附錄 3 複數與複數函數

附錄 4 複變數分析與雙曲線及反雙曲線函數的按鍵次序

複數運算	341
複數三角及雙曲線函數	353
雙曲線與反雙曲線函數	372

第一編

袖珍電算器

分析概論

第一章

袖珍電算器

1.1 概論

本章討論不同類型袖珍電算器 (pocket calculator) 在數學上的差異，與一些數學概念，及利用袖珍電算器分析的效率。

我們並不特別偏重供應數字運算用的硬體 (hardware) 裝備，以及可配合電算器的不同運算方式—硬體構造 (hardware architecture)。僅討論電算器設計中顯而易見的數學概念，諸如使用的語言 (language)、記憶器 (memory) 的大小及型式、指令組 (instruction)，輸入 / 輸出 (input / output) 型式及電算器是否可作程式 (programmable)。目前約有 432 種型式的電算器硬體。這些可以整整寫成一本書。在此僅討論由於不同硬體所引起在數學上的差異，用以

1. 瞭解袖珍電算器與其內部的數學組織。

2. 簡略定出與硬體構造的結合，及其導致計算能力的有效躍增。

目的為求簡化本書的討論，將計算器型式分成三大類。

所討論的三種，假定這種電算器均是有效而且被期望的袖珍電算器。分析的方法，並不限於某一種硬體構造。

本章包括下列的數學概念：

1. 算術運算
2. 設有或無記憶器的函數計算
3. 計算的準確度

4 袖珍電算器分析

第一項係介紹關於一般性的問題（袖珍電算器的算術運算）。事實上，這是相對的。因為不同的電算器所用的語言不同，導致在處理複雜問題時，顯出不同的能力。

偏重於函數的重括弧型式（nested parenthetical form），使函數計算可用無記憶器或有限數記憶器的電算器。重括弧型式可視為供給隱記憶器（implicit memory）給予無記憶器的電算器。此種型式的計算，所需的按鍵次數較一般的代數型式為少。

沒有一本數值分析的書不討論計算的準確度。在此我們也予討論下列的兩項。

1. 典型的袖珍電算器的準確度的極限。
2. 一般計算函數的正確方法，特別適用於袖珍電算器者。

1.2 袖珍電算器在數學方面的差異

目前袖珍電算器在數學方面有許多差異。在此僅討論六種最常遭遇的數學差異（mathematical distinctions）。在某種意義上，這些是主要的差異，乃為其每種袖珍電算器的基本設計（conceptual design）的結果。有關細部設計（detailed design）的重要數學差異，不在此討論。因為硬體構造差異很大。最明顯的差異也許是固定點數（fixed-point numbers）與浮點數（floating-point numbers）。

固定點數，謂其小數點由電路固定。其困擾處是，當兩個大數目相乘時，最大有效數位超過數字展示範圍，其捨位並非在最小有效數位（least significant digits）而在最大有效數位（most significant digit）。大部份的固定點運算計算器（fixed-point arithmetic computer）都有一符號以指示溢流（overflow）情況。

浮點數謂有一移動的小數點，在任何計算中能保留最大有效數位。當一個計算值大於計算器的數字展示範圍，且小數點的位數未知時，大部份的電算器展示最大有效數位，並顯出符號指示小數點位置為未知。

在這兩種不同數值系統，其數值範圍是具戲劇性的差異。在浮點數字系統，數值被圈集在零。在固定點數值系統，數值均分佈在數值範圍。為瞭解此點，乃作下列的討論。在袖珍電算器上這兩種型式所產生數值的過程。

在任何兩數間，最小可能增量為在數字展示中的最小有效數位。對八位數字展示，其小數點固定在第三位，其可加於任一數位（any digit）的最小值為 0.001。現在討論加一增量於浮點數。因為在浮點數系統中，小數點可以移動。因此小數點位於最左邊的數位。對八位數展示，可加於零的最小數為 0.00000001。現在考慮，當小數點在最右邊的數位時的浮點數增量。在此情況下，可加於 99999998 的最小數為 1。當增加浮點數於完全空的記錄器時，其“最小數值”範圍的差異為因數 10^8 。

現在討論在兩數值系統中之正數的全範圍。固定點數的範圍從 0.001 到 99999.999。無論在電算器整個範圍的任一數，其相鄰兩數的差為 0.001。因此，在固定點數的整個範圍的數值是均勻分佈的。

再討論正浮點數，從 99999999 到 0.00000001。顯然，浮點數值系統的範圍較固定點數系統的範圍大，而其數值非常小時，其差為 0.00000001。當記錄器填滿時，兩數間的差為 1。浮點數的整個範圍中，顯然分佈不均勻。事實上，圈集在 0 與 1 間的數值，介於 1 與整個記錄器範圍 99999999 間的數值一樣的多。

6 袖珍電算器分析

可見，在整個數值系統，固定點運算的絕對差值保持一定，而浮點數值的絕對差值為一變數。此時，值得強調的是，在固定點運算系統的整個數值範圍中，定差（constant difference）保持固定，而在浮點運算，則百分差（percentage difference）保持固定。所謂百分差，係指兩連續數的差，除以兩者中的大數。對大部份的工程分析，百分差與百分誤差（percentage error）是最重要的準確度估計。

浮點數值系統，通常表示成10的冪次，正浮點數的範圍從 10^{-99} 到 99999999×10^{99} 。事實上，電算器在科學的符號中通常展示的，為此種延展的數值領域。有趣的，這圈集浮點數於零的鄰近區。由於這種浮點數的團聚性質，在0與1間的絕對誤差，較在1與電算器全幅度範圍的數值為小。

從硬體構造的觀點來說，固定點數值常以較浮點數值更高的準確度展示，而浮點數則以較大的動態範圍（dynamic range）展示。就具有八個展示元素（display elements）的紀錄器。在固定點運算，可展示八個獨立數字，若小數點用小數點鍵 $\square$ 來設定，一個展示元素用來展示小數點，則僅有七位數字可以展示。若用科學符號來增加展示的動態範圍，在指數中，若要展示 m 位數字，需要 $m+1$ 個展示元素。額外的展示元素是用來展示指數的正負符號。

10的次冪	展示	所需展示元素
$10^{\pm x}$	$(\pm)(x)$	2
$10^{\pm xx}$	$(\pm)(x)(x)$	3
.		
.		
.		
$10^{\pm xxx}$	$(\pm)(x)(x)\cdots(x)$	$m+1$
	位數字	

若在記錄器展示99階（orders）的數值，則需三個展示元素來展示指數及其正負符號，因此，僅剩五個展示元素來展示有效尾數（mantissa）。意即，若增加展示的動態範圍，將減少展示有效尾數的位數，因此減少展示