研究生入学考试

高等数学复习指导

蒋传章 张韵琴
崔福荫 张文兰 编

研究生入学考试

高等数学复习指导

蒋传章　张韵琴
崔福荫　张文兰　编

陕西科学技术出版社

研究生入学考试

高等数学复习指导

蒋传章　张韵琴　编
崔福荫　张文兰

陕 西 科 学 技 术 出 版 社 出 版

责任编辑　赵生久

（西安北大街 131 号）

陕西省新华书店发行　国营五二三厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 27.5　字数 592,000

1985 年 5 月第 1 版　1985年 5 月第 1 次印刷

印数1—31,500

统一书号：7202·105　定价：5.15 元

前 言

自一九七八年我国恢复招考研究生以来，每年均有许多高等院校、科研单位招收硕士研究生，参加考试的大专毕业生和社会其它方面自学成才的在职人员更是数以万计，高等数学又是理工科各专业、经济、管理及部分社会科学专业招收研究生时必考科目之一。研究生入学考试的高等数学试题的深广度及难易程度如何？题目的技巧性、综合性怎样？这些试题怎样去解最简便，对于这些问题本书都将给你以满意的回答。

本书是利用我们在教学过程中所积累的资料、参考一九七八年至一九八四年近百所高等院校和科研单位的研究生入学试题选编而成的。在例题及练习题的总数中，历届研究生考题约占90%。为了便于读者阅读，我们仍按照微积分学的一般顺序，分章、节、段编写，每节中有三方面内容：内容提要、例题、练习题。练习题并附有答案。

我们所选编的近九百道例题及三百多道练习题不仅体现了微积分学的基本概念、基本理论、基本方法，且含有较高的技巧性及综合性。因此，从本书可以看出招收硕士研究生对微积分学的基本要求和这种要求的发展趋势。所以，本书不仅可供报考研究生的同志们参考，也可以作为大学生、自学高等数学的同志复习和练习用书，此外，对从事微积分教学工作的老师也有一定的参考价值。

游兆永教授审阅了全稿并提出许多宝贵的修改意见，王文祥、张自兰同志参加了本书的校对工作，在此一并表示衷心感谢。

由于我们水平所限，不足和疏漏之处在所难免，望读者批评指正。

编者于西安交通大学

1984.11.

目　录

第一章　函数、极限与连续

第一节　函　　数

一、内容提要

1. 函数概念

在某一变化过程中，有两个变量 x 和 y，如果对于变量 x 的变化范围中的每一个值，变量 y 就按照一定的规律（对应法则）有确定的值与它对应，则称 y 是 x 的函数，一般用符号

$$y=f(x)$$

表示。其中 x 叫自变量，y 也叫因变量。自变量的取值范围，叫做函数 y 的定义域；因变量 y 相应的取值范围，叫 y 的值域。

对于 x 取的某个定值 x_0，相应的 y 所取的确定的值 $y_0=f(x_0)$ 叫函数在 $x=x_0$ 处的函数值。

定义域和函数值是微积分学两个很重要的概念，尤其是对函数值的计算。在下面的例题中，我们将会看到它的应用是很广泛的。

一元函数 $y=f(x)$ 的几何意义表示一条平面曲线。

2. 基本初等函数

1）幂函数　函数 $y=x^{\mu}$（μ 是实数）

叫幂函数。它的定义域随不同的μ而异，但不论μ为何值，在区间$(0, +\infty)$内幂函数总是有定义的。

2）指数函数　函数$y=a^x$（$a\neq 1$，$a>0$）叫指数函数。它的定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$(0, +\infty)$。

当$a=e=2.718281828\cdots$时，函数$y=e^x$特别有用。

3）对数函数　$y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq 1$）它的定义域为$(0, +\infty)$，值域为$(-\infty, +\infty)$。

当$a=e$时，用$\ln x$表示$\log_e x$，称为自然对数。

4）三角函数　正弦函数$y=\sin x$与余弦函数$y=\cos x$的定义域为$(-\infty, \infty)$，值域为$[-1, 1]$。

正切函数$y=\operatorname{tg} x$的定义域是整个数轴除去$\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$的点，余切函数$y=\operatorname{ctg} x$的定义域是整个数轴除去$k\pi$的点（$k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$）。它们的值域均为$(-\infty, +\infty)$。

5）反三角函数　反正弦函数$y=\sin^{-1}x$与反余弦函数$y=\cos^{-1}x$的定义域均为$[-1, 1]$，值域分别为$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$与$[0, \pi]$。反正切函数$y=\operatorname{tg}^{-1}x$与反余切函数$y=\operatorname{ctg}^{-1}x$的定义域均为$(-\infty, +\infty)$。值域分别为$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$与$(0, \pi)$。

3、复合函数与初等函数

设$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，且当x在某一范围内取值时，相应的u值可使y有意义，则称y是x的复合函数，记为

$$y=f[\varphi(x)].$$

其中u是中间变量。注意，在进行函数的复合时，函数

$\varphi(x)$的值不能超过函数$y=f(u)$的定义域。

由常数，基本初等函数经过有限次的四则运算（加、减、乘、除）及有限次复合步骤，而且由一个式子表示的函数叫初等函数。

4．函数的性质

1）有界性：对于函数$y=f(x)$，如果存在一个正数M，使当x取定义域内每个值时，都有$|f(x)|\leqslant M$成立，则称函数$y=f(x)$为有界函数，否则称为无界函数。

2）奇偶性：在函数$y=f(x)$的定义域内，如果有$f(-x)=-f(x)$成立，则称为奇函数；如果有$f(-x)=f(x)$成立，则称为偶函数。

3）周期性：如果对于函数$y=f(x)$有一个数$T(T\neq 0)$，对x在定义域内的一切值，都有$f(x+T)=f(x)$成立，则称$y=f(x)$为周期函数。习惯上，函数的周期是指使上式成立的T的最小正值。

4）单调性：如果函数$y=f(x)$，对于区间$[a,b]$内的任意两点$x_1<x_2$，有$f(x_1)<f(x_2)$（或$f(x_1)>f(x_2)$），则称$y=f(x)$在$[a,b]$内是单调增（或减）函数。

二、例题

1．基本题（在本书中所出现的基本题系指用本节的方法来计算或证明的例题）．

例1.1.1 求$y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x}$的定义域。

解 $\left|\dfrac{2x}{1+x}\right|\leqslant 1$，且$1+x\neq 0$。故$x\neq -1$，且$|2x|\leqslant|1+x|$，即$4x^2\leqslant(1+x)^2$，亦即$3x^2-2x-1=(3x+1)(x$

$-1)\leqslant 0$，故得 $-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$。

例 1.1.2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$，试求 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域（$a>0$）。

解 由条件 $0\leqslant x+a\leqslant 1$ 及 $0\leqslant x-a\leqslant 1$ 得到：当 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$ 时所求的定义域为 $[a, 1-a]$；当 $a>\frac{1}{2}$ 时，其定义域不存在。

例 1.1.3 设 $f(x)=1/\lg(3-x)+\sqrt{49-x^2}$，求 $f(x)$ 的定义域和 $f(f(-7))$。

解 由 $3-x>0$，$3-x\neq 1$ 及 $49-x^2\geqslant 0$ 得 $f(x)$ 的定义域为：$[-7,2)$，$(2,3)$。

又由 $f(-7)=1/\lg 10=1$；故 $f(f(-7))=1/\lg 2+4\sqrt{3}$。

例 1.1.4 求 $y=\lg(\cos\lg x)$ 的定义域。

解 由于 $\cos\lg x>0$，则

$$\left(2n-\frac{1}{2}\right)\pi<\lg x<\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi \qquad (n\text{ 是整数}),$$

即 $10^{\left(2n-\frac{1}{2}\right)\pi}<x<10^{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}$（$n$ 是整数），故 $y=\lg(\cos\lg x)$ 的定义域为 $\left(10^{\left(2n-\frac{1}{2}\right)\pi}, 10^{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right)$（$n$ 为整数）。

例 1.1.5 已知 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=\cos x+1$，求 $f\left(\cos\frac{x}{2}\right)$。

解 由 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=\cos x+1=2-2\sin^2\frac{x}{2}$。

$$\therefore \quad f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=2-2\cos^2\frac{x}{2}=1-\cos x.$$

例1.1.6 $\varphi(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0,\\ x & x>0;\end{cases}$

及 $\psi(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0,\\ -x^2 & x>0.\end{cases}$

求$\varphi[\varphi(x)]$，$\psi[\psi(x)]$，$\varphi[\psi(x)]$，$\psi[\varphi(x)]$。

解 $\varphi[\varphi(x)]=\begin{cases}0 & \varphi(x)\leqslant 0\\ \varphi(x) & \varphi(x)>0\end{cases}=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ x & x>0\end{cases}=\varphi(x)$.

$$\psi[\psi(x)]=\begin{cases}0 & \psi(x)\leqslant 0\\ -\varphi^2(x) & \psi(x)>0\end{cases}=0$$

(因为对于一切 x，$\psi(x)\leqslant 0$)。

$$\varphi[\psi(x)]=\begin{cases}0 & \psi(x)\leqslant 0\\ \psi(x) & \psi(x)>0\end{cases}=0\ (\text{理由同上}).$$

$$\psi[\varphi(x)]=\begin{cases}0 & \varphi(x)\leqslant 0\\ -\varphi^2(x) & \varphi(x)>0\end{cases}=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ -x^2 & x>0\end{cases}$$

$$=\psi(x).$$

例 1.1.7 设 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$，并且已知当 $y=1$ 时有 $z=x$，试求函数 $f(x)$及 z 的分析表达式。

解 以 $y=1$ 时 $z=x$ 代入 z 的表达式得

$$x-1=f(\sqrt[3]{x}-1).$$

设 $\sqrt[3]{x}-1=t$，则 $x=(1+t)^3$代入上式得

$$f(t)=(1+t)^3-1=t^3+3t^2+3t,$$

所以，$f(x)$及 z 的分析表达式分别为

$$f(x)=x^3+3x^2+3x,$$

$$z=\sqrt{y}+x-1.$$

例 1.1.8 证明：定义在对称区间 $(-l,l)$ 内的任何函

数 $f(x)$，必可以表示成偶函数 $H(x)$ 与奇函数 $G(x)$ 之和的形式，且这种表示法是唯一的。

证 令 $H(x)=[f(x)+f(-x)]/2$，$G(x)=[f(x)-f(-x)]/2$，则 $H(x)$ 与 $G(x)$ 依次为定义在 $(-l,l)$ 内的偶函数与奇函数，且 $f(x)=H(x)+G(x)$。若还有偶函数 $H_1(x)$，奇函数 $G_1(x)$ 使 $f(x)=H_1(x)+G_1(x)$，

则 $$H(x)-H_1(x)=G_1(x)-G(x), \tag{1}$$

以 $-x$ 代入 (1) 式得

$$H(x)-H_1(x)=G(x)-G_1(x), \tag{2}$$

(1) + (2) 得 $H(x)=H_1(x)$，于是，由 (1) 式得 $G(x)=G_1(x)$，唯一性得证。

2. 杂题 （本书中所出现的杂题系指除用本节的基本方法外，还要用到其他章节内容的概念、公式来计算或证明的例题。）

例 1.1.9 已知 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$，1) 求 $f(f(x))$ 的定义域；2) 已知 $f(x)=17$，求 $f(f'(x))$。

解 1) $f(f(x))$ 的定义域为 $x\neq-1$ 及 $f(x)\neq-1$，$\left(\text{即}\dfrac{1}{1+x}\neq-1\right)$。亦即为 $(-\infty,-2)$，$(-2,-1)$，$(-1,+\infty)$。

2) 由 $f(x)=17$，即 $\dfrac{1}{1+x}=17$，得 $x=-\dfrac{16}{17}$。

而 $$f'(x)=\left(\frac{1}{1+x}\right)'=-\frac{1}{(1+x)^2},$$

$$\therefore\quad f(f'(x))=\frac{1}{1+f'(x)}=\frac{1}{1-\dfrac{1}{(1+x)^2}}=\frac{(1+x)^2}{(1+x)^2-1}.$$

故当 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}=17$ 时，即当 $x=-\dfrac{16}{17}$ 时

$$f(f'(x))\Big|_{x=-\frac{16}{17}}=\frac{\left(1-\frac{16}{17}\right)^2}{\left(1-\frac{16}{17}\right)^2-1}=\frac{1}{1-17^2}.$$

例 1.1.10 设 $f(x)=e^x$，$g(x)=\sin x$，求

$$\frac{\frac{d}{dx}f[g(x)]+\frac{d}{dx}g[f(x)]}{g\left[\frac{d}{dx}f(x)\right]+f\left[\frac{d}{dx}g(x)\right]}.$$

解 由 $f[g(x)]=e^{\sin x}$，$g[f(x)]=\sin e^x$

$\therefore$ $\quad \dfrac{d}{dx}f(x)=e^x$，$\dfrac{d}{dx}g(x)=\cos x$，

$$\frac{d}{dx}f[g(x)]=e^{\sin x}\cos x,$$

$$\frac{d}{dx}g[f(x)]=e^x\cos e^x.$$

$$g\left[\frac{d}{dx}f(x)\right]=\sin e^x,\qquad f\left[\frac{d}{dx}g(x)\right]=e^{\cos x}.$$

故 $\quad$ 原式 $=\dfrac{e^{\sin x}\cos x+e^x\cos e^x}{\sin e^x+e^{\cos x}}$.

例 1.1.11 设 $F(x)=\int_0^a f(x+y)dy$，其中 $a>0$，$f(u)$ 为处处有定义且单调增加的连续函数。试讨论 $F(x)$ 的增减性。

解 任取 $x_2>x_1$，由题设有 $f(x_2+y)>f(x_1+y)$。又 $a>0$，故有 $F(x_2)-F(x_1)=\int_0^a f(x_2+y)dy-\int_0^a f(x_1+y)dy>0$，即 $F(x_2)>F(x_1)$，所以，$F(x)$ 为单调增函数。

三、练习题

1. 求下列函数的定义域：

1) $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$.

答：$1\leqslant x\leqslant 4$.

2) $y=\operatorname{ctg}\pi x+\cos^{-1}(2^x)$.

答：$-(n+1)<x<-n$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$.

3) $y=\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3\cos 2x}}$.

答：$(4k-1)\dfrac{\pi}{4}<x<(4k+1)\dfrac{\pi}{4}$，$k$ 为整数.

4) 设 $y=f(x)$ 的定义域是$[0,\ 1]$，问 $1°\ f(x^2)$，$2°$ $f(\sin x)$，$3°\ f(x+h)+f(x-h)$ (其中 $h>0$) 的定义域是什么？

答：$1°\ [-1,1]$；$2°\ [2n\pi,(2n+1)\pi]$，$(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$；$3°\ [h,1-h]\left(0<h\leqslant\dfrac{1}{2}\right)$，$h>\dfrac{1}{2}$ 时定义域不存在.

2. 设 $\varphi(x)=\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$，试证明

$$\varphi(y)+\varphi(z)=\varphi\left(\frac{y+z}{1+yz}\right).$$

3. 设函数 $f(x)$在 $(-\infty,\ \infty)$ 是奇函数，$f(1)=a$，且对于任何 x 值均有 $f(x+2)-f(x)=f(2)$. 1) 试用 a 表示 $f(2)$ 与 $f(5)$；2) 问 a 取什么值时，$f(x)$是以 2 为周期的周期函数.

答：1) $f(2)=2a$，$f(5)=5a$；2) $a=0$.

4．设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，试验证 $f\{f[f(x)]\}=x$，

并求 $f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$，$(x\neq 0,\ x\neq 1)$。

答：$f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)=1-x$，　　$(x\neq 0,\ x\neq 1)$。

第二节　数列的极限

一、内容提要

1．数列极限的概念

如果对任意的 $\varepsilon>0$，存在着一个正整数 $N=N(\varepsilon)$，使当 $n>N$时，有$|x_n-A|<\varepsilon$成立，则称数列 x_1，x_2，…，x_n，…（简记为$\{x_n\}$）有极限 A（或者说，收敛于 A），记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A.$$

数列极限的这个定义，通常叫 ε—N 方法。

2．数列极限存在的判别法：

1）设　$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$

则　　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$（也叫夹逼定理）。

2）单调上升（下降）；上（下）有界的数列必有极限存在。

3．关于数列极限的基本定理：

设　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在，则有

1）若　$x_n\leqslant y_n$　则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}y_n$，

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty}y_n$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n y_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n \lim\limits_{n\to\infty}y_n$,

4) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$.

二、例题

1. 基本题

例1.2.1 用ε—N方法证明数列$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{7}{8}$，$\frac{15}{16}$，…，$\frac{2^n-1}{2^n}$，的极限为1。

证 要使$\left|\frac{2^n-1}{2^n}-1\right|=\frac{1}{2^n}<\varepsilon$，即 $2^n>\frac{1}{\varepsilon}$，

$$n>\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{2^n}，取 N\geqslant\left[\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}\right]当 n>N 时$$

就有
$$\left|\frac{2^n-1}{2^n}-1\right|<\varepsilon,$$

所以，此数列的极限为1.

例 1.2.2 已知数列$\{x_n\}$满足条件$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$。

证 由$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$，即对任意给定的$\varepsilon/2>0$，存在$N>2$，使当$n>N$时有$|x_n-x_{n-2}|<\varepsilon/2$，则对充分大的$P$有

$$\begin{aligned}|x_{N+P}-x_{N+P-1}|&=|x_{N+P}-x_{N+P-2}+x_{N+P-2}-x_{N+P-1}|\\&\leqslant|x_{N+P}-x_{N+P-2}|+|x_{N+P-2}-x_{N+P-1}|\end{aligned}$$