

初中一年级(上)

中学数学系列讲座

北京市海淀区教师进修学校
北京数学会海淀区分会 编

清华大学出版社

中学数学系列讲座

初中一年级

(上册)

北京市海淀区教师进修学校 编
北京数学会海淀区分会

清华大学出版社

内 容 简 介

本书是初中一年级上学册学生的数学课外读物，目的是为了扩大学生知识面，丰富解题方法，提高数学的分析解题能力。

全书共十讲，内容包括趣味数学、列方程解应用题、不等式、绝对值、抽屉原则、数的迷信制等。每讲都有方法介绍、例题分析、总结规律，并配有练习题与答案。本书可供自学青年及初中数学教师参考使用，并为各校开展课外数学小组活动提供素材。

中学教学系列讲座

初中一年级（上册）

北京市海淀区教师进修学校
北京数学会海淀区分会 编

☆

清华大学出版社出版

北京 清华园

保定科技印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

☆

开本：787×1092 1/32 印张：4.75 字数：105 千字

1989 年 2 月第 1 版 1989 年 2 月第 1 次印刷

印数：00001~30000 定价：1.25 元

ISBN 7-302-00358-0/O·66

前 言

《中学数学系列讲座》共分 11 册，初中一、二、三年级及高中一、二年级上、下各一册，高三年级全一册。

这套书是以“十年制数学教学大纲”为依据，参照各年级教科书内容与实际教学进度缩写而成，这是一套具有提高性质的课外读物，用以扩大学生的知识面，开拓视野，丰富解题方法，提高学生分析问题与解决问题的能力。

本“系列讲座”以数学专题讲座的形式编写，各讲独立成章，便于学生根据自己的兴趣和需要灵活选读，亦可供中学数学教师和自学者参考，并为各校开展数学课外活动提供素材。

这套书由北京市海淀区教师进修学校数学组与北京数学会海淀区分会联合组成编委会，负责组织编写，并得到海淀区教育局的支持和指导。由于经验不足，一定有不少缺点，请读者批评指正，以便今后修改与补充。

《中学数学系列讲座》编委会

《中学数学系列讲座》

编委会名单

顾问：王家骏

主编：陈剑刚 赵大悌

编委：王增民（进修学校） 关民乐（京工附中）
王燕谋（十一学校） 陈捷（铁道附中）
孔令颐（清华附中） 陈剑刚（北大附中）
孙云淮（育鸿学校） 赵大悌（进修学校）

各书主审：

初一年级（上、下册）王燕谋
初二年级（上、下册）孙云淮
初三年级（上、下册）关民乐

高一年级（上、下册）陈捷
高二年级（上、下册）陈剑刚
高三年级（全一册）孔令颐

目 录

第一讲	初一新生的一次数学晚会·····	陈泰来 (1)
第二讲	趣味数学·····	李珣珈 (8)
第三讲	浅谈“数字谜”的解法·····	罗忠进 (28)
第四讲	高斯数 $[x]$ 及应用·····	王燕谋 (44)
第五讲	数的整除·····	王燕谋 (54)
第六讲	列方程解应用题·····	孙云淮 (66)
第七讲	不等式及不等式的解法·····	尹秀芬 (86)
第八讲	绝对值与含有绝对值的等式·····	阎敬先 (104)
第九讲	抽屉原则及其应用·····	李珣珈 (115)
第十讲	数的进位制·····	李珣珈 (130)

第一讲

初一新生的一次数学晚会

陈泰来

晚会主题：使新入学的同学尽快了解中学数学，并能热爱中学数学。

一、晚会上几个主要节目片断

之一，主持人手举一块写着数字《123456789》的木牌，问 A 同学：

“你最喜欢哪个阿拉伯数字？”

“最喜欢 5。”

“那请你用 45 乘以我木牌上的这个数吧！不过要用口算”。

“……555555555。”

主持人又走到 B 同学面前。

“你喜欢哪个数字？”

“8。”

“那你就用 72 乘以我木牌上这个数吧！”

“……888888888”。

同学们对这个趣算马上发生了兴趣，纷纷在下面寻找主持人所给的乘数的规律，也终于找到了规律，即：喜欢数字

“5”的，给 45 (9×5)；喜欢数字“8”的，给 72 (9×8)；如果喜欢数字“3”，当然就给 27。

之二，速算比赛的第一道抢答题：“在从 1 开始的前 100 个自然数中，所有能被 3 整除的数的总和是多少？”

一个性格内向的小女学生第一个举起了手中的答案：
《1683》

她的运算过程是： $(3 + 99) \div 2 \times 33$ 。

教他们数学课的杨老师启发地问道：

“你是怎么想起使用这种方法的？”

回答：由小高斯对 $1 + 2 + 3 + \dots + 100$ 的巧算联想起来的。

之三，速算抢答的第二份题： $23 \times 27 = ?$ ； $54 \times 56 = ?$ ； $82 \times 88 = ?$ 。

这三道题的特征是：两个乘数的十位数字相同，个位数字之和为 10。速算的方法是：用十位数字乘以比它大 1 的数字，再在得数后面添写两个个位数字的积。譬如， 82×88 的结果是：先算 $8 \times 9 = 72$ ，再在 72 后面补上 16 (2×8)，答案是 72 16。

之四，主持人挂出了两幅挂图（图 1.1，图 1.2）。

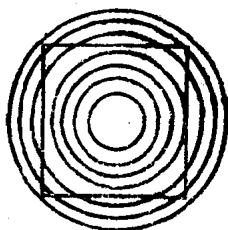


图 1.1

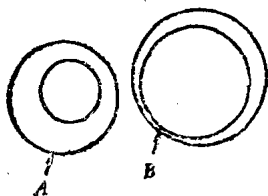


图 1.2

问：左图中四边形的四框直吗？右图中箭头所指的 A 、 B 二圆哪个大？

经通一阵仔细的观察之后，得出了下面的结论：左图中的边框是直的，右图中所指二圆的大小一样。而且大家也都承认，刚一看图的时候，确实有一种视觉上的差错。

之五，也就是晚会的最后一个节目，提供节目内容的人是杨老师，只见他拿粉笔在黑板上画了一个正方形，并声明边长为 8，下一步作了如图 1.3 所示的分割，并标上了“ A ”、“ B ”、“ C ”、“ D ”等代号。

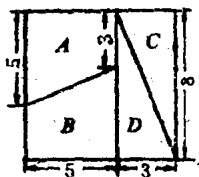


图 1.3

杨老师是这样提出问题的：“我们现在假想把‘ A ’、‘ B ’、‘ C ’、‘ D ’这四个木块锯开，利用 $3 = 3$ 这个有利条件再把它们拼成一个如图 1.4 的长方形”。

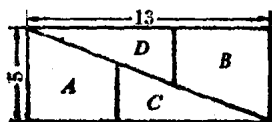


图 1.4

“你们大家先计算一下这个正方形的面积和长方形的面积……”

计算的结果是两个面积数字不一样！

其它，讲数学故事。一个缺乏数学知识的“财迷”上了一个“骗子”的当，以致使自己倾家荡产；介绍古代名题《韩信点兵》……等等；由于运算人忽略一个括号，导致大象的体重 = 蚊子的体重；还有许多的数学谜语。

二、这些节目之后，老师是如何将它们引申的

节目之一后，老师问大家：“主持人给的乘数中有一个关键的因数是几？”

“9”。大家都能回答。

接着，老师又让主持人提供了两个与数字“9”有关的数学游戏，最后问了大家一个问题：

“看来，用数字“9”乘出来的数，很有些特征，这些特征是什么呢？”给大家留下了一个悬念。

节目之二后，老师指出：小高斯在当时的那种环境下，算出他自己的那道题是很不简单的，但我们这一代的青少年由于有着良好的教学条件，计算起那类题来并不困难。之后又叫两位同学编了两道类似的题。

节目之三后，老师给大家指出为什么能使用这种速算方法的一条思路：把两个乘数的十位数字设成 a ，一个乘数的个位数字设成 b ，另一个当然是 $10-b$ ，然后希望大家从式子： $(10a+b) \cdot [10a+(10-b)]$ 去推算。

节目之四后，老师指出凭直觉去判断事物是不可靠的，因而要去学习一些按步就班的推理思维方法，但同学们对怎样做才算是推理似懂非懂。

节目之五后，老师就进行了晚会的总结发言。

三、杨老师的总结

“同学们！数学中有很多的奥秘，但它又是一门很严肃的学科。”

“刚才这个拼木块的问题，你真要是实际去作，四个小

木块是拼不拢的。但如何从理论上严格讲清楚，光我们现有的知识就不够了。”

“你们是刚刚进入中学大门的，你们在小学所学的数学知识，大多数还是偏重于方法，而方法的依据大部分都是直觉经验。以后在中学阶段的学习，许多问题就要偏重于理论了，就是说：解决问题的每一步，都要追究追究它根据什么。”

“如果把小学知识比成一池水的话，中学数学就好比是知识的海洋，到时候可以任你们畅游。在这里，我把中学数学的几个主要特征向大家介绍一下。”

趁老师停顿的半分钟，不少同学拿出了笔记本。

“首先，中学数学开始了用字母代替数字研究运算的一些性质。譬如刚才的速算题： 23×27 ； 54×56 ； 82×87 。我提出研究的式子是： $(10a+b) \cdot [10a+(10-b)]$ 这就是字母代替数字研究运算规律的起始，只有用字母研究出来的规律才具有普遍意义。再譬如很多的趣算与速算中都用到了“去乘数字9”，因为任何一个数字乘以9得到的积的个位数字与原数之和为10。这又是为什么呢？假设原来选定的数字为 n ，将9写成 $10-1$ ，即有 $9 \times n = (10-1) \cdot n = 10n - n$ ，可以看出积的个位数字一定是 $10-n$ 。”

“其次，数学这门课从字义上来看，好象主要是研究“数”的，其实完全不是。到了中学之后，研究“图形”的问题是相当多的，与“数”的研究相比较，分不清谁轻谁重。咱们那个拼木块的问题不就还没有彻底解决吗？中学二年级要开始一门叫“几何”的课程，就是以研究图形大小、位置关系为主的数学课。”

“在中学数学课程中，除去我刚才说的那些内容之外，还要学习一些严谨推理的思维方法，解决一个数学问题，步步都要讲道理。只有掌握严谨的推理方法，才能防止在判断问题时由直觉所造成的偏差。今天你们听了我这番话，对今后的学习会有很大帮助的！”

杨老师看了看表，估计了一下晚会散会的时间，又提高了嗓音向大家说：

“同学们！晚会快要结束了。你们在过去的学习中取得了不小的成绩，但是，你们过去接触到的数学问题中，还有许多地方你没弄清道理。你们看过《唐老鸭漫游数学奇境》吗？那扑朔迷离的画面，引人发笑的情节你一定记得很清楚，但里面提到的“黄金分割”之类的名词你懂吗？儿童电视剧“曹冲称象”你们可能认为都看懂了，但你要知道：小曹冲运用的“等量代换”原理，在中学数学中有着很普遍的应用。还可以告诉你，小高斯的巧算方法在中学数学中只是一个很简单的数列求和问题。”

“你们每个人手里都有几本少年科技读物。哪一本都离不开数学吧！有本介绍天体运行的书籍中谈到了××星球的运行轨道是‘椭圆’，你们现在对‘椭圆’只是有一个大致的形象，这种图形的一些内部性质特征到了高中数学部分就会讲解得很详细。”

“数学是各项科技研究领域里的先行官，将来希望你们永远热爱数学这门知识，未来的数学杰出人材可能就出在你们当中！世界奥林匹克数学竞赛的优胜者可能就出在你们当中！你们要永远记住这次数学晚会！”

四、晚会结束之后

同学们以兴奋的心情陆陆续续离开教室时，脑子里始终回旋着杨老师的讲话，他们都感到通过这次晚会得到了许许多多，又好象对“数学”这一学科的理解还刚刚开始。

第二讲

趣味数学

李珞珈

同学们，你们喜欢数学吗？数学是一门重要的学科，它是一切自然科学的基础，“数学是锻炼思维的体操”经常解一些数学题，可以提高你的分析能力和逻辑推理能力，使你变得更聪明。有些问题看起来无从下手，而一旦揭开了它的奥秘，就会觉得原来它是多么容易；有的问题乍一看并不惊人，其实里面蕴含着复杂的原理，又是多么耐人寻味……

有些同学一碰到复杂的计算就会感到头疼，好象数学就是单调与枯燥的代名词，其实不然，数学是极富有趣味性的学科，当你漫游数学奇境时，就会发现到处琳琅满目，气象万千，使你目不暇接，美不胜收。

同学们，热爱数学吧！它会给你带来智慧和力量，带来美的享受和无穷的趣味性。你不相信？！请你看看下面这些题，难道不是很有趣吗？

一、“ $169 = 168$ ”的故事

你相信“ $169 = 168$ ”吗？这个等式看来十分荒谬，然而在一定条件下却是事实，下面我们来讲一段有趣的故事。

世界著名的魔术师兰迪先生，有一块长宽都是13分米的

地毯，他想把它改成长 21 分米，宽 8 分米的地毯，于是他拿着地毯去找地毯匠奥马尔，对他说：“朋友，我想请你把这块地毯分成四块，再把它们缝在一起，制成一块 21 分米 $\times$ 8 分米的地毯。”奥马尔听了以后对他说：“兰迪先生，真是太遗憾了！您是位伟大的魔术师可是您的算术竟然这样差！ $13 \times 13 = 169$ ，而 $21 \times 8 = 168$ ， $169 \neq 168$ ，这样的事怎么能办得到呢？”兰迪说“亲爱的奥马尔，我兰迪是从来不会错的，请你把这块地毯裁成如图 2.1 的四块，再照图 2.2 缝在一起就行了。”奥马尔照他的话做了以后果然成功

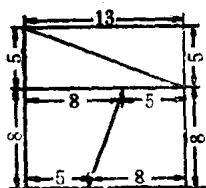


图 2.1

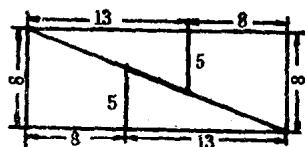


图 2.2

了。这就是“ $169 = 168$ ”的故事。

请同学们想一想，这是怎么回事？如果我们把图 2.1、图 2.2 仔细观察一下，不难发现，图 2.2 中，在矩形对角线中段（粗线处）发生了微小的重叠，致使面积丢失了一个平方单位，你若不信，不妨试试。

那么为什么会出现这种情况呢？我们必须寻根求源，数列 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34……叫做“斐波那契数列”。此数列中任何一个数都称为“斐波那契数”，显然图 2.1, 图 2.2 中涉及到的四个长度数 5, 8, 13, 21 都是“斐波那契数”。容易看出：

$8^2 = 5 \times 13 - 1$, $13^2 = 8 \times 21 + 1$, 正是由于“斐波那契数列”的这种奇妙的性质, 致使“地毯问题”中出现了“ $169 = 168$ ”的似是而非的结论。

同学们, 你们说这件事怪不怪? 你们若有兴趣的话, 可照图 2.3 改拼成图 2.4 就会得出“ $64 = 65$ ”的结论, 这又是为什么呢?

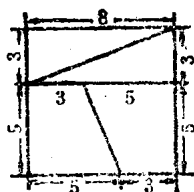


图 2.3

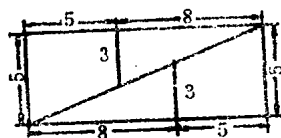


图 2.4

二、莫比乌斯带

据说, 古代有一个国王, 他有五个儿子, 国王临终时, 立下了一份遗嘱, 规定: 他死后, 五个儿子可将国土划成五块。分成的五块国土可以不考虑形状和大小, 但是①必须是每一块与其他四块都有一条共同的边界线; ②使得居住在任何一块国土上的人, 不必经过第三者的国土, 就可以直接到达其他任何一块国土。

不久, 老国王就去世了, 同学们, 请你们想一想, 五个儿子能否按照他的遗嘱, 将国土分成五块呢?

解: 为了要解答这个问题, 我们首先要了解什么叫“莫比乌斯带”。什么叫“莫比乌斯带”呢? 让我们来做一个模型: 如图 2.5, 先准备好一条长方形的纸带“ $ABCD$ ”, 然后用一只手拿住 CD 一边, 另一只手将 AB 一边扭转

180°, 使 A 点对准 D 点, B 点对准 C 点, 然后将它们粘好, 成为图 2.6 那样的纸带。这就是“莫比乌斯带”的模型。

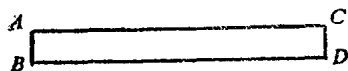


图 2.5

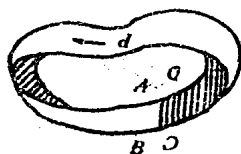


图 2.6

“莫比乌斯带”也叫“莫比乌斯曲面”，它与柱形曲面（如图 2.7）不同，柱形曲面有内外两个面，而莫比乌斯曲面只有一个面（在这个曲面上的任一点 P 按箭头方向或相反方向移动，不需要越过边缘就能回到原处）。



图 2.7

以上我们对“莫比乌斯带”有了初步的了解，下面我们可以考虑“国王的遗嘱”问题了。如果我们把图 2.8 所示纸带的正面分成五个部分如图 2.8。

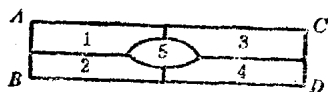


图 2.8

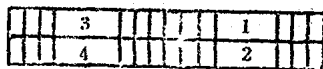


图 2.9

然后把数字 1, 2, 3, 4 朝纸带的背面延伸过去, 并标上相应的数字（即在反面标上相应的数字）如图 2.9 然后按前面介绍的方法把纸带粘成“莫比乌斯带”，如果国王的