九五
★★★★★

普通高等教育“九五”国家级重点教材

高等学校教材

水利水电工程系统分析与决策

糜莺英　主编

中国电力出版社

PU TONG GAO DENG JIAO YU
"JIU WU "GUO JIA JI ZHONG DIAN JIAO CAI

TV
M642

普通高等教育"九五"国家级重点教材

高等学校教材

水利水电工程系统分析与决策

武汉水利电力大学 糜莺英 主编

中国电力出版社

内 容 提 要

本书是国家教育部高等学校重点教材。

本书着重介绍系统科学和系统工程理论方法，并结合水利水电工程列举了较多的算例。全书共分为十章，第一章为系统工程的基本概念，第二～十章为系统工程理论方法及应用，包括线性规划、整数规划、非线性规划、动态规划、网络计划技术、排队论、存储问题、系统模拟和决策分析等。每章后附有习题，适于教学和自学。

本书为高等学校水利水电工程类专业教材，同时也可作为系统工程和管理工程专业的教材及工程技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

水利水电工程系统分析与决策/糜莺英主编．-北京：中国电力出版社，1999

高等学校教材

ISBN 7-80125-338-8

Ⅰ．水…　Ⅱ．糜…　Ⅲ．①水利工程-系统分析-高等学校-教材②水力发电工程-系统分析-高等学校-教材　Ⅳ．TV

中国版本图书馆 CIP 数据核字（97）第 08417 号

中国电力出版社出版

（北京三里河路 6 号　100044　http：//www. cepp. com. cn）

保定列电印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

1999 年 6 月第一版　　1999 年 6 月北京第一次印刷

787 毫米×1092 毫米　16 开本　11.25 印张　251 千字

印数 0001—1500 册　　定价 **18.00** 元

版 权 专 有　　翻 印 必 究

（本书如有印装质量问题，我社发行部负责退换）

前　　言

系统分析是从其总体出发对一个系统建立模型，在所有可能的方案中选取最优方案，为决策提供依据。它是近几十年发展起来的一门新兴科学。在水利水电工程建设中，只有掌握系统分析的理论和方法，才能适应现代化管理的需要。它的推广和应用，将带来显著的经济效果。

为了便于广大读者学习运用这门新技术，本书在内容上力求浅显易懂，而不过分追求严密的数学论证，适于教学和自学。书中例题尽量结合水利水电工程的实际问题。全书共分为十章。第一章介绍系统及系统工程的基本概念，第二～十章着重介绍各种优化方法及应用，包括线性规划、整数规划、非线性规划、动态规划、网络计划技术、排队论、存储问题、系统模拟和决策分析等。本书由糜莺英主编。第六章由申明亮编写，其他章节均由糜莺英编写。

本书先受电力部中电联教育培训部委托编写，作为高校水电工程类专业的教材，后又列为国家教育部重点教材。本书可作系统工程和管理工程专业的教材和教学参考书，也可作生产管理单位技术、经济和管理干部培训及自学参考书。

本书编写前，在原有相应教材的基础上，制定了编写大纲。曾得到高校水电工程类专业教学指导委员会的指导和帮助，在此表示谢意。本教材由天津大学孙锡衡教授和朱光熙教授审稿。他们提出了许多宝贵意见，丰富了书稿的内容，提高了教材的科学性、系统性和可读性，在此表示衷心的感谢。

由于系统工程学科涉及范围广泛，加之编者的学识水平有限，书中一定存在不少缺点和错误，诚恳希望读者批评指正。

编　者

1998年3月

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章 系统工程概论

第一节 系统及系统工程

系统工程（System Engineering）是一门新兴的高度综合的科学，近年来得到迅速发展。系统工程从系统的观点出发，综合运用已有各学科的思想方法和技术方法，运用现代科学和技术方法，进行系统的规划、设计、组建和运行，使系统达到总体最优的状态。

一、系统的基本概念

1．系统的含义

研究系统工程，首先要知道系统、系统工程的含义。

所谓系统，是指由互相依存而又互相制约的若干个组成部分结合成的具有特定功能和目标的有机整体，这个系统本身又是它从属的一个更大系统的组成部分。

因此，我们可以这样认为，一个水利水电枢纽工程是一个系统。它的组成部分有挡水建筑物、泄水建筑物、发电建筑物、通航建筑物等。这些建筑物结合起来，组成一个有机整体——水利水电枢纽工程。它们之间又存在着互相联系、互相制约的关系，并且围绕着它的开发目标，协调地进行工作。当然，这个水利水电枢纽工程在一条河流的梯级开发中，又是河流梯级系统的一个组成部分，从属于一个更大的系统；另外，这个枢纽中的各项建筑物，也各自成为系统，是水利水电枢纽工程系统的子系统。这些子系统由各自的组成部分所构成，互相之间有联系。系统的这种结构性质称为系统的层次结构，图 1-1 所示为水利水电枢纽工程系统层次结构图。

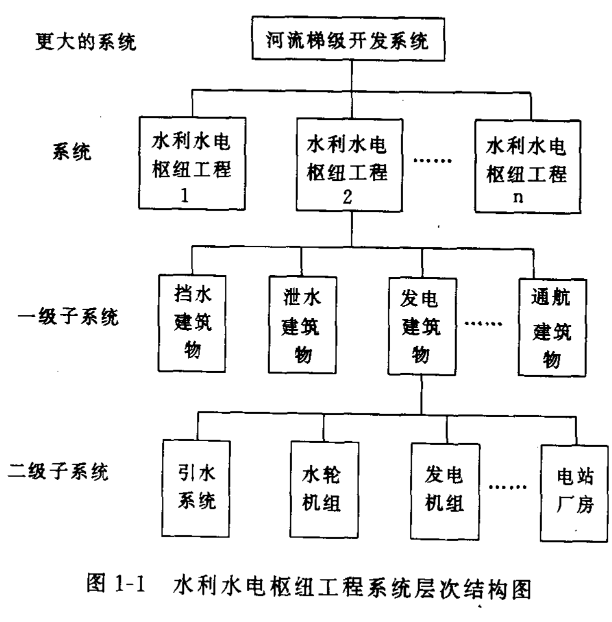

图 1-1 水利水电枢纽工程系统层次结构图

系统可分为自然系统、人工系统，开放系统、封闭系统等。系统工程研究对象限于人工系统或是经过改造的自然系统。

2. 系统的特征

作为一个系统，它具有如下五个主要特征：

（1）集合性。系统至少是由两个或两个以上相互区别的单元组成。它们可以是性质单一的元素，也可能是一些相对复杂的系统。

（2）相关性。组成系统的单元是相互联系、相互作用的。如果各单元之间不存在任何有机联系，则它们不能组成系统。如前述挡水、泄水、发电和通航建筑物等组成的水利水电枢纽工程系统在运行时，各个组成部分之间存在着相互关联、协调的作用，如电站运行受挡水、泄水建筑物系统的影响，也依存于这些系统的配合。

（3）目的性。要研究的任何人工系统都是有目的性的，而且往往不是单一的目的。这个目的性，就是具体的目标。

（4）整体性。组成系统的各单元之间的关系要服从整体要求；单元作用要服从系统的整体要求，即以整体观念来协调系统中各单元。整体性是系统工程的重要特性。

（5）环境适应性。任何一个系统不可能孤立存在，它必定存在于一定物质环境（更大的系统）之中。因此，它必须与环境产生物质的、能量的和信息的交换，以适应环境的变化，否则，它就没有生命力。如水利水电枢纽工程，在运行中要保持整体最优状态，使总效益最好，它应不断地适应上游来水、下游供水、发电、航运等方面情况，随时适应环境的变化。

二、系统工程

1. 系统工程的概念

系统工程是以系统为对象的一门跨学科的边缘科学。

系统工程是对系统进行开发、创制或改造、试验和运用的工程技术。它是根据整体协调的需要，运用系统分析的理论和方法，应用近代数学和电子计算机等工具，研究和解决系统的分析、规划、设计、组织、管理和评价等问题，使系统达到最优工作状态和最佳工作途径。

系统工程的核心在于解决系统的最优化问题，使系统各组成部分整体处于充分协调的最优化状态，而并不一定要求所有子系统都最优。

系统工程是研究系统的工程技术，它不是单学科的技术，而是横跨了自然科学和社会科学的工程技术。

系统工程探讨的任务，不仅是系统的规划、设计、组织、管理和运行的最优问题，而且还需要了解系统对象的未来。所以系统工程的内容还包括对系统对象未来状态的预测。

2. 系统工程发展简介

人类在社会实践中，对各种各样的系统进行创制、改造和利用，逐步形成了综合处理系统问题的朴素思想。例如，我国战国时期的李冰父子修筑都江堰水利工程，北宋时期丁渭主持修复皇宫等，在规划、设计、施工等方面都体现了一定的系统思想。

近代，由于生产力的发展和生产规模的扩大，产生了系统工程。1940 年美国贝尔电话

公司正式采用了系统工程这一名词。他们应用系统工程的方法来发展美国通信网络，取得了良好效果。

19 世纪 40～60 年代，在美国、日本及西方其他国家，系统工程在科技、军事、教育和经济管理领域都得到较大发展，系统工程科学开始形成一个体系。其中，水利方面形成了水资源系统工程。

水资源系统工程解决水资源的最优分配和利用，水利水电工程规划、设计、管理等问题，如美国哥伦比亚河的规划，旧金山海湾和三角洲的研究，加拿大安大略北部河流水电开发计划等等，都比较成功，取得了显著经济效益。

另外，如 60 年代，美国阿波罗登月计划从 1961 年至 1972 年，历时 11 年，参加研制的工程技术人员 42 万人，公司和工厂 2 万多家，大学、研究机构 120 所，使用 6000 多台计算机，耗资达 300 多亿美元，由美国航空航天局运用系统分析方法、计划评审技术顺利完成。又如，北欧跨国电网，其内部可调电网容量达 4500 万 kW 左右，电网中包括水电、火电和核电等各种能源形式，用系统工程方法协调解决了这个大系统的最优化。

从 60 年代初，我国华罗庚教授就大力推广“统筹法”和“优选法”。1970 年 10 月中旬中国系统工程协会成立。70 年代后期，我国在水利水电工程中推广、研究、应用系统工程出现了新局面，近 20 多年在应用研究的广度、理论方法的进展和创新方面，都取得了显著的效果，在我国水资源的开发利用、水力发电、灌溉排水、防洪除涝、供水和环境水利工程等各个方面都进行了研究和应用。如，水电站水库群优化调度数学模型及求解高维多库多目标随机优化技术，城市水资源规划，跨流域大型调水工程——南水北调系统分析，河流水质污染控制的优化模型研究，四川都江堰灌区集中调度的研究，汉江中下游防洪系统的实时调度动态规划模型，三峡、二滩、葛洲坝等大型水电站网络计划技术的理论研究和应用，施工过程模拟技术——二滩和龙滩水电站地下厂房洞室群施工系统分析，施工总平面布置最优问题研究，水利水电工程结构最优设计以及水利水电工程施工组织设计项目优化软件包的开发研究等等。其中有些项目成果达到了国际领先水平，实现了新的突破，经济效益十分显著。

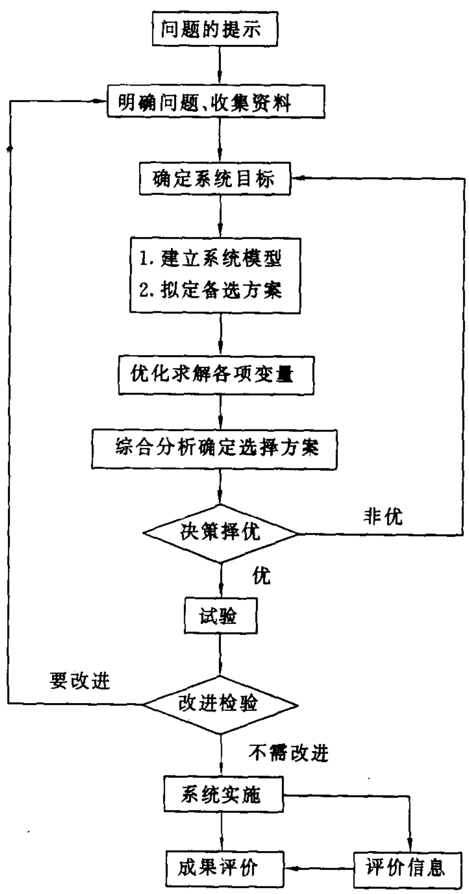

图 1-2 系统工程工作程序

随着我国水利水电建设的发展，水利水电系统规模更加庞大和复杂，因此将系统工程方法应用于水利水电建设中，有着广阔前景和

深远意义。

3. 系统工程的方法和程序

系统工程活动从规划到更新，按时间顺序可分为以下七个阶段：①规划阶段；②拟定方案阶段；③研制阶段；④生产阶段；⑤安装阶段；⑥运行阶段；⑦更新阶段。

对于上述各工作阶段，用系统工程来研究问题时，研究的逻辑思维方法和工作步骤基本相同。系统工程工作程序如图 1-2 所示。

图 1-2 所示工作步骤只是反映了系统问题研究的基本过程。在实际工作中，由于问题的复杂性和不确定性，上述七个步骤有时可合并，有时也可能在某些阶段上出现反复和修改。

第二节　系　统　分　析

一、系统分析的基本概念

系统工程有一套独特的思考方法，即系统分析和系统方法。系统分析是指对一个系统问题，从系统总体出发，在一定条件下，探索可能采取的方案，通过分析对比，选出最优方案，作为决策依据的方法。

系统分析是系统工程活动的核心和基础，是系统建造成败的关键。

系统分析的主要工具是电子计算机。系统分析的大量信息，通过计算机来处理。系统分析的主要方法是最优化方法，内容十分广泛。主要基础理论有运筹学、概率论、数理统计、模拟技术、图论、模糊数学和电子计算机技术等等。

一个系统往往由很多因素组成，各因素相互制约，且是动态变化的，因此在系统分析时，要处理好各种因素关系，并遵循下列原则：①外部条件与内部条件相结合；②当前利益和长远利益相结合；③局部效益与整体效益相结合；④定性分析与定量分析相结合；⑤注意客观性和协调性。

二、系统分析的步骤

系统分析是逻辑性很强的思维推理，其主要步骤如下：

1. 系统目的分析与确定

首先明确系统定义，搞清分析对象，明确目标。确定系统目标时应有总体和长远的观点，目标可行、鲜明，最好能定量表示。对系统应具备的功能、技术条件和环境约束进行分析，并量化表示。

2. 建立模型

建立模型是系统分析中的重要步骤。

模型（Model）是对实际事物本质属性的描述。系统模型可分为实体模型和抽象模型。例如水工试验中，坝体模型，就是把原型按比例缩小，属于实体模型；在系统分析中采用的是抽象模型，它是用数学符号、图形或计算机模型来描述系统，常用数学模型。

对模型的要求：①真实，能确切反映系统的客观实际；②简单明了，简化得当；③适应条件变化能力强。

通常数学模型由常数、参数、变量、函数关系四部分组成。其中函数关系描述模型的

各种常数、参数、变量间的相互关系。

建立的模型要既能反映实际又较简单，因此，需掌握大量信息、知识和实践，才能达到此要求。

3. 系统最优化

系统最优化是通过模型进行的。对不同模型，可以运用不同最优化理论和方法，分析各种对比方案，求出一个或几个优化方案。

最优化方法有规划论（线性规划、非线性规划、动态规划等）、决策论、排队论、存贮论和模拟技术、网络技术等。本书后面各章将介绍各种系统模型和优化方法。

4. 系统评价

根据最优化所得结果，用预定的评价标准作比较，综合考虑各种条件和因素，进行评价，选出比较满意的方案。

对系统进行评价是为了实现系统总体效果最佳，以最小的消耗获得最好的效果。

习题及思考题

1. 什么是系统？系统具有什么特征？
2. 系统工程的含义是什么？简述系统工程的工作程序。
3. 什么是系统分析？系统分析包含哪些主要步骤？

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第二章　线　性　规　划

线性规划（Linear Programming）是运筹学规划论的重要组成部分，是一种数学规划方法。它研究一定数量的资源，通过规划、安排和调度，求得最佳效果。

用规划方法求解问题，建立数学模型时，都需要建立一个目标函数——即进行优化的目标，有某些特定的限制条件——即约束条件。线性规划数学模型的目标函数为线性方程，其约束条件是用一组线性等式或不等式来表示。由于目标函数和约束条件都是决策变量的线性函数，因此称这种规划问题为线性规划问题。

线性规划从 30 年代末期开始研究，目前理论和方法都比较成熟，应用范围广泛。在水利水电工程建设中，许多规划、设计、施工和管理问题都可用此法来求解。例如，物资合理调运、土石方平衡、材料和半成品的运输、施工现场的生产组织、合理配料、水库运行、水质管理等问题。

第一节　应用实例和数学模型

一、应用实例

通过几个实例来说明线性规划问题和它们的数学模型。

【例 2-1】　水利工程公司预制混凝土构件厂，生产两种预应力混凝土构件。甲构件每件需用 20kg 钢丝，乙构件每件需用 30kg 钢丝，钢丝每日供应数量限为 1000kg，甲构件每件需 4 个锥形螺杆锚具，乙构件每件需 2 个同样锚具，锚具每日仅供应 120 个。甲构件每件可获纯利 6 元，乙构件每件获纯利 4 元，试问如何安排甲、乙构件的生产任务，才能使每日纯利最大？

解：设甲、乙构件每日生产数量为 X_1、X_2 件，以 Z 表示生产甲构件 X_1 件和生产乙构件 X_2 件所得纯利之和，则有

$$Z = 6X_1 + 4X_2$$

由锚具和钢丝日供应量限制，得出约束条件为

$$4X_1 + 2X_2 \leqslant 120$$

$$20X_1 + 30X_2 \leqslant 1000$$

$$X_1 \geqslant 0, X_2 \geqslant 0 \text{(生产构件不能为负，称为非负条件)}$$

求目标函数，即使日纯利收益最大，则目标函数为

$$\max Z = 6X_1 + 4X_2$$

【例 2-2】　某工地用租赁机械甲和乙来安装三种构件。已知机械甲每天能安装 A 构件 5 根、B 构件 8 根和 C 构件 10 根。机械乙每天能安装 A 构件 6 根、B 构件 6 根和 C 构件 20 根。而工程任务要求共安装 250 根 A 构件、300 根 B 构件和 700 根 C 构件。又知机械甲每

天的租赁费为 500 元，机械乙每天的租赁费为 650 元。试决定应租赁机械甲和乙各多少天，才能使总租赁费最少？

解：设租赁机械甲 X_1 天、机械乙 X_2 天。

为满足 A 构件、B 构件和 C 构件的安装需要，必须满足以下条件

$$5X_1 + 6X_2 \geqslant 250$$

$$8X_1 + 6X_2 \geqslant 300$$

$$10X_1 + 20X_2 \geqslant 700$$

此外，租赁天数 X_1 和 X_2 应非负，即应有

$$X_j \geqslant 0 \quad (j = 1,2)$$

以 Z 表示总租赁费，即

$$Z = 500X_1 + 650X_2$$

因此，该问题可表示为：

目标函数 $\min Z=500X_1+650X_2$

约束条件 $5X_1+6X_2\geqslant 250$

$8X_1+6X_2\geqslant 300$

$10X_1+20X_2\geqslant 700$

$X_j\geqslant 0 \quad (j=1,\ 2)$

【例 2-3】 某预制厂在制造混凝土预制板时需要甲、乙、丙三种尺寸的 ϕ9 钢筋各一根，甲、乙、丙要求是规格长度各为 2.9m、2.1m、1.5m，而这种钢筋的原料长度每根是 7.4m。现问，如果要制造 100 块预制板，最少要用多少根 ϕ9 钢筋？

解：先分析，一根钢筋的原材料截成所需的甲、乙、丙三种有多少种截法，这是一个长短搭配的问题。现在，把各种不同的截法列入表 2-1。

表 2-1 **钢筋原材料截法表**

截法序号	截 2.9m 根数（甲）	截 2.1m 根数（乙）	截 1.5m 根数（丙）	剩下料头尺寸 (m)
(1)	2	0	1	0.1
(2)	1	2	0	0.3
(3)	1	1	1	0.9
(4)	1	0	3	0
(5)	0	3	0	1.1
(6)	0	2	2	0.2
(7)	0	1	3	0.8
(8)	0	0	4	1.4

从表中可以看出，截取方式（7）、(8) 剩下料头太多，不合适；方式（4）和（1）较合适，但不能配套；必须同时考虑方式（2）、(3) 与其适当配合。问题是（1）、(2)、(3)、(4) 四种方式各截几根才能配成 100 套，使花费的原材料总根数最少？

设用方式（1）、（2）、（3）、（4）截取的根数各为 X_1、X_2、X_3、X_4。则从上表中可以看出，总计截出甲、乙、丙的根数为

甲（2.9m）的根数 $=2X_1+X_2+X_3+X_4$

乙（2.1m）的根数 $=2X_2+X_3$

丙（1.5m）的根数 $=X_1+X_3+3X_4$

为了配成 100 套，可以列出下列约束条件

$$2X_1+X_2+X_3+X_4=100$$
$$2X_2+X_3=100$$
$$X_1+X_3+3X_4=100$$
$$X_1,X_2,X_3,X_4\geqslant 0$$

方程组中的变数 X_1、X_2、X_3、X_4 是代表根数，必须是非负整数才有实际意义。

现在花费原材料的总根数为：

目标函数 $\min Z=X_1+X_2+X_3+X_4$

【例 2-4】 某部门在今后四年内考虑给下列项目投资：

项目 A，从第一至三年每年年初需要投资，并于次年末回收本利 115%；项目 B，第三年年初需要投资，到第四年年末能回收本利 125%，但规定最大投资额不超过 4 万元；项目 C，第二年年初需要投资，到第四年年末能回收本利 140%，但规定最大投资额不超过 3 万元；项目 D，每一年年初可投资，于当年年末回收本利 108%。

该部门现有资金 10 万元，要求使第四年年末拥有的资金的本利总额最大，确定这些项目每年的投资额。

解：这是一个连续投资问题，与时间有关。对它进行静态处理后，用线性规划方法解决。

设 X_{iA}、X_{iB}、X_{iC}、X_{iD}（$i=1, 2, 3, 4$）分别表示第 i 年年初给项目 A、B、C、D 的投资额。它们都是需要求解的变量。由给定条件，各项目的投资额如下：

A 项目：X_{1A}，X_{2A}，X_{3A}

B 项目：X_{3B}

C 项目：X_{2C}

D 项目：X_{1D}，X_{2D}，X_{3D}，X_{4D}

为使资金的本利总额最大，因此该部门每年应把资金全部投出去，即每年的投资额应等于该部门当年初拥有的资金额。于是，各年的投资额如下：

第一年，该部门年年初有 10 万元。所以有

$$X_{1A}+X_{1D}=10$$

第二年，A 项目第一年的投资要到第二年末才能回收。所以该部门在第二年年初拥有的资金额仅为项目 D 在第一年回收的本息 $108\%X_{1D}$，因此第二年的投资分配为

$$X_{2A}+X_{2C}+X_{2D}=1.08X_{1D}$$

第三年，第三年年初的投资金额为 A 项目第一年投资至第二年年末回收的本利及 D 项目第二年投资回收的本利总和。因此，第三年的投资分配为

$$X_{3A}+X_{3B}+X_{3D}=1.15X_{1A}+1.08X_{2D}$$

第四年，有

$$X_{4D}=1.15X_{2A}+1.08X_{3D}$$

此外，对项目 B、C 的投资限额约束，即

$$X_{3B}\leqslant 4$$

$$X_{2C}\leqslant 3$$

现要求第四年年末该部门拥有的资金额为最大，则其数学模型表示如下：

目标函数 $\quad \max Z=1.15X_{3A}+1.25X_{3B}+1.40X_{2C}+1.08X_{4D}$

$$\text{约束条件}\begin{cases} X_{1A}+X_{1D}=10 \\ -1.08X_{1D}+X_{2A}+X_{2X}+X_{2D}=0 \\ -1.15X_{1A}-1.08X_{2D}+X_{3A}+X_{3B}+X_{3D}=0 \\ -1.15X_{2A}-1.08X_{3D}+X_{4D}=0 \\ X_{3B}\leqslant 4 \\ X_{2C}\leqslant 3 \\ X_{iA},X_{iB},X_{iC},X_{iD}\geqslant 0,\quad i=1,2,3,4 \end{cases}$$

二、线性规划的数学模型

由以上几个例子，可看出线性规划的数学模型共同特征是：①决策变量表示某可变因素，决策变量的一组取值表示某一方案，通常要求这些变量取非负值；②有一个待优化的线性目标函数；③由问题本身限制条件决定线性约束方程组。

线性规划问题的数学模型一般可表述为，求解一组变量 X_1，X_2，…，X_n，使其满足约束条件

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}X_1+a_{12}X_2+\cdots+a_{1n}X_n\leqslant(\text{或}=\text{、或}\geqslant)b_1 \\ &a_{21}X_1+a_{22}X_2+\cdots+a_{2n}X_n\leqslant(\text{或}=\text{、或}\geqslant)b_2 \\ &\qquad\vdots \\ &a_{m1}X_1+a_{m2}X_2+\cdots+a_{mn}X_n\leqslant(\text{或}=\text{、或}\geqslant)b_m \\ &X_j\geqslant 0\quad(j=1,2,\cdots,n) \end{aligned}\right\} \tag{2-1}$$

使得目标函数取极大值或极小值，即

$$\max(\text{或}\min)Z=c_1X_1+c_2X_2+\cdots+c_nX_n \tag{2-2}$$

式中 X_j ——求解的决策变量，又称结构变量，$j=1$，2，…，n；

a_{ij} ——结构系数，$i=1$，2，…，m；$j=1$，2，…，n；

b_i ——常数，又称限制条件，$i=1$，2，…，m；

c_j ——费用系数，$j=1$，2，…，n。

由矩阵表示上述线性规划模型可以写成以下形式

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{AX}\leqslant(\text{或}=\text{、或}\geqslant)\boldsymbol{B} \\ &\boldsymbol{X}\geqslant 0 \end{aligned}\right\} \tag{2-3}$$

$$\max(\text{或}\min)Z=\boldsymbol{CX} \tag{2-4}$$

式中　$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$

$B=(b_1, b_2, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}}$

$C=(c_1, c_2, \cdots, c_n)$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn} \end{bmatrix}$$

也可表示为

$$\max(\text{或}\min)Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant (\text{或} =、\text{或} \geqslant) b_i \quad (i=1,2,\cdots,m) \\ x_j \geqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

三、线性规划问题的标准型式

由前述可知，线性规划问题有各种不同型式，为便于求解，需统一变换为标准型式，线性规划问题的标准型式为

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{2-5}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ X_j \geqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots,n) \end{aligned}\right\} \tag{2-6}$$

式中　m ——独立方程个数，又称线性规划的阶数；

n ——决策变量数，又称线性规划的维数，要求 $m<n$；

$a_{ij}、b_i、c_j$ ——意义同前，它们均为任意实数，其中 b_i 应是正数。

线性规划问题的标准型式的矩阵表示为

$$\max Z = \boldsymbol{CX} \tag{2-7}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{X} \geqslant 0 \end{cases} \tag{2-8}$$

式中符号意义同前。

实际遇到各种线性规划问题的数学模型都应变换为标准型式后求解，下面分述变换标准型的方法。

（1）目标函数可以极大化也可极小化。若要求极小化时，即 $\min Z=\boldsymbol{CX}$，可将该目标函数乘以“-1”，然后按极大化求解。如上式，令 $U=-Z$，即得 $\max U=-\boldsymbol{CX}$，就化为标准型的目标函数了。

（2）约束条件为不等式，可分为两种情况。当约束条件为“$\leqslant$”不等式，则可在不等式左端加上一个非负松弛变量，把约束条件变为等式；当约束条件为“$\geqslant$”不等式，则在不等式的左端减去一个非负剩余变量（也可称松弛变量）。

(3) 在实际情况中，有些变量无非负限制，如代表气温的变量，可能为正、零或负。对符号不受限制的变量，可以用两个非负变量之差来代替。如变量 x_j 的符号不定，则可将其化为 $x_j=x_j^+-x_j^-$，这里 $x_j^+\geqslant 0$，$x_j^-\geqslant 0$，显然 x_j 的正负决定于 x_j^+ 和 x_j^- 的相对大小。

【例 2-5】 将下面线性规划问题化为标准型

$$\min Z = 4X_1 - X_2$$

$$\begin{cases} X_1 + 4X_2 \leqslant 9 \\ 2X_1 - X_2 \geqslant 3 \\ X_1 \geqslant 0, X_2 \text{ 为无约束} \end{cases}$$

解：步骤为：

(1) 用 X_3-X_4 替换 X_2，其中 X_3，$X_4\geqslant 0$。

(2) 在第一个约束条件“$\leqslant$”号左端加入松弛变量 X_5。

(3) 在第二个约束条件“$\geqslant$”号左端减去剩余变量 X_6。

(4) 令 $U=-Z$，把求 $\min Z$ 改为求 $\max U$，即可得到该问题的标准型

$$\max U = -4X_1 + (X_3 - X_4) + 0X_5 + 0X_6$$

$$\begin{cases} X_1 + 4(X_3 - X_4) + X_5 = 9 \\ 2X_1 - (X_3 - X_4) - X_6 = 3 \\ X_1, X_3, X_4, X_5, X_6 \geqslant 0 \end{cases}$$

第二节　二维问题的图解法

一个线性规划问题只含有两个决策变量，即为二维问题，可用图解法求解。下面以一例说明。

【例 2-6】 某工厂一天可用设备台数为 12 台时，材料为 10kg，已知生产产品 Ⅰ 和 Ⅱ 一件所需台时数、材料消耗及净收益见表 2-2。

问如何安排生产使该厂的获利最大？

表 2-2　每件产品所需台时数、材料消耗及净收益表

项　目	产　品　Ⅰ	产　品　Ⅱ
设　备	4 台时/件	2 台时/件
材料消耗	2kg/件	3kg/件
产品净收益	3 元/件	2 元/件

解：

(1)设 X_1 为甲产品每天生产件数，X_2 为乙产品每天生产件数。则：

目标函数为

$$\max Z = 3X_1 + 2X_2$$

约束条件

$$\begin{cases} 4X_1 + 2X_2 \leqslant 12 \\ 2X_1 + 3X_2 \leqslant 10 \\ X_1, X_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(2) 建立直角坐标系，画出 $4X_1+2X_2=12$ 的直线 AC，满足 $4X_1+2X_2\leqslant 12$ 的区域在 AC 直线（含此直线）的下半平面上。同样方法画出直线 DE，满足 $2X_1+3X_2\leqslant 10$ 的区域在

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com