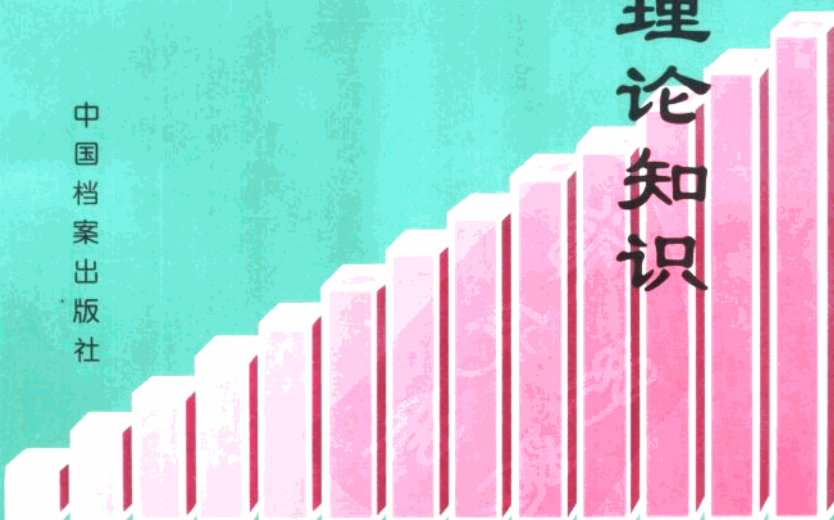
XIAOXUE
JIAOYUJICHU
LILUNZHISHI

小学教育基础理论知识

陶秀英／主编



中国档案出版社

陶秀英　主编

小学教育基础理论知识

小学数学基础研究分册

于西昌　王善臣　编著

中国档案出版社

图书在版编目(CIP)数据

小学教育基础理论知识/陶秀英主编,—北京:中国档案出版社,2001.5

ISBN 8-80166-075-7

I.小.. Ⅱ.陶... Ⅲ.初等教育-教学理论-师资培训-教材

Ⅳ.G620

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 20954 号

小学教育基础理论知识

中国档案出版社出版

(北京西城丰盛胡同 21 号)

新华书店总经销

聊城市兴华印刷有限公司印刷

2001 年 5 月第 1 版　　2001 年 5 月第一次印刷

32 开本:850×1168 毫米 1/32　　印张:9.375

字数:235 千字　　印数:1—2000 册

总定价:68 元

序

21 世纪是充满机遇和挑战的世纪,在新的世纪里,竞争更加激烈,社会对人的素质要求更高。提高人的素质关键在教育,振兴教育的关键在教师。只有造就一支高素质的教师队伍,才能满足 21 世纪教育发展的要求。

为贯彻落实国务院《面向 21 世纪教育振兴行动计划》和《山东省中小学教师培训“九五”计划和 2010 年发展规划》提出的到 2010 年小学教师全部达到专科学历这一发展规划,聊城市教委决定实施“园丁工程”,对我市小学教师分批分期进行专科学历培训。结合我市小学教师业务现状,根据 1998 年 6 月教育部师范教育司制定并印发的《中小学教师继续教育课程开发指南》,我们组织了聊城职业技术学院等单位的专家学者编写了这套我市小学教育专科学历培训系列教材。全书共有 7 册,第一册为《小学语文教学法》,第二册为《实用基础英语》,第三册为《中国历史简编》,第四册为《自然科学基础》,第五册为《小学数学基础研究》,第六册为《现代教育技术基础》,第七册为《多媒体课件制作》。

在教材的编写过程中,我们认真吸取了全国各地开展小学教师继续教育的宝贵经验,坚持从小学教师队伍建设的需要和小学教学的实际出发,力求反映先进的教育思想、教育理论,反映最新的学科知识发展动态、教育教学改革实践和研究成果;反映现代教育技术和先进教学方法,在确保科学性的前提下,进一步突出了教材内容的针对性、实用

性、先进性和时代性。

在编审定稿中，由于时间仓促，加之小学教师专科学历培训尚处在起步阶段，对此我们缺乏足够的经验。书中缺点错误在所难免，恳请广大读者不吝赐教。

在编写过程中得到了中国档案出版社的鼎力相助，并参阅和吸取专家同行的科研成果，在此表示衷心的感谢。

陶秀英

2001 年 4 月

前　言

为适应小学数学新大纲的教学要求,满足教师研究的需要,提高小学数学教师的教学能力,我们编写了《小学数学基础研究》一书。该书的特点:一、介绍了有关小学数学的一些数学史,便于理解数学的发展规律和进步思想。二、对知识点给予归纳整理,使知识系统化、理论化,为小学数学的研究提供理论依据。三、强调了解决数学问题的思考过程和分析、解决问题的方法,以便大家拓宽研究问题的思路,丰富教学构思和手段。四、重视了思维创新,通过开放题、多解题、探索题等构想与分析,激发师生求知欲和潜在内能,培养其创新思维和实践能力。这也是实施素质教育需着力解决的重点。五、贯穿着数学思想。教师通过观察、操作、猜测、分析、归纳和整理等形式,逐渐理解数学问题的提出、形成、结论获得和知识的应用,从而培养探索性、思考性和创新性等数学思想,这也是数学的根本思想,也是本书的主旨所在。

本书编写仓促,不当之处,请指正。本书1—11章是由于西昌编写,12—17章是由王善臣编写。

编　者

2001年4月

绪　论

一、关于代数学的几个历史观点

小学数学是数学学科的基础，是代数学的重要组成部分；代数学的一些性质及运算法则不仅适合小学数学，而且为小学数学的研究提供理论依据。在这里讨论代数学的几个观点，其目的就是了解数学的发展历程，探索先人的数学思想，掌握数学发展的规律，指导数学的学习。

“代数学”一词，来自拉丁文 algebra，它又是从阿拉伯文变来的。1859 年，我国清代数学家李善兰把“algebra”译成代数学，以表达这门学科用字母代表数的特点。这就是汉语“代数”一词的来源。

代数学的最早起源可以追溯到公元前 1800 年左右，那个时代的巴比伦数学文献里已含有二次方程和某些很特殊的三次方程。从那时起一直到公元 15 世纪的三千多年里，中国、印度、阿拉伯和欧洲都在不同的方面对代数学的发展作出了贡献。现代意义下的代数学，则产生于 16 世纪至 17 世纪初，当时欧洲正处于文艺复兴时期，科学技术得到了极大发展，使人们逐渐认识到了代数方法的重要性。

随着科学的进步及历史的发展，代数学大致经历了初等代数的形成与完善、高等代数的创建与发展、抽象代数的产生与建立三个阶段。在代数学的不同发展时期及所解决问题的不同，代数学作为一门学科，它所起的作用是不同的。

1. 代数学是研究方程解法和字母运算的科学

“代数学”一词起源于阿尔·花拉子米的数学著作。阿尔·花拉子米(AL－Khowariymi780—约 850 年)是阿拉伯数学史初最重要的代表人物。公元 830 年左右，他从印度回国后著了一本《代数学》，他引入了“移项、对消、化简”等算法之后，方程的概念才逐渐明确起来，因此《代数学》也可以看成“方程的科学”。不过在这本书中，还完全没

有代数符号,一切算法都用文字语言来表达。

代数上的最大进步是引用了较好的符号体系。事实上,采取了这一体系,代数才有可能成为一门科学。韦达是第一位有意识地、系统地使用字母,从而使符号代数得以初步形成的数学家,他不仅用字母表示未知量和未知量的乘幂,而且用来表示一般式和系数。韦达认为,代数是施行于事物的类或形式的运算方法,算术只是同数打交道的。这样,代数就一下子成为研究一般类型的形式和方程的科学了。

继韦达(Viete, 1540—1603, 法国数学家)之后,数学家笛卡儿(Descartes, Rene, 1596—1650, 法国数学家)关于代数学提出了一个深远的观点。他把代数看成是进行推理—特别是对抽象的和未知的量进行推理——的有力方法。他认为代数是逻辑的引伸,是处理量的一门很有用的科学。

笛卡儿虽然没有创造出他所想象的代数学,但他毕竟是第一个提出科学的代数学的含义的人,以后的历史事实完全证实了这一点。

使用字母代数学,不仅便于研究方程解法,而且由字母和数构成的代数式,是研究数学理论和表达科学规律的极其有用的工具。经过笛卡儿和牛顿(Isaac Newton 1642—1727,英国物理学家、数学家、天文学家)等人的改进,代数符号进一步完善。1768 年,欧拉(Euler, leonhard, 1707—1783)发表《对代数的完整的介绍》,系统地论述了方程理论和其它代数知识,这部著作表明初等代数已经完全形成了。

从韦达到欧拉时代的数学家,基本上认为代数学是研究方程解法和字母运算的科学,这正是初等代数的基本内容。

2. 代数学是研究多项式和线性代数的科学

17 世纪以来,随着方程特别是低次方程的根式问题的圆满解决,人们开始从两个方向进行研究。一个是多项式理论,虽然没有能解出高次方程的具体根,但完成了方程根的基本理论——特别是证明了一元 n 次方程有 n 个根和方程近似根的较好解法;另一个是线性方程组的研究,由克莱姆法则理论开始,经过近代行列式理论、矩

阵理论的不断创建和发展，线性代数到了19世纪末期逐渐建立起来。在数学家们看来，代数学是研究多项式和线性代数的科学。

这里所指的代数学就是现在所说的《高等代数》。

3. 代数学是研究各种代数结构的科学

19世纪初，一般代数方程的根式求解问题导致了群的结构的研究。阿贝尔(Abel, Niels Henrik 1802—1829 挪威数学家)首先证明了一般五次方程不可能用根式求解；伽罗瓦(Evariste Galois 1811—1832 法国数学家)则进一步得到了代数方程能用根式求解的充要条件是同构群可解，并创建了伽罗瓦理论，他引进了群和域的概念，为抽象代数的产生奠定了基础。19世纪后期，在若尔当、克莱因等人努力下，抽象代数理论得到了快速发展，到了20世纪前期，在女数学家诺特的研究下，抽象代数逐渐成熟起来了。

群论的出现，对于整个数学有着重大的意义。随着群论的发展，代数这门科学开始在力学、物理学、光学以及数学本身找到了越来越多的研究对象，如向量、矩阵、张量、格、线性空间等。

抽象代数是在数学严格化、公理化和抽象化的思想下形成及发展的，其研究对象不再是多项式、方程，而是群、环、域、格、布尔代数、线性空间等多种代数结构。代数学从古典代数以方程为中心转变为以研究各种代数结构的性质为中心。

这时的代数学就是指的现在的抽象代数或近世代数。

二、作为教学科目的小学数学

作为教学科目的小学数学与作为一门科学的代数学就其性质、内容以及在内容方面的广度和深度来说，都有着显著的差别。近年来，我国小学数学的基本内容作了不少改革，特别是渗透了集合、函数等现代数学思想，同时也保留了传统教材的精华部分。小学数学教材的内容很庞杂，涉及到了数学的许多分支，主要包含以下几个方面：

1. 数学的概念及发展

从小学开始学习自然数，以后逐步引入负数，扩展到有理数，接

着引入无理数，把数集进一步扩展到实数。对数的学习及认识多集中在某一数集的各种代数性质及运算上，很少涉及到现代数学的那种抽象思想。对于数的学习是小学数学的核心内容。

2. 解析式的恒等变形

主要学习数、式的基本概念、基本运算和恒等变换。小学阶段首先学习数的概念及运算；初中阶段主要学习整式、分式、根式和因式分解等。从性质上来看，小学中的“数”实际上是“式”的一种特殊情况，式的范围更为广泛，更为一般。

3. 方程

主要学习一元一次方程的解法。随着数和式的扩展及认识的进一步加深，由浅及深地重点学习一元一次方程的性质及一般规律，从而为后继学习简单的一元二次方程，二元一次方程打下良好的知识基础。一元一次方程是生活中很有用的解决问题的方法，也是建立数量之间关系、呈现事物联系的一种媒体。一元一次方程是学习方程的基础。

4. 不等式

无论比较大小还是估算，这都属于不等式的内容。在小学教材中虽然没有不等式的性质和解法，但在具体解决问题时仍需这种思想。不等式主要包括一元一次不等式(组)、一元二次不等式和简单的绝对值不等式。不等式问题的难度大，抽象性强，学生在学习中一定难度不小，教师要注意学生思维能力的培养。

5. 函数

在小数阶段学生已从感性认识开始接触到了函数。函数概念比较抽象，它已经渗透了集合、对应等现代数学思想。只是由于小学生认识能力低，没有讲解出来，教材是采用了数与形相结合的处理办法。不过它在中学代数中占有很重要的地位。

三、小学数学教学内容的层次、思想及方法

1. 小学数学教学内容从总体上可以分为两个层次：一个称为表层知识，另一个称为深层知识。表层知识包括概念、性质、法则、公

式、公理、定理等数学的基本知识和基本技能，深层知识主要指数学思想和数学方法.

表层知识与深层知识是辩证统一的关系。表层知识是深层知识的基础，是教学大纲中明确规定的，教材中明确给出的，以及具有较强操作性的知识。学生只有通过对教材的学习，在掌握和理解了一定的表层知识后，才能进一步学习和领悟相关的深层知识。深层知识蕴含于表层知识之中，是数学的精髓，它支撑和统帅着表层知识。教师必须在讲授表层知识的过程中不断地渗透相关的深层知识，让学生在掌握表层知识的同时，领悟到深层知识，才能使学生的表层知识达到一个质的"飞跃"，从而使学生增强想象力和创造力。

2.数学思想是分析、处理和解决数学问题的根本想法，是对数学规律的理性认识。由于小学生认知能力和小学数学教学内容的限制，只能将部分重要的数学思想落实到数学教学过程中，而对有些数学思想不宜要求过高。在小学阶段通过学生的观察、操作、猜测、分析、归纳和整理等形式，使学生理解数学问题的提出、数学问题的形成、数学结论的获得、数学知识的应用，从而培养学生的探索性、思考性和创新性等数学思想。

3.数学方法是分析、处理和解决数学问题的策略，这些策略与人们的数学知识、经验以及数学思想掌握情况密切相关。应重视以下数学方法：数形结合法、变换法等。

四、小学数学符号系统

小学数学内容是数学学科的基础部分。现将小学数学中经常出现的数学符号加以分类说明。

1. 通用符号：

(1) 对象符号：数字，圆周率 π，自然对数 e，常数 a, b, c…，变数(未知数)x、y、z…，度分秒"°′″"等等。

(2) 运算符号：

加 ＋，乘方 $a^n(n\in N)$，

减 －，开方$\sqrt[n]{a}$ ($n\in N$，当为偶数时，$a\geqslant 0$)，

乘 × 或 ·，

除 ÷，乘方、开方混合运算，

比：，$\sqrt[n]{a^m}$ ($n, m \in N$，n 为偶数；m 为奇数时，$a \geq 0$)。

(3) 关系符号：

相等 =，约等于 ≈，

不相等 ≠，不小于 ≥，

大于 >，不大于 ≤，

小于 <，推出 ⇒，

不小(大)于 ≮(≯)，等价 ⇔。

(4) 其它符号：

小括号 ( )，　　中括号 [ ]，

大括号 { }，　　因为 ∵，

百分号 %，　　所以 ∴。

2. 代数中的符号：

(1) 对象符号：

实数的绝对值 $|a|$；自然数集 N；整数集 Z；有理数集 Q；实数 R；复数集 C；正实数 R^+；负实数 R^-。

(2)关系符号：

恒等≡，不恒等≢。

对于数学符号的运用，要注意以下几个方面：首先要正确理解每个符号的真实含义、使用的条件，会读、会用，能"翻译"成普通语言，其次是对于有几种含义的符号要区别出不同场合下的用法及读法，最后要注意充分发挥数学符号的作用，为今后学习打下良好的基础。

3. 部分数学符号的起源

"+"号是由拉丁文"et"("和"的意思)演变而来的。十六世纪，意大利科学家塔塔里亚用意大利文"più"(加的意思)的第一个字母表示加，草写为"μ"，最后变成了"+"号。

"−"号是从拉丁文"minus"("减"的意思)演变而来的，简写 m，再省略掉字母，就成了"−"了。

+，- 号表示加减和正负，首先出现在 15 世纪德国数学家的著作中，并得以正式确定。

乘号曾经用过十几种，现在通用三种。第一种是“×”，是英国数学家奥屈特 1631 年提出的；第二种是“·”，最早是英国数学家赫锐奥特创造的；第三种是“＊”号，1698 年首先出现在德国数学家莱布尼茨的著作中，他自己还提出用“π”表示相乘。

“÷”最初作为减号，在欧洲大陆长期流行。直到 1631 年英国数学家奥屈特用“:”表示除或比，另外有人用“－”(除线)表示除。后来瑞士数学家拉哈在他所著的《代数学》里，正式将“÷”作为除号。

十六世纪法国数学家维叶特用“＝”表示两个量的差别。可是英国牛津大学数学、修辞学教授列考尔德觉得，用两条平行而又相等的直线来表示两数相等是最合适不过的了，于是等于符号“＝”就从 1540 年开始使用起来。

十七世纪德国莱布尼茨广泛使用了“＝”号，他还在几何学中用“∽”表示相似，用“≌”表示全等。

大于号“＞”和小于号“＜”，是 1631 年英国著名代数学家赫锐奥特创用。至于“≯”、“≮”、“≠”这三个符号的出现，是很晚很晚的事了。大括号“{ }”和中括号“[ ]”是代数创始人之一魏治德创造的。

五、代数概念

小学数学这门课程的内容非常庞大繁杂，涉及到数学中的算术、代数、三角、分析、概率等好几个数学的分支。就代数概念系统来说，是以数、式为二条线展开的。

1．数的概念

以小学的算术数(自然数、零、正分数)为基础，从表达实际需要，定义了正负数的概念，接着定义了正整数和负整数、正分数和负分数，然后用外延定义法定义了整数和有理数。

从乘方的逆运算——开方，引出方根、二次方根，进而定义了“算术根”这个重要概念。由于有时开方开不尽，定义了无限不循环小数，进而定义了无理数，又定义了实数。

附：概念系统表：

$$
\text{数}\begin{cases}
\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{正整数}\\\text{零}\\\text{负整数}\end{array}\right\}\text{整数}\\\text{(正负)分数}\end{array}\right\}\text{有理数}\\
\text{方根}\rightarrow\text{算术根}\\
\downarrow\\
\text{无限不循环小数}\rightarrow\text{无理数}
\end{array}\right\}\text{实数}\\
\text{虚数单位 } i\longrightarrow\text{复数}\rightarrow\text{虚数}\rightarrow\text{纯虚数}
\end{cases}
$$

2. 关于式的概念

教材以“式子”作为定义的基本概念，以加、减、乘、除、乘方等已知运算为出发点，首先定义了“代数式”的概念，后又分层次定义了有理式、根式；整式、分式；单项式、多项式等。

与此平行，在定义“等式”之后，定义了方程及其他概念——一元一次方程、二元一次方程等。

附式的系统表：

$$
\text{式}\begin{cases}
\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\rightarrow\text{单项式}\rightarrow\text{多项式}\\\text{分式}\end{cases}\\\text{根式}\rightarrow\text{二次根式}\end{cases}\\
\text{等式}\rightarrow\text{方程}\begin{cases}\text{一元一次方程}\\\text{二元一次方程(组)}\\\text{一元二次方程}\\\text{二元二次程(组)}\end{cases}\\
\downarrow\\
\text{恒等式}\\
\downarrow\\
\text{不等式}\rightarrow\text{一元一次不等式(组)}
\end{cases}
$$

六、中小学几何学史略

几何学，英文 Geometry，是由希腊文 Geometria 一词演变而来，而

按 Geometria 的词义分析，Geó 的含义是"地"，metria 的含义是"量"，合起来可译为"测地术"。据公元前四世纪古希腊学者欧德草认为：几何学原为埃及人开创。由于古埃及的尼罗河河水泛滥，经常把埃及人的土地边界线冲掉，致使埃及人每年都要进行一次土地测量，于是埃及人便逐渐形成一种专门的测地技术，称为"测地术"。这种技术流传到希腊，希腊人也持同样的认识，所以"几何"的原意是"测地术"。

中文名称"几何"是在 1607 年由中国古代著名数学家徐光启(1562——1633)在翻译欧几里德的《几何原本》前六卷时首先提出的。

几何学的发展大致分四个时期：

第一个时期是萌芽时期，它包括几何作为一门独立的学科之前的整个历史阶段。这一时期是个漫长的时期，约在远古的公元前六世纪。这一时期的特征是人们从生活、生产的实践中不断积累并逐步地产生了对几何的对象的简单叙述，并形成了图形、几何命题及证明的概念。这个历史时期是由埃及、巴比伦、中国和希腊等许多国家所开创的，并在希腊得到了较大的发展。

第二个时期是独立的几何学形成时期，早在公元前五世纪古希腊数学家希波克拉底(Hippocrates)等人就作过几何学的系统表述。不过，对后世影响最大的，作为独立的几何学出现的标志应是公元前三世纪问世的欧几里德的《几何原本》，这本书不仅完整地确立了现在几何学的大部分内容，而且它的几何学所建立的基本原则，对后来的几何学乃至整个数学的发展都有重大的影响。

第三个时期是几何学新方法的蓬勃开创时期，笛卡尔的解析几何把代数方法引进了几何学，使几何的表达能力和解决问题的能力都大大提高了，也扩大了几何学的研究范围。十八世纪产生了微分几何、射影几何、画法几何等等，这些都超出了中学几何的范围，这里就不再叙述。

第四个时期是几何学的革命时期。这一时期的主要标志是罗巴切夫斯基(Lobachevsky，1792——1856)几何学的产生。

前两个时期，我国几何学是独立发展的。我国不仅积累了丰富的

几何知识，而且有独立特色的几何理论与体系。十七世纪后，随着西方数学的传入，这种传统体系才逐渐与西方几何融为一体，成为整个几何学的一个有机部分。

七、几何学简介

1.欧氏几何及《几何原本》

在巴比伦、埃及人积累大量几何知识的基础上，经过希腊人泰勒斯(Thales，约公元前625——547)，毕达哥拉斯(Pythagoras，约公元前580——公元前500年)，柏拉图(Plato约公元前430——349)，欧多克斯，亚里士多德(Aristotle公元前384——前322年)等人的努力，由欧几里德在公元三世纪，集前人数学研究之大成，完成了数学巨著《几何原本》。它以当时无与伦比的优点取代了以前所有的几何课本。就在今天，各国中学几何课的主要内容也是来自《几何原本》。在希腊之前的漫长年代里，人们的几何知识还处于零散的，互不联系的状态中。而欧几里德在《几何原本》中，由定义、公理和公设出发，从简到繁，有条不紊地陈述了一系列定理，对前人证明不够严密的所有定理都给出了论证，它对数学能在严密推理中不断发展有极其深远的影响。《几何原本》的表现形式被称为公理的形式，这种形式已成为现代数学的原型，这种公理化的方法在今天已渗透于数学的各个领域。

《几何原本》的内容除了几何以外还有初等数论及初等代数知识，这部书有13卷，共计465个命题，中学几何的大部分内容主要来自这里，现将有关的重要内容介绍如下：

第一卷是从定义、公设和公理开始，叙述了48个命题，讨论了三角形的性质，包括三角形的全等定理；还有平行线理论；三角形三个内角之和等于两个直角；毕氏定理及逆定理，这一卷是由早期毕氏学派的成果发展而成的。

第二卷有14个命题。在这一卷中，有被我们称之为余弦定理的内容；还有“黄金分割”问题。

第三卷有39个命题。包括中学课本中许多关于圆、弦、割线、切线及有关角的度量的定理。

第四卷有 16 个命题。讨论了用直尺和圆规作正三角形、正四、五、六和十五边形的问题。

第五卷是比例论。

第六卷是比例论用于平面几何，其中有：关于相似三角形以及比例第三项，比例第四项和比例中项的作图的基本定理；三角形的一个角的平分线分其边为两线段，这两线段之比等于另两边之比；毕氏定理的推广，其中以直角三角形三边上的相似形代替正方形，及许多其它定理。

第七、八、九卷讲的是初等数论。

第十卷讲的是无理数。

第十一、十二、十三卷讲的是立体几何，其中大部分是现行中学课本上的内容，关于空间中的直线和平面的定义、定理；关于平行六面体的定理；关于球体的论述及球的五种内接正多面体的作图法。

在中国，1607 年徐光启在传教士利马窦的协助下将《几何原本》的前六卷译成了中文，对中国的数学起了很大影响。徐光启是我国十六、十七世纪间著名的科学家，他对《几何原本》的逻辑结构称赞不已，评价很高。他说"此书四不必：不必疑，不必揣，不必试，不必改。有四个不可得：欲脱之不可得，欲驳之不可得，欲减之不可得，欲前后更置之不可得。"这足以说明《几何原本》对我国几何学，乃至整个数学的影响。

2.解析几何

从数学是研究自然的有力工具这一数学观出发，必然导致数学方法论的变化，由于社会经济关系及科学技术的需要，促使人们研究一种新的数学方法——具有一般地，普遍意义的数学方法。这就是解析几何的产生。

费马的解析几何，在笛卡尔的《几何学》发表以前(或同时)费马已提出了研究曲线问题的一般方法。费马认为：要给予轨迹以一般表示，只能借助于代数。他了解韦达的用代数解决几何的方法，他打算把阿波罗尼奥斯的结果直接翻译成代数形式。他的研究方法是从方