分形动力学

董连科 编著

GLIXUE

出版社

分形动力学

董连科　编著

辽宁科学技术出版社

(辽)新登字4号

图书在版编目(CIP)数据

分形动力学/董连科编著.—沈阳：辽宁科学技术出版社，1994.11
ISBN 7-5381-2075-0

Ⅰ.分…
Ⅱ.董…
Ⅲ.分形动力学-分析动力学
Ⅳ.①O19 ②O322

中国版本图书馆CIP数据核字(94)第04756号

辽 宁 科 学 技 术 出 版 社 出 版
(沈阳市和平区北一马路108号 邮政编码110001)
辽宁省新华书店发行　　建平书刊印刷厂印刷

开本:850×1168 1/32　印张:12¾　字数:320,000　插页:4
1994年11月第1版　　1994年11月第1次印刷

责任编辑:纯 智　　版式设计:李 夏
装帧设计:君 文　　责任校对:赵淑新
插　图:张 辉

印数:1—1,000　　定价:20.00元

内 容 简 介

分形动力学是非线性科学的一个分支。本书前两篇是研究分形动力学所需的预备知识和数学工具，后两篇为分形动力学理论与应用。

本书可供高年级大学生、研究生、高等学校教师和科学技术工作者学习或研究分形动力学时参考。

序　言

众所周知，早在本世纪初英国 Cambridge 大学的 Besicovitch 学派便开展了分数维集合的几何学研究[1]；时隔 50 余年之后，Mandelbrot 提出了分形的概念[2]。在数学上，它们用 Hausdorff 测度取代了欧氏测度，从而产生了测度观的转变，在人们还没有从已经习惯了的欧氏测度观念中解放出来之前，它给人们学习和研究分形带来许多困难。

从物理上看，规整的欧氏几何是牛顿力学的几何学，规整的非欧几何是爱因斯坦相对论的几何学，从平直时空向弯曲时空转变的第一次物理学革命，Lorentz 变换扮演着重要的作用。分形几何是复杂性科学的几何学，由于测度观的转变必将引起从整数型量纲数向分数型量纲数的转变，从整数维时空向分数维时空的转变。与第一次物理学革命相比，测度观转变必将产生更深刻的影响。因此，分形维数不仅具有确定的几何意义，而且还应具有深远的物理意义。

分形动力学是分形理论与分形应用研究的前沿课题，人们对它产生了极大的兴趣。在第一篇中，我们分析了分形的定义、分形维数的物理意义、γ-函数与 β-函数、有界变差函数与贝恩斯坦多项式，以便为分形动力学与解析数学工具提供预备知识。第二篇讲述了分数阶微积分、分数阶常微分方程与偏微分方程[3]。欧氏测度意义下的分数阶微积分，至少可以在随机分形动力学中得到应用。第三篇讲述分形动力学的解析理论、分形生长动力学与随机分形动

力学;分形动力学作为演化动力学的一部分,必须介绍系统的稳定性理论[1],根据分形维数的物理意义将Prigogien提出的热力学与动力学统一的问题化成一个耦合型的偏微分方程组。第四篇介绍了分形动力学的若干应用。

本书是按数学物理的体裁来选择与组织内容;为了克服因测度观转变给人们带来的困难,除了对书中的定理尽量给出证明外,还对一些重要概念与观念试图作出详细的分析或说明。但是,分形动力学这门学科还在继续发展之中,至今还未形成完备的理论体系,对内容的选择与取舍可能存在不妥之处、甚或错误,请读者提出批评指正。

在编写本书的过程中得到了屠礼勋副研究员的支持和王克钢博士的帮助,除了进行一些学术上的讨论之外,王克钢博士还帮助提供了一些参考资料;辽宁科学技术出版社、特别是宋纯智编辑对于本书的问世,付出了辛勤的劳动;为了保证我有充足的写作时间,我的夫人姚崇贤和女儿董晓丹不仅承担了大部分家务,而且还帮助抄写清稿。在此,对他(她)们一并表示感谢。

董连科

1992年11月于沈阳

目　录

第一篇　预备知识

第一章　分形理论

§1.1　欧氏空间与非欧空间

为了后文的需要，首先让我们引进欧氏空间与非欧空间的概念，进而抽象出它们之间的共性与个性。

众所周知，在线性代数中曾引进过线性空间的概念。设集合 E 是我们研究对象的总体，如果在集合 E 内适当地定义加法'$\oplus$'与纯量乘法'·'两种代数运算，并且这两种代数运算满足封闭性条件(即 $x \oplus y \in E$ 与 $\alpha \cdot x \in E$)以及两种代数运算满足结合律、交换律与分配律，则称引进代数运算的集合 E 为线性空间。就是说，线性空间 E 只引进代数结构，则在线性空间 E 中还不能描述集合 E 的度量性质，如几何学问题与极限问题等。根据不同的需要在集合 E 中还可以引进不同的结构。

为了描述集合 E 的度量性质，可以在集合 E 内引进度量结构。设 x、y 是集合 E 内的任意两个元素，记作 $\forall\ x,y \in E$，并用 $d(x,y)$ 表示 x 与 y 间的距离，且满足以下的公理化条件：

M_1　$d(x,y) \geqslant 0$；　(1.1-1)

M_2　$d(x,y) = d(y,x)$；　(1.1-2)

M_3　如果，$d(x,y)=0$，则必有 $x=y$；

M_4　$\forall\ x,y,z \in E$，恒有

$$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z) \tag{1.1-3}$$

该不等式常叫作三角不等式。

称 $d(\cdot,\cdot)$ 为集合 E 的度量，条件 $M_1 \sim M_4$ 叫作度量结构的公理化条件，而称 (E,d) 为度量空间。

设 E 是一个线性空间，由线性代数可知，如果 E 有且仅有 n 个线性无关的元素，便称 E 是 n 维的，记作 E^n。这相当于说，在 E 上存在一个坐标系，使得 $\forall\ x \in E$，恒有 $x = (x^1, x^2, \cdots, x^n)$。

对于不同的 E，度量 d 的定义是不同的。如果，对于任意的 x，$y \in E^n$，我们定义

$$d(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{n} (y^i - x^i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1.1-4}$$

为欧氏度量(距离)。我们称赋予欧氏度量(1.1-4)的 n 维线性空间 E^n 为 n 维欧氏空间。

用弧长的微分改写(1.1-4)式，我们有

$$(ds)^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j \tag{1.1-5}$$

式中，使用了爱因斯坦的总和规约，并且

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, 当\ i = j \\ 0, 当\ i \neq j \end{cases}$$

是单位张量。如果，用 g_{ij} 表示空间的度规张量，且

$$(ds)^2 = g_{ij} dx^i dx^j \tag{1.1-6}$$

我们说(1.1-6)式定义一个非欧度量。同样地，我们称赋予非欧度量(1.1-6)的 n 维线性空间 E^n 为 n 维非欧空间。在非欧空间中，度规张量 g_{ij} 可以是时空坐标的函数，也可以是弧长或其它序参量的函数。当度规张量 g_{ij} 仅仅是时空坐标的函数时，我们称这样的非欧空间为黎曼(Riemann)空间，记作 R^n；其它的非欧空间记作 V^n。

欧氏空间与非欧空间中的几何对象，常以‘平直’和‘弯曲’的特征加以区分，前者以两点间的直线长度作为两点间的距离，而后者是以连结两点间的测地线(即最短的曲线)长度作为两点间的距

离，这是几何与极限问题的基础。

在欧氏空间与非欧空间中，对于规整几何图形而言，以 P、A 与 V 表示一维、二维与三维几何图形的长度、面积与体积，我们有

$$P=l,\quad A=l^2,\quad V=l^3$$

与

$$P=r,\quad A=\pi r^2,\quad V=\frac{4\pi}{3}r^3$$

统一写成

$$P=al,\quad A=bl^2,\quad V=cl^3, V_n=kl^n$$

式中，a、b、c 与 k 是常数（标量），V_n 是 n 维图形的超体积。由物理学中的量纲（Dimension）分析可知，这些几何量的量纲数分别为

$$[P]=1,\quad [A]=2,\quad [V]=3, [V_n]=n \qquad (1.1\text{-}7)$$

此式表明欧氏空间与非欧空间中几何图形都赋予一个正实数（称作几何图形的测度）时，这些几何量（测度）的量纲数不仅取整数值，而且恰好等于该几何图形的维数。所以，(1.1-7)式中的 n 具有维数（Dimensionality）与量纲（Dimension）数的双重意义。这是欧氏空间与非欧空间中规整几何图形所具有的共性。我们称这样的测度为欧氏测度。

但对于一些复杂的几何图形，如果依然用欧氏测度去测量，只能得到无穷大的结果，这表明对于非规整的几何图形（集合），内禀欧氏测度不存在。

§1.2　测度理论初步[1][5]

我们在上一节中，用(1.1-5)式与(1.1-6)式分别定义了欧氏空间与非欧空间中两点间的距离，它是度量 d 的特例。长度(P)、面积(A)、体积(V)与超体积(V_n)分别是一、二、三与 n 维几何图形的一种量度，将这些量度进行统一描述时，集函数 f(A) 扮演着重要的作用。

设 X 是给定的集合，且 $A\subset X$，集函数 $f(A)$ 取值于 $[0,\infty)$，它满足如下性质：

(1) $f(\Phi)=0$，Φ 是空集； (1.2-1)

(2) 如果 $A\subset A'$，则有

$$f(A)\leqslant f(A') \tag{1.2-2}$$

(3) 设 $\{A_j\}$ 是集合 X 的子集簇，则

$$f(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}f(A_j) \tag{1.2-3}$$

这三条性质是用集函数表示的长度、面积与体积的共性。

下面，我们借鉴上面的性质引进测度的概念，并给出一些重要的性质，以便为引进豪斯道夫(Hausdorff)测度作准备。

定义 1.2-1 我们说取值于 $[0,\infty)$ 上的集合 X 的集函数 μ 是外测度，如果

(1) $\mu(\Phi)=0$，当 Φ 是空集时； (1.2-4)

(2) $\mu(A)\leqslant\mu(A')$，当 $A\subset A'$； (1.2-5)

(3) 设 $\forall A_j\subset X(j=1,2,\cdots)$，则有

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_j) \tag{1.2-6}$$

定义 1.2-2 我们说集序列 $\{A_j\}(\forall A_j\subset X,j=1,2,\cdots)$ 是一个 σ-域，如果，

(1) 设 $A\subset X$，则余集 $CA\subset X$； (1.2-7)

(2) 设 $A_j\subset X(j=1,2,\cdots)$，则

$$\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j\subset X。 \tag{1.2-8}$$

上述两条性质表明，在取余运算与可数并运算下是封闭的。

因为，$\forall A_j\subset X$，我们有

$$C[\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j]=\bigcap_{j=1}^{\infty}CA_j。 \tag{1.2-9}$$

成立。于是，定义 1.2-2 可以改成如下的等价形式。

定义 1.2-3 我们说 X 的子集簇 $\Omega=\{A_j|A_j\subset X\}$ 是 σ-域，如果，

(1) 设 $A\subset X$，则 $CA\subset X$；

(2) 设$\forall\ A_j\subset X(j=1,2,\cdots)$，则有

$$\bigcap_{j=1}^{\infty}CA_j\subset X. \tag{1.2-10}$$

我们将由 X 的闭子集生成的 σ-域叫作波列尔(Borel)集。由(1.2-9)式可知，波列尔集含有以下三种集合：

(1) 开集，因为 $CA\subset\Omega$；

(2) 开集的可数并 F_σ-集。即设 $A_j(j=1,2,\cdots)$是开集，则

$$F_\sigma=\{\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j|A_j\subset X\}$$

(3) 开集的可数交 G_σ-集。即设 $A_j(j=1,2,\cdots)$是开集，则

$$G_\sigma=\{\bigcap_{j=1}^{\infty}A_j|A_j\subset X\}$$

定义 1.2-4 我们说取值于$[0,\infty)$上的集函数 μ 是集合 X 的测度。如果，

(1) $\mu(\Phi)=0$，当 Φ 是空集； (1.2-11)

(2) 设$\forall\ A_j\in\Omega(j=1,2,\cdots)$，则

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_j) \tag{1.2-12}$$

定义 1.2-5 我们说外测度 μ 是规整的，如果对于任意的集合 A，存在一个集合 $E\supset A$，使得

$$\mu(A)=\mu(E) \tag{1.2-13}$$

由(1.2-13)式可以得到

$$\mu(E\backslash A)=0 \tag{1.2-14}$$

这表明集合 E 与集合 A 的差集的外测度等于零。

外测度具有如下的连续性定理：

定理 1.2-1 设 μ 是 Ω 的测度，则有

(1) 如果，$E_i \subset E_j (i,j=1,2,\cdots 且\ i<j)$，则

$$\mu(\lim_{j\to\infty} E_j) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j) \tag{1.2-15}$$

成立。

(2) 如果，$E_i \supset E_j (i,j=1,2,\cdots,且\ i<j)$，则

$$\mu(\lim_{j\to\infty} E_j) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j) \tag{1.2-16}$$

成立。式中，$\mu(E_j) < +\infty$。

(3) 对于 Ω 中的任意集序列 $\{E_j\}$，则有

$$\mu(\varliminf_{j\to\infty} E_j) \leqslant (\varliminf_{j\to\infty} \mu E_j) \tag{1.2-17}$$

本定理的证明可参见[1]。

本定理说明，对于 Ω 中的集序列 $\{E_j\}$，性质(1)与(2)描述了单调上升与单调下降集序列的极限性质；而性质(3)则描述了任意集序列的极限性质。

定义 1.2-6 我们说 X 的子集 B 关于外测度 μ 是 μ-可测的，如果它分解 X 的任意子集 B 成可加的形式。即 $\forall\ B \subset X$，恒有

$$\mu(B) = \mu(B \cap E) + \mu(B \backslash E) \tag{1.2-18}$$

从测度论的观点看，当人们研究定义在集合 A 上的函数性质时，常常关心除去 A 的一个测度等于零的子集外的性质，比如说函数 $f(x)$ 于 A 上几乎处处连续，这表明存在一个子集 $B \subset A$ 且 $\mu(B)=0$，使得 $f(x)$ 于 $A \backslash B$ 上连续。

定理 1.2-2 如果，μ 是规整外测度，并且 $\{A_j\}$ 是任意的增加集序列，则有

$$\mu(\lim_{j\to\infty} A_j) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j) \tag{1.2-19}$$

证明 选择 μ-可测集 E_j，使得 $E_j \supset A_j$，且 $\mu(E_j) = \mu(A_j)$，对于任意的 j，应用外测度定义中的(1.2-5)式和定理 1.2-1 中的性质(3)，我们有