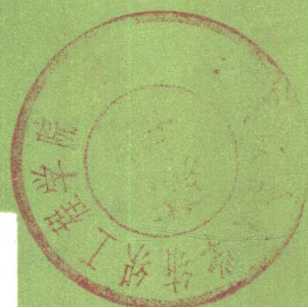
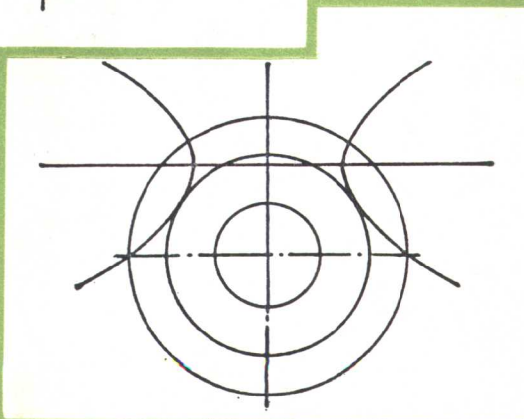
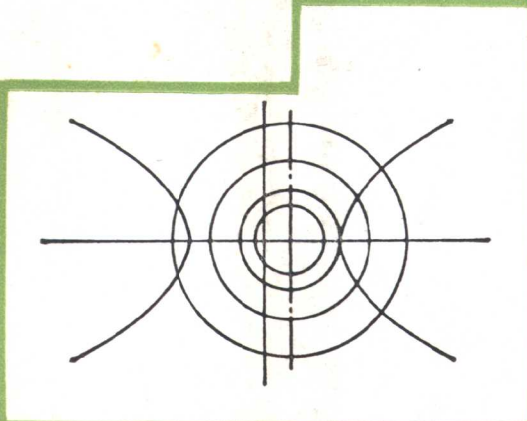
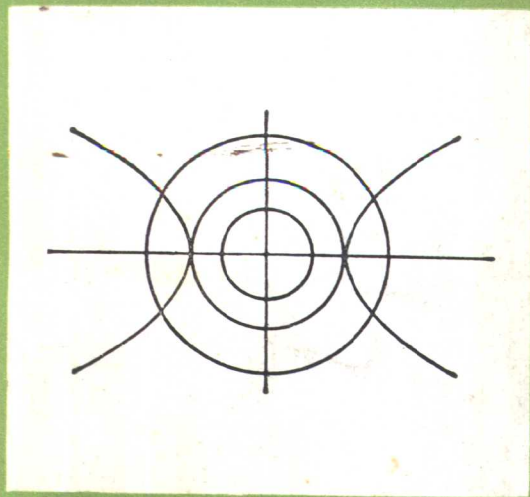


高等学校教学参考书

画法几何的给题条件与解题方法

卓守鹏



高等教育出版社

高等学校教学参考书

画法几何的给题条件与解题方法

卓 守 鹏

038160

高等教育出版社

本书是作者在总结了多年来从事画法几何教学工作的经验基础上编写而成的。全书内容共分五个部分：画法几何的给题条件，画法几何的解题方法，不可解题的判别方法，画法几何习题选编与解法提示，解题的存在域。本书除在“画法几何习题选编与解法提示”部分共选有70个习题外，其余各部分还附有一定数量的例题。

本书可供各类高等学校和中等专业学校从事画法几何及工程制图教学工作的教师参考用。

高等学校教学参考书

画法几何的给题条件与解题方法

卓 守 鹏

*

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
国防工业出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/16 印张5 字数110,000
1987年2月第1版 1987年2月第1次印刷
印数00,001—9,610

书号 15010·0824 定价1.05元

前 言

早在1979年，作者总结了自己在画法几何教学工作中的一些体会，写了一本题名为“画法几何的给题条件与解题方法”的油印小册子，在武汉召开的中国工程图学学会学术报告会上交流。承蒙同行们器重，会后，那本油印的小册子又由好几个省市的工程图学学会翻印交流，有的学校在编写综合题集时作了大量摘引。作者还收到不少来信，诉说希望能得到这本小册子的迫切心情，讨论一些有关画法几何题解问题，以及热情鼓励的话。

作者还曾以这本小册子为讲义，向工程图学师训班授课；也利用其中的部分内容，集训过参加画法几何竞赛的同学。在教学过程以及与同志们的交换意见中，感到原油印小册子有很多值得改进的地方。这次是在原来的基础上作了较多的修改和补充。今天，趁本书正式出版之际，特向对本书的关切者和广大同行们表示衷心感谢。

本书的主要对象是从事画法几何及工程制图的教学工作者。对教师来讲，解题能力不仅体现在：解题的熟练程度，思考的灵活性，方法的多样性、说理性，习题本身的深度和广度，而且还要善于设计题目，理解设计的方法和解题的方法，掌握一些规律性的东西。本书就是从这方面进行探讨而编写的。

学生如果要用此书作为参考书，应在教师指导下进行，或者在学完画法几何课程以后作为提高用。

本书承上海城市建设学院何铭新同志审阅，提出了很多宝贵意见和有益建议，特此致谢。

本书的一些观点和提法均为作者的粗陋之见，限于水平，不妥与错误之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

卓守鹏

1986年6月于浙江大学

48/K53/04

目 录

第一部分 画法几何的给题条件	1
一、画法几何习题分类概述	1
二、画法几何的给题条件	1
三、按条件数设计画法几何题	2
四、对条件数的分析	4
第二部分 画法几何的解题方法	7
一、解题方法概述	7
二、解题方法举例	8
第三部分 不可解题的判别方法	27
一、判别不可解题的基本方法	27
二、判别不可解题举例	29
第四部分 画法几何习题选编与解法提示	37
一、关于习题选编的说明	37
二、画法几何习题选编与解法提示	38
第五部分 解题的存在域	65
一、解题的存在域概述	65
二、解题的存在域讨论	66
参考书目	74

第一部分 画法几何的给题条件

一、画法几何习题分类概述

画法几何习题一般可分为以下几种。

一种是用图形和文字给出一定的条件，然后用作图方法画出文字所给定的条件。譬如，已知 C 点到 AB 的距离等于它到 V 面的距离，求 C 点的 H 面投影(图1-1)。在点、直线、平面的习题中，有很多这样的题目。

另一种是在两个或几个几何元素中求它们的公有元素。求两直线的交点、平面和直线的交点、两平面的交线、截交线、相贯线都属于这一类题目。

其它还有用投影变换的方法求实长、实形和各种要求，以及画轴测图和展开图等方面的题目。

虽然分这么几种，但它们之间有密切联系，常常难以截然分开。

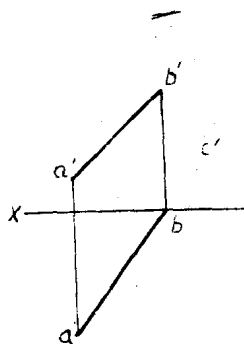


图 1-1 求 C 点的 H 面投影

二、画法几何的给题条件

本部分着重讨论第一种类型的题目。首先说明一下“条件”。这里所讲的“条件”就是点的坐标、直线的方向和用文字说明的要求等。

1. 确定空间任意一点需要三个坐标，也就是三个条件。若已知点的一个投影就给定了两个条件，再给定一个条件就可确定点的位置。

如已知 A 点的 V 面投影 a' (图1-2)，则只需要再给定一个条件就能确定 A 点的 H 面投影。这个条件可以是 A 点的 Y 坐标，或者是 A 点离 X 轴的距离，或者是 A 点离 Z 轴的距离等。

2. 确定空间一条过定点的定方向直线需要五个条件。

如过点 A 作一直线与 H 面的倾角为 30° ，与 V 面的倾角为 45° (图1-3)。即确定该点需要三个条件，而定方向的直线由两个投影角或直线对投影面的倾角(两个条件)来确定。

3. 确定空间任意一条直线段需要六个条件，即需要确定直线段的两端点，也就是将上述第1条的条件数乘2。

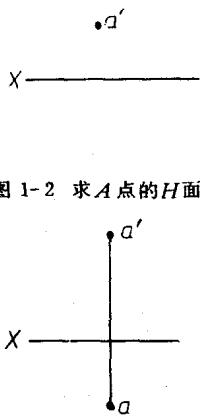


图 1-2 求 A 点的 H 面投影

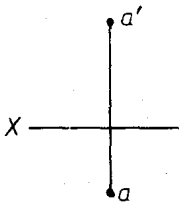


图 1-3 过 A 点作直线的投影

4. 确定空间任意一个平面需要七个条件,即需要确定两条过同一定点的定方向直线,也就是重复上述第2条的部分条件数。

如确定空间任意一个三角形则需要九个条件,即确定三个点的坐标,也就是将第一条的条件数乘3。

5. 只需要给定一个坐标就能在已知直线上确定一个点,也就是在已知直线上确定一个点只需要一个条件。

如要在 AB 直线上确定 K 点(图1-4),可以这样给定一个文字条件:

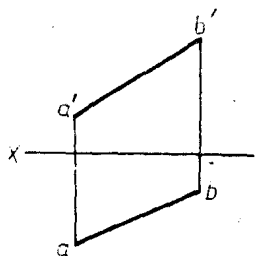


图 1-4 在 AB 线上定点的投影

(1) 使 K 点的 z 坐标为定值。

(2) 使 K 点至 V 面的距离与至 H 面的距离相等。

(3) 使 K 点分 AB 线段为某定比。

6. 只需要给定点的两个坐标就能在已知平面上确定该点,也就是在已知平面上确定一个点需要两个条件。

如在 P 平面上确定 K 点(图1-5),可以这样给定两个文字条件:

(1) 使 K 点至 V 面距离为定长 l ,至 H 面距离为定长 m 。

(2) 使 K 点至 V 、 H 、 W 面的距离相等,即

$$K_x = K_y, \quad K_x = K_z。$$

7. 只需在平面上确定某点的两个坐标和过该点的直线的方向,就能在已知平面上确定该直线,也就是在已知平面上确定一直线需要三个条件。

如过平面上的一点 A (两个条件),作一位于平面上的与 H 面倾角为 30° (一个条件)的直线。

8. 只需在平面上确定直线段两端点的两个坐标,就能在已知平面上确定该直线段,即在已知平面上确定一直线段需要四个条件。也就是将第6条的条件数乘2。

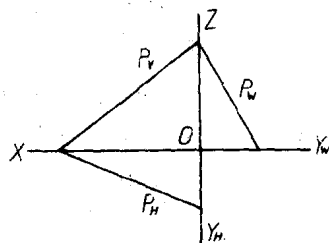


图 1-5 在 P 平面上定点的投影

三、按条件数设计画法几何题

如分析图1-1及其说明, $\triangle ABC$ 需要九个条件,图中给出了八个条件,只需一个文字给定条件就可把 C 点定下来了。

例1 已知 $\triangle ABC$ 的 V 面投影和 AB 的 H 面投影(图1-1),按下述文字给定条件求作 C :

1. C 点到 AB 的距离等于到 V 面的距离,
2. $\angle ABC = 90^\circ$,
3. $\angle ABC = 60^\circ$,
4. CB 对 AB 的夹角等于对 V 面的倾角,

5. C 点到 AB 的距离等于 C 点到 $\triangle ABC$ 平面与 V 面交线的距离,

6. $2 \cdot CA = CB$,

7. $\angle CBA = 2 \cdot \angle CAB^*$,

.....。

根据不同的文字给定条件,就要用不同的解题方法去求 c ,这样就可设计出不同的题目。

若将图1-1的图形给定条件去掉一个,则还需补充一个文字给定条件。

例2 已知 ABC 的 V 面投影,和 A 点的 H 面投影(图1-6),按下述的文字给定条件求作 b 、 c 。

1. (1) AB 长为定值,

(2) C 点到 AB 的距离等于到 V 面的距离;

2. (1) BC 的长为定值,

(2) $\angle ABC$ 等于 90° ;

3. (1) BC 对 H 面的倾角为 45°

(2) $\triangle ABC$ 的面积为 m^2 (m 表示某一直线段长);

4. (1) $\angle ABC = 60^\circ$,

(2) AB 对 H 面的倾角等于 30° ;

5. (1) $AB = BC$,

(2) $AB = AC$;

6. (1) $\angle ABC = 30^\circ$,

(2) $\angle BCA = 45^\circ$;

7. (1) AB 对 V 面的倾角等于 30° ,

(2) $2 \cdot CA = CB$ 。

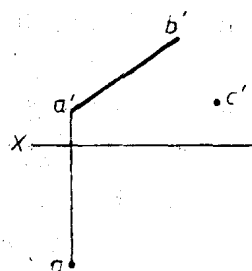


图1-6 求作 b 、 c

这样又可以组成不同的题目。若继续将图1-6的图形给定条件去掉一个,则需再增加一个文字给定条件。

例3 已知 BC 的 V 面投影 $b'c'$ 和 A 点的 H 面投影 a (图1-7),按下述的文字给定条件求作 a' 、 b 、 c 。

1. 已知三条边的长度:

$$AB = l, BC = m, CA = m;$$

2. BC 对 H 面的倾角为 30° , $AB = BC$, $\triangle ABC$ 对 H 面的倾角为 45° ;

3. 三角形的三条边长都等于 l ;

4. $AB = BC$, $BC = CA$, $\triangle ABC$ 垂直 V 面;

5. $AB = BC$, $BC = CA$, $\triangle ABC$ 垂直 H 面。

例4 作一直线与两交叉直线 AB 和 CD 相交(图1-8)。

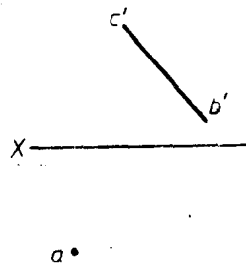


图1-7 求作 a' 、 b 、 c

* 第7个文字给定条件属不可解题,见本书第三部分例9说明。

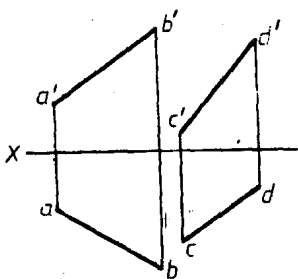


图 1-8 作直线与两交叉直线相交

分析这个题目，也就是在两交叉直线上各找两个点，然后连线。在已知直线上确定一个点只需一个条件，所以该题需要两个文字给定条件，这两个文字给定条件也可以变化为很多种，诸如：

1. (1) 水平线，
(2) 与其中一直线的夹角为 45° ；
2. (1) 与 H 面倾斜 30° ，
(2) 与 V 面倾斜 45° ；
3. (1) 与 H 面倾斜 30° ，
(2) 两交点间距离为定长；
4. (1) 与 X 轴相交，
(2) 直线与 H 面的倾角等于与 V 面的倾角；
5. (1) 与任意第三直线（不与二已知直线共面）相交，
(2) 三个交点中，其中一个交点与另两个交点等距离；
6. (1) 水平线，
(2) 交点间距离是水平线中距离最短的；
7. (1) 直线与 AB 夹角为 30° ，
(2) 直线与 CD 夹角为 45° ；
8. (1) 线段 EF 与 AB 垂直（ E 点在 AB 上， F 点在 CD 上），
(2) F 点离 V 面距离等于 EF 的长度；

.....

同样，也可将上述条件有选择的组合，如将第 1 条的 (1) 与第 2 条的 (2) 组合，或与第 3 条的 (2) 组合，或与第 4 条的 (2) 组合；也可以将第 2 条的 (1) 与第 1 条的 (2) 组合，.....

四、对条件数的分析

在设计题目的时候，应对条件数作仔细分析，有时仿佛条件数不足，实际正好，有时似乎条件数正好，实际不足。举例如下：

例 1 过 A 点作 AB 直线，使 (1) $AB \parallel L$ ；(2) B 点在 V 面上（图 1-9）。

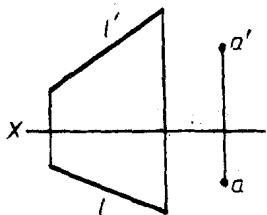


图 1-9 过 A 点作直线

确定 B 点需要三个条件，但文字条件看来只有两个，似乎条件不足。但是已知的 L 直线方向包含了对 H 面的倾角 α 和对 V 面的倾角 β ，所以实际上为了确定 B 点还是包含了三个文字给定条件。

例 2 已知 $AB = 2$ (单位)， $BC = 3$ (单位)， $CA = 4$ (单位)，求作 $\triangle ABC$ 的投影（图 1-10）。

确定 $\triangle ABC$ 需要九个条件，图中给了六个条件，需要三个文字给定条件。看来文字条

件给了三个, 似乎正好, 但实际上文字给定条件只有两个, 就是

$$AB = \frac{2}{3}BC; AB = \frac{1}{2}CA, \text{ 只有把 } C \text{ 点的 } H \text{ 面投影 } c \text{ 补上,}$$

才有确切的解。

条件不足, 常常得无数多个解; 条件过多, 常常无解。上例是条件不足的例子, 可以画出无数多个三角形的投影来满足题中的要求。

下面再以图 1-8 为例说明条件数。如前所述, 该题只需两个条件。

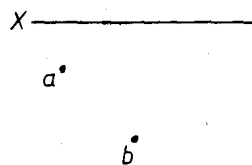


图 1-10 求作 $\triangle ABC$ 的投影

若只给一个条件, 如“作一水平线与两交叉直线相交”, 则这样的水平线可以作出无数多条。

若加进一个条件, 如“水平线与两交叉直线相交的交点间的距离为定长”, 正好是两个条件, 则能确切地画出一根水平线来。

若再加进一个条件, 如“水平线与 V 面的倾角为 45° , 且与两交叉直线相交的交点间的距离为定长”, 这样, 便有三个条件。条件多了。就互相矛盾, 无法解题。若这三个条件里去掉任意一个条件, 这样又能得到确切的解答。

下面对平面的条件数再作些补充。确定一个平面, 就是确定平面上的一个点和过该点的两条直线的方向, 需要七个条件; 如果是迹线表示的平面, 就是确定投影轴上的一个点和两条迹线的方向, 也是七个条件。这些都是两相交直线决定平面的例子。

下面再举几个例子, 说明与平面有关的条件数。

例 1 过 A 点作一平面与已知直线 BC 垂直 (图 1-11)。

在这个例子里, 我们讨论一下平面垂直于直线应包含几个条件?

过 A 点作平面垂直 BC , 就是过 A 点作垂直 BC 的水平线与正平线, 这两条相交于 A 点的投影面平行线包含了四个条件, 连同 A 点的三个条件, 共七个条件决定一个平面。所以平面垂直于直线应包含四个条件。

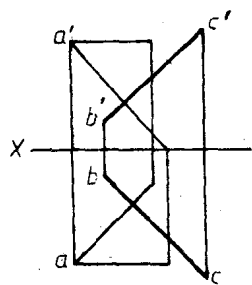


图 1-11 过 A 点作平面垂直 BC

例 2 包含过 A 点的 L 直线作一平面, 与 H 面倾斜 60° (图 1-12)。

过 A 点的 L 直线本身包含五个条件, 平面对 H 面的倾角与 L 直线确定了平面上最大斜度线的方向, 该方向应为两个条件, 总共七个条件。这样便给定了平面的确切位置。

例 3 作全 $\triangle ABC$ 的投影, 使 $\triangle ABC$ 对 H 面的倾角为 60° (图 1-13)。

这个题的图形给定条件是八个, 只缺一个条件。但文字补充条件是平面对投影面的倾角, 即最大斜度线的方向, 相当于两个文字给定条件, 那么是不是条件多余了呢?

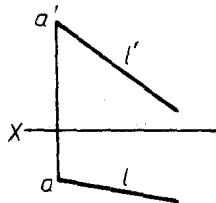


图 1-12 过 L 直线作平面

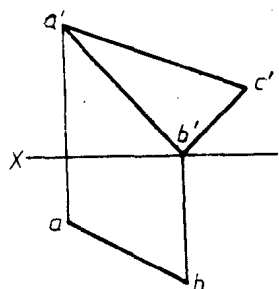


图 1-13 作全 $\triangle ABC$ 的投影

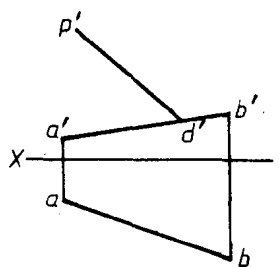


图 1-14 按题要求作 c, c'

与图1-12的例子比较就可以知道，决定三角形平面位置的是 AB 直线，以及平面对 H 面的倾角， c' 点的位置不论在什么地方都与确定平面位置无关。这里， c' 的作用只是在确定平面之后，在平面上找 C 点的 H 面投影 c 而已。

当然，如果把文字给定条件改一下，如 BC 长为定值，或 AC 对 H 面的倾角为 α ，这样，一个文字给定条件，就直接把 c 点的位置确定下来，也就把 $\triangle ABC$ 的位置确定下来了。

例4 已知 $\triangle ABC$ 的顶角 $\angle ACB = 60^\circ$ ， DP 是过顶点 C 的高，求作 c, c' （图1-14）。

从题意可以看出， $ABCDP$ 均在一个平面上，若 $\triangle ABC$ 需要九个条件，而平面上的 D, P 是否各需要两个条件，共四个条件？如这样的话那么 $ABCDP$ 总共需要十三个条件。事实上并不是这样。我们仔细分析该平面图形的条件数，因为 D 点在 AB 直线上，故只需一个条件。同样， P 点应在 CD 直线上，也只需一个条件，所以这个平面图形的条件数总共为十一个。现在图形给定条件数共九个（ A, B 两点六个条件， p' 两个条件， $a'b'$ 上的 d' 点一个条件），文字给定条件两个，共为十一个条件。

第二部分 画法几何的解题方法

一、解题方法概述

在解题之前，首先要审查一下图形给定的条件是什么？文字给定的条件是什么？给定的条件数目是否正好？在这同时，可以展开空间构思，明确需要解决的是个什么问题。然后，进行解题分析和着手作图解题，根据所给的条件和要解决的问题考虑用那一种解题方法，选择怎样的辅助面，采用那几个步骤（注意，要把所有的图形给定条件和文字给定条件都充分利用起来，否则，就做不出题目或者把题目做错）。最后对解题结果进行校核。

解题方法一般有以下几种：

1. 辅助面方法

辅助面方法是最基本、最一般的方法。这个方法掌握好了，就能推广到其它方法上去。用这种方法的关键是如何选择与设置辅助面。辅助面应与几何元素（点、直线等）的运动轨迹有密切关系。我们所用的辅助面经常是平面、圆柱面（椭圆柱面）、圆锥面（椭圆锥面）、球面和圆环面等。

平面作为辅助面，常用于求解平行、垂直、等分面、平面上的点和线，截交线、相贯线等问题。

圆柱面作为辅助面，常用于求解平行、距离等问题。

圆锥面作为辅助面，常用于求解角度、线段的方向、距离等问题。

球面作为辅助面，常用于求解线段的方向、距离、相贯线上的点等问题。还利用 90° 的圆周角所对的弧是半圆的特点，画出 90° 角的投影。

环面作为辅助面，常用于角度、线段方向等问题。

2. 投影变换和辅助投影的方法

投影变换就是使处于一般位置的几何元素改变为处于特殊位置，以便于解题。采用辅助投影的方法则是选择新的不垂直投影面的投影方向，而且投影线可以平行也可以相交于一点，使几何元素的投影简化（一般是使它们具有积聚性），从而便于解题。

3. 平面几何方法

因为空间图形常常是一个或几个平面上的点和线，可以把空间的几何关系归结到投影图上的几何关系来处理，有的题目可以很方便地用平面几何的方法解出来。

4. 解析几何方法

这种方法是将计算和作图结合起来解题，根据题目的不同，常用两种形式。一种是根据

已知条件和未知条件列出方程，判断出该方程所表示的曲面，然后按照该曲面的特点用其它方法解题；另一种是列出方程后，用图解的方法作出方程式的根，即求作线段的长度、角度的大小等。

5. 亲似对应方法

利用椭圆的亲似对应图形可以是圆，平行四边形的亲似对应图形可以是正方形或矩形，不等边三角形的亲似对应图形可以是正三角形或与已知三角形相似的三角形等诸特点，可以解某些较难处理的题目，而且解题方法较简捷。

解一个综合性的题目，总是要用几种方法才能得到结果的。下面，举例说明各种方法的应用。

为了使图形清晰，本部分例题中给定的点用填黑的小圆表示；直线用粗实线表示；图解结果的点用空心的小圆表示，直线用紧靠着的细双线表示；作图过程的点用两细实线的交点表示；直线、作图线均用细实线表示。

二、解题方法举例

例1 已知C点到AB的距离等于到V面的距离，求c(图2-1)。

[审题] 确定A、B、C三点需要九个条件，图中给定条件八个，文字给定条件一个。

[分析] 到V面与到AB直线等距离点的轨迹是以AB的正面迹点为锥顶的椭圆锥面，用解析几何方法证明如下。

为了使方程简单，将B点设为坐标原点，则C点到直线AB的垂线长的平方为：

$$d^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 - \frac{[AX + BY + CZ]^2}{A^2 + B^2 + C^2},$$

(因为B点是坐标原点，式中的A、B、C即为A点的X、Y、Z坐标)。

C点到V面的垂线长的平方为：

$$d^2 = Y^2,$$

则：

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - \frac{[AX + BY + CZ]^2}{A^2 + B^2 + C^2} = Y^2.$$

令 $A^2 + B^2 + C^2 = M$ ，则

$$X^2 + Z^2 - \frac{A^2 X^2}{M} - \frac{B^2 Y^2}{M} - \frac{C^2 Z^2}{M} - \frac{2ABXY}{M} - \frac{2ACXZ}{M} - \frac{2BCYZ}{M} = 0,$$

$$\left(1 - \frac{A^2}{M}\right) X^2 - \frac{B^2}{M} Y^2 + \left(1 - \frac{C^2}{M}\right) Z^2 - \frac{2AB}{M} XY - \frac{2AC}{M} XZ - \frac{2BC}{M} YZ = 0.$$

简写为：

$$PX^2 + QY^2 + RZ^2 + P'XY + Q'XZ + R'YZ = 0.$$

这就是过原点的二次锥面一般方程。

C点的V面投影已知，它必须在上述锥面上，问题就归结为从已知锥面上点的一个投影

求另一个投影。

[解题]

1. 过 AB 直线作一正垂面, 该正垂面是锥面的对称面, 与锥面相交于两条母线: $B I$ 、 $B II$ 。作一新的投影面 H_1 与该正垂面平行 $B I$ 、 $B II$ 在 H_1 面上的投影反映实长, 同时 $B I$ 对 V 面的倾角 $\beta_1/2$ 等于 $B I$ 对 AB 的夹角 $\beta_1/2$, $B II$ 对 V 面的倾角 $\beta_2/2$ 等于 $B II$ 对 AB 的夹角 $\beta_2/2$ 。

2. 使 I 、 II 两点与 A 点的 Y 坐标相等, 即 I 、 II 两点为前述母线与过 A 点的正平面 P 的交点, $I II$ 就是正平面 P 与锥面的截交线——椭圆 (图中椭圆未画出来) 的长轴, 其 V 面投影

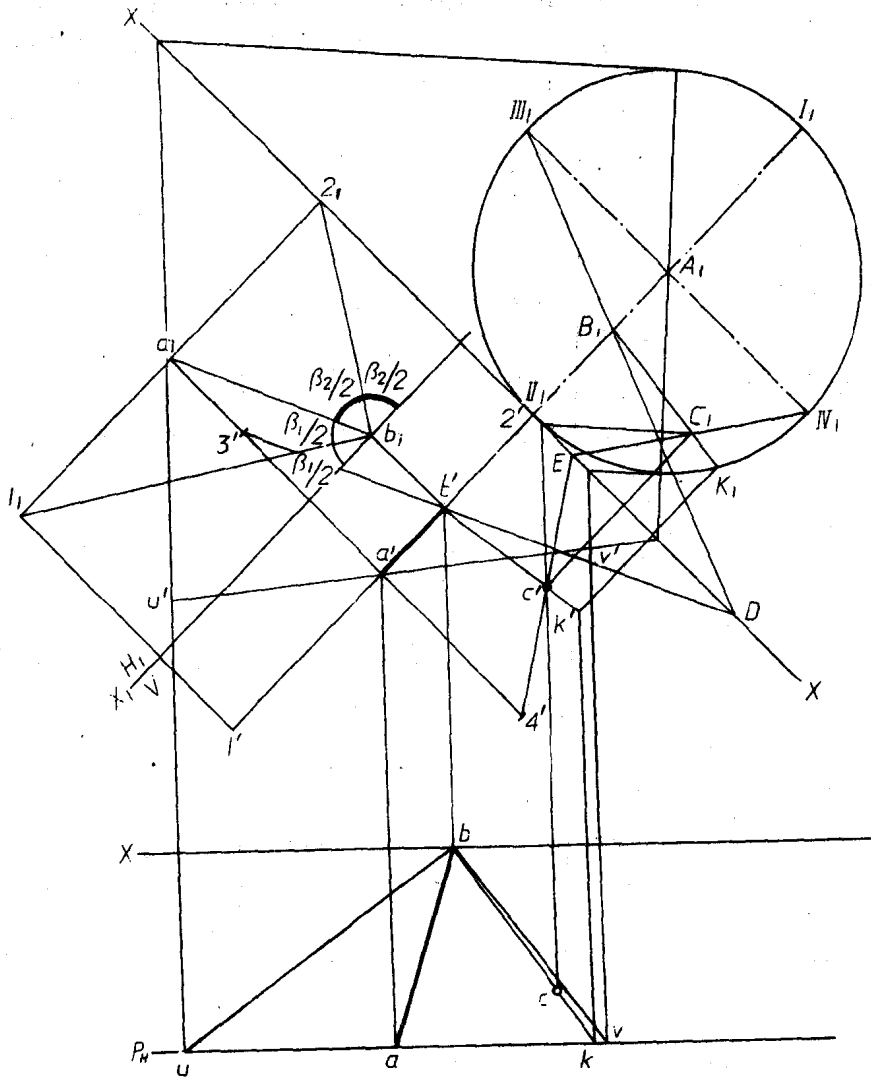


图 2-1 例 1 题解

(b_u , b_v 是圆锥的 H 面投影轮廓线, 为本书第五部分例 5 所用)

1' 2' 反映实长。

3. 椭圆短轴ⅢⅣ在 H_1 面上的投影为一点, 在 V 面上的投影3'4'也反映实长, 并与 $a'b'$ (和1'2')垂直。3'a'等于4'a', 并与Ⅲ、Ⅳ点的 Y 坐标相等。

4. 延长 $b'c'$ 连线, 必与椭圆周相交, 利用亲似对应方法求交点。

5. 过2'作亲似轴 $XX \perp 1'2'$, 再作与椭圆成亲似对应的圆, 圆的直径与椭圆短轴相等。在圆周上标出成亲似对应的各点 I_1 、 II_1 、 III_1 、 IV_1 、 A_1 。

6. 延长3'b'连线, 与亲似轴相交于 D 。 $DIII_1$ 连线与 A_1II_1 相交于 B_1 。

7. 延长4'c'连线, 与亲似轴相交于 E 。 EIV_1 连线与过 c' 点作的亲似方向相交于 C_1 。

8. 延长 B_1C_1 连线, 与圆周交于 K_1 点, 按亲似对应方向在 $b'c'$ 的延长线上求得亲似对应点 k' 。

9. 根据 k' 求得 k , 连接 bk , 在 bk 上确定 c 。

· 本题有两个解, 图中只作出一解。

[校核] 检查上述分析和作图有无错误, 必要时可验证 C 点到 AB 的垂直距离是否与 C 点的 Y 坐标相等。

例2 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 m^2 (m 长度标注在图2-2, b 中), 求 c (图2-2, a)。

[审题] 确定 A 、 B 、 C 三点需要九个条件, 图中给定条件八个, 文字给定条件一个。

[分析] 因为 $\triangle ABC$ 的面积为定值 m^2 , AB 边长也是定值, 所以 AB 边上的高可以根据这两个值确定, 则 C 点必定在以 AB 为轴线, 以 AB 边上的高为半径的圆柱面上。

假设过 C 点作一正垂线 L , 其 V 面投影与 c' 重合, 该题就归结为求作正垂线与圆柱面的交点。

[解题]

1. 作新的 V_1 面, 使之平行于 AB 。在 V_1 面上得到 AB 的实长 $a_1'b_1'$ 和正垂线 L 的投影 l_1' 。

2. 根据 AB 的实长和 m , 求得 AB 边上高线的一半 BP (图2-2, b), 则 $\triangle ABC$ 的面积为:

$$m^2 = AB \cdot BP = \frac{1}{2} AB \cdot 2 \cdot BP。$$

3. 作新的 H_2 面使之垂直于 AB 。画出在 H_2 面上的投影 a_2 (b_2)和 l_2 。

4. 以 a_2 为圆心, $R=2BP$ 为半径作圆, 即为前述圆柱在 H_2 面上的投影, l_2 与圆的交点 c_2 即为 C 点在 H_2 面上的投影。

5. 根据 c_2 求得 c_1' 和 c 。

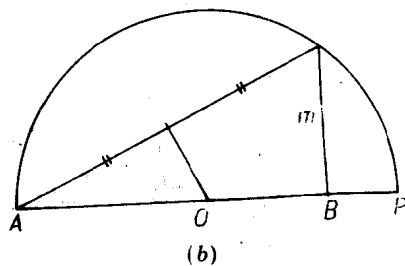
· 本题有两个解。

[校核] 检查上述分析和作图有无错误, 必要时可按 m^2 验证 $\triangle ABC$ 的面积。

例3 在 ST 直线上找一点 C , 使 $2 \cdot AC = BC$ (图2-4)。

[审题] 在直线上定点只需要一个条件, 故题目的条件数正好。

[分析] 在考虑空间 C 点与 A 、 B 点的相对位置之前, 先分析平面上某点 C 离 A 、 B 点



的距离按等式 $2 \cdot AC = BC$ 时的轨迹 (图 2-3)。

设 A 点坐标是 $(0, 0)$, B 点坐标是 $(s, 0)$, C 点的流动坐标为 X, Y , 则

$$2 \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{(X-s)^2 + Y^2} ,$$

两边平方, 得

$$4X^2 + 4Y^2 = X^2 - 2sX + s^2 + Y^2,$$

$$X^2 + \frac{2}{3}sX + Y^2 = \frac{s^2}{3} \quad ,$$

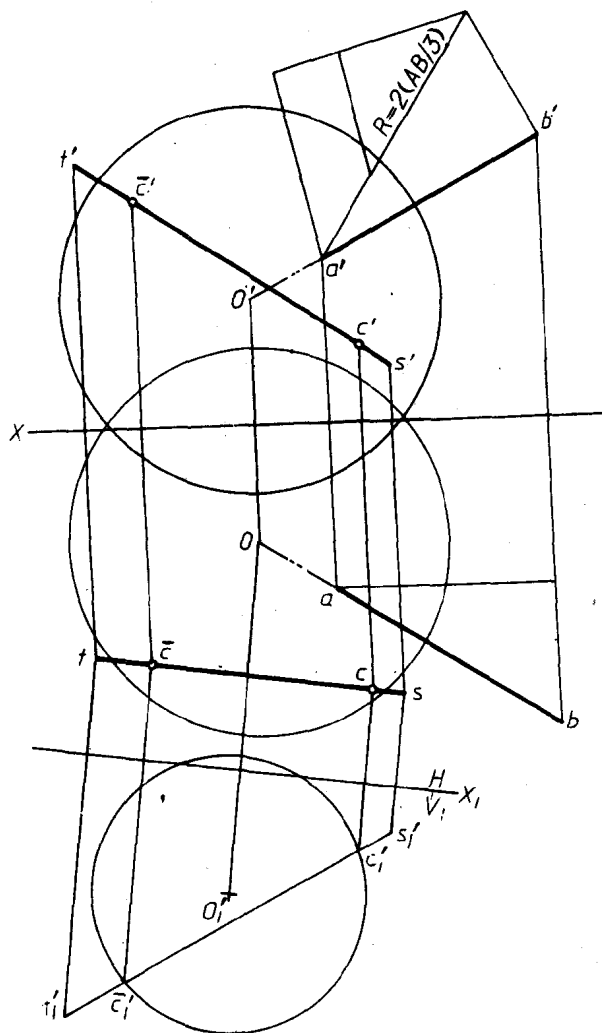


图 2-4 例3题解

本题有两个解。

[校核] 可以求作 AC 、 BC 的实长, 然后验证 $2 \cdot AC = BC$ 。

例 4 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 60^\circ$, BC 长 40 mm, AC 长 30 mm, 求 d' 、 b 、 c (图 2-5)。

[审题] 确定 A 、 B 、 C 三点需要九个条件, 图中给定条件六个, 文字给定条件三个。

[分析] 因为 $\angle BAC = 60^\circ$, 所以 A 点的轨迹是以 BC 为轴线的环面, 并要使环面上任意一点与 B 、 C 连线的夹角是 60° 的圆周角。

同时, 由于 AC 长为 30 mm, 所以 A 点的轨迹又是以 C 为球心、30 mm 为半径的球面。于是, A 点是在球面和环面的交线上。

因为 BC 的长度和 V 面投影已知, 所以 BC 的 H 面投影方向可以确定。

$$\left(X + \frac{s}{3}\right)^2 + Y^2 = \left(\frac{2s}{3}\right)^2$$

这是一个圆的方程, 圆心坐标是 $\left(-\frac{s}{3}, 0\right)$, 半径是 $\frac{2s}{3}$ 。

如果 AB 是空间一般位置直线, 则符合等式 $2 \cdot AC = BC$ 的 C 点的轨迹应该是一个同样半径的球, 球心 O_c 的位置在 BA 延长线上, 使 $AO_c = AB/3$ 。

在 ST 直线上求作符合 $2 \cdot AC = BC$ 的 C 点就是求 ST 直线与上述球的贯穿点。只需一次变换, 就能准确地作出该点。

如果 C 点至 B 点的距离是 C 点至 A 点距离的其它倍数 (1 除外) 时, C 点的轨迹也是球, 球心坐标与球半径的求法同上。

[解题]

1. 求 AB 的实长, 并取 $R = 2(AB/3)$ 。

2. 延长 $b'd'$ 至 d' , 且使 $a'o' = a'b'/3$, 再由 o' 求 o 。

3. 分别以 o 和 o' 为圆心, R 为半径, 作球的 V 面、 H 面投影。

4. 求 ST 直线对球的贯穿点 C 。