我們的一個目標

文明的進步，因素很多，而科學居其首。科學知識的傳播，是提高工業生產，改善生活環境的主動力，在整個社會長期發展上，乃人類對未來世代的投資。科學宗旨，固在充實人類生活的幸福也。

近三十年來，科學發展速率急增，其成就超越旣往之累積，昔之認爲絕難若幻想者，今多已成事實。際茲太空時代，人類一再親履月球，這偉大的綜合貢獻，出諸各種科學建樹與科學家精誠合作，誠令人有無限興奮！

時代日新又新，如何推動科學敎育，有效造就人才，促進科學研究與發展，允爲社會、國家的急要責任，培養人才，起自中學階段，學生對普通科學，如生物、化學、物理、數學，漸作接觸，及至大專院校，便開始專科敎育，均仰賴師資與圖書的啓發指導，不斷進行訓練。科學研究與敎育的學者，志在將研究成果貢獻於世與啓導後學。旨趣崇高，立德立言，也是立功，至足欽佩。

科學本是互相啓發作用，富有國際合作性質，歷經長久的交互影響與演變，遂產生可喜的意外收穫。

我國國民中學一年級，便以英語作主科之一，然欲其直接閱讀外文圖書，而能深切瞭解，並非數年之間，所可苛求者。因此，從各種文字的科學圖書中，精選最新的基本或實用科學名著，譯成中文，依類順目，及時出版，分別充作大專課本、參考書，中學補充讀物，就業青年進修工具，合之則成宏大科學文庫，益以精美形式，低廉價格，普遍供應，實深具積極意義。

本基金會爲促進科學發展，過去八年，曾資助大學理工科畢業學生，前往國外深造，贈送一部份學校科學儀器設備，同時選譯出版世界著名科學技術圖書，供給在校學生及社會大衆閱讀，今後當本初衷，繼續邁進，謹祈：

自由中國大專院校教授，研究機構專家、學者；

旅居海外從事教育與研究學人、留學生；

大專院校及研究機構退休教授、專家、學者；

主動地精選最新、最佳外文科學技術名著，從事翻譯，以便青年閱讀，或就多年研究成果，撰著成書，公之於世，助益學者。本基金會樂於運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。掬誠奉陳，願學人們，惠然贊助，共襄盛舉，是禱。

徐氏基金會敬啓

校閱小言

58年暑期接徐氏基金會來函邀本人譯書及校閱譯稿，過去對於徐氏會僅有所聞，後蒙基金會主持人徐氏在台北邀約會談，始悉基金會對於發展國家科學，尤其輔導一般失學青年能在工作之餘自修科學新知，甚爲欽佩。

本人於大學執教四十餘年，僅從事正規化教育，對失學青年之輔助教育甚少涉及，因之乃欣然同意接受此一工作，並邀學子黃德華、須忠中、柳賢諸君共同效力，期望能藉徐氏基金會之力，對於發展國家科學及輔導失學青年求知之心，切盡一份心力。

本書爲一極具水準之著作，本人特別提出，下列諸君，必須詳加閱讀。

(1)數學系同學及行將中學畢業有志投考數學系的同學。

(2)中學數學教員。

(3)對數學有興趣而不知第一本要閱什麼書。

(4)學習自然應用科學而缺乏數學基礎者。

趙 少 鐵

59年4月

序言一給學生們

1.請勿閱讀給老師之序言。

2.吾僅要求你等有足夠之能力以閱讀中文及作邏輯地思考——此外，既不必中學數學，更無須高深數學。

本書中如：一數，無此種數，兩種情形，一集合之所有元素等等，皆爲明確清楚之語詞，不使發生混淆而爭論。而此書旨在介紹複數，但在介紹自然數之前，已先使用定理 1，定理 2，……，定理 301，或 1)，2)等“數字”，此並非作者自做前後矛盾，而只是爲了區分各定理及各情形而已，恍如區分公設，定義及章、節而引用數字，因爲如此做，較之採用淡藍定理、深藍定理等，當屬方便明白得多。事實上，吾雖引用正整數至於 301，此不致發生困難。本書第一章之眞正困難，在於：以一逗點及數點來表示全部正整數所成之集合（第一章中稱此爲自然數），

$$1, \cdots\cdots\cdots\cdots$$

以及此種數之算術運算與諸運算所導出之定理的證明。

全書分下列數段來介紹複數：第一章討論自然數；而第二章則爲正分數與正有理數；而後第三章討論正數（有理數與無理數）；再次爲第四章之實數（正數、負數與零）；最末乃是第五章之複數。全書所討論都是你等在中所習見者。

更重要的是：

3. 請忘掉你等在中學所習得關於數之一切不完整的認識，因爲你等尚未學習過，而本書正爲你作介紹。

但請在心裡隨時記着中學課程與本書之相關部分，因爲你等並未眞正將它們忘記。

4. 此書未列出九九乘法表，甚至像

$$2 \cdot 2 = 4,$$

之定理亦未提起，但你等可定義

$$2 = 1 + 1,$$

$$4 = (((1 + 1) + 1) + 1),$$

而後作爲第一章 § 4 之習題將上述定理加以證明。

5. 請原諒作者以“你”字作稱呼*。吾之所以如此做，其理由之一乃是：吾著此書之目的有與法皇爲其太子著書之目的相似**，因爲如衆所知（參照作者所著：Vorlesungen über Zahlentheorie 第一册第五部），吾女已於大學研讀數學期（化學），彼等已學習微積分，然而至今尙不知下式爲何成立。

$$x \cdot y = y \cdot x$$

愛德蒙・蘭道於柏林

1929 年 12 月 28 日

---

* 在此書之德文本中，蘭道教授於序文中採用一般之稱呼“du”（你）。【英譯者】

** 法皇爲太子著書乃指：The Delphin Classics（拉丁文學）此乃路易十四請法國之學者所撰寫供其太子學習之用。【英譯者】

* 本書係由英文本翻譯者，上述二註乃英譯者所詩。【中譯者】

序言——給老師們

吾之同僚中（不幸地是其中大部份）有對於下列諸問題與吾觀點不同者，此書乃爲彼等而作。

當中學之數學教材無法將初等數學作一嚴密且完整之介紹；必然地，大學、學院之數學課程不僅授以課程內容及數學理論，而亦須教以證明之方法；甚至，部分僅求應用於物理或其他科學而學習數學之學生們，更因基礎數學定理之缺乏而摸索以致浪費時間；彼等既未學習如何走路，又焉能順其所擇之道路安穩前進——亦就是說，彼等必須有足夠能力以區別“眞確與錯誤”，“假設與證明”（或更確切地說，不嚴密之證明與嚴密之證明）。

關於此，吾認爲以下之做法乃正確之道——此與吾部分師長與同僚，其作品使我獲益甚多之某些作者以及吾之大多數學生之看法相同——即，每一個學生在其學習之第一學期就必須了解那些基本事實是被視爲公設，而由此公設使數學分析得以推展，以及如何推展。如衆所週知者，公設之選擇方法各有不同，但是設或將實數之許多算術性質及本書之重要定理（定理205，狄狄肯氏定理）視爲公設，作者雖不大聲疾呼此舉大錯特錯，但却聲明此舉與吾之觀點完全背道而馳。吾不擬證明皮亞諾氏公設之和諧性（因爲無法如此做），然而皮亞諾氏五個公設之各自獨立，却是顯而易見者。反之，如果吾人將大多數性質視爲公設，學生立刻會發生疑問：其中是否有部分公設可利用其他公設予以證明。（精明者將加以證明，或提出反證）。數十年來已確知所有附加之公設皆可證明，因此在學習過程之開端，就應使學生們對於實數之其他性質之證明了解與熟悉——何況這些證明又如此容易。

狄狄肯氏基本定理（或是以數列之方法擴充實數系所得之同義定理）不是一個應視爲公設之基本事實；作者本不欲強調這話；然而此定理之態度未明，反而造成微積分之許多重要問題不加證明，或只自圓其說前後互證其實未證之弊端。如：微分之均值定理，及該定理之一系，即一函數若於一區間內導函數爲零，此函數必爲常數函數；或見一單調遞減數列若有界，則必有極限等等。對作者而言，關於上述問題與作者持完全相反觀點之人數正作單調遞減，而且此一數列，依上述定理有一極限，此極限甚至可以爲零。

於自然數，僅僅少數性質已足以爲出發點以擴建數系。吾自認過去從未

曾對（狄狄肯氏之）實數理論有所疏忽，於早期之講演中吾假定整數與有理數之性質爲已知而研討實數系，而往後三次吾改由整數出發；其後之春季班將課程分爲並行之二部分（前此亦曾如此作過一次），其中一部分名之以“Grundlagen der Analysis”（分析之基礎）。此乃應部分聽衆之需而如此作，因部分聽衆立刻將習微分，部分則不滿意第一學期只將“數之概念”僅作解釋而已（甚或根本未解釋）。於分析之基礎課程中，吾自皮亞諾氏之自然數公設始直至完成實數系與複數系之理論止。其中之複數問題，第一學期之學生雖不需要，但因其甚爲簡單，因之附帶一併介紹。

書坊可見之書無一對於上述之分析基礎有關數之運算性質作一完全且根本之介紹者。大部分書籍僅於緒論一章留下許多問題予讀者，此種有意或無意之問題徒然引起困擾。

此書之完成，將可給予那些教學觀點與吾不同（彼等自然未涉及基礎之問題）之同僚以機會，只要彼等認爲此書適宜介紹給學生，作爲彼所忽略之一部分之補充可矣！僅僅開頭四五頁所談者較爲抽象，其後之部分只要對中學所學仍然熟悉已足供閱讀此書之用。

此書付梓前，吾曾猶豫未決，蓋因付梓之內容吾實無任何新概念可提（故僅與卡爾瑪博士作口頭上交換意見）；而有誰願付出勞力從事此種大部分是冗長乏味而又令人生厭之工作。

然而促使作者冒險付梓之原因乃是一完全偶然之事件。

與吾意見不同之同僚皆認爲關於本書所提諸概念，學生們皆可自聽講與閱讀中逐漸求得。然而彼等之中，無人不相信學生們能自吾之講課中獲得所需之概念，作者本身亦相信如此。正在當時，一件可怕之事降臨，吾一同僚格蘭若博士（今聖地牙哥大學教授）正教授分析之基礎而利用作者之筆記作參考。彼將原稿歸還之際附了一段說明，謂彼發現在作者所作之數系擴充過程中有某一點不很完全，而認爲應增加公設不能利用皮亞諾氏所提出者。作者謹此先將此問題說明如下：

1. 格蘭若之意見已經過一番驗證。
2. 各公設因需涉及後述之概念，無法在此列出，甚爲遺憾。
3. 格蘭若所提應附加之公設可以證明。（此與吾人自狄狄肯氏所得者相似），因此各性質僅依皮亞諾氏公設即可得（詳情參照全書）。

在提出之意見中，其中三者爲：

Ⅰ 關於自然數之加法定義 $x+y$。

Ⅱ 關於自然數之乘法定義 $x\cdot y$。

Ⅲ 在已對各數定義 $x+y$ 與 $x\cdot y$ 後，關於 $\sum\limits_{n=1}^{m} x_n$ 與 $\prod\limits_{n=1}^{m} x_n$ 之定義。

因爲上述三者情形相似，吾僅就其中之自然數 x，y 之和 $x+y$ 加以說明。吾證明有關自然數之定理時，如在有關自然數之演講之中，皆先證明 1 爲眞，而後設 x 爲眞而推證 $x+1$ 亦爲眞。偶然地會有學生提出意見謂作者未曾證明 x 爲眞。此反對意見雖無稽却值得原宥，蓋因學生從未聽過歸納公設。格蘭若之意見與此相似，其差別僅在於意見經過深深考慮，因之作者亦對其不作挑剔。皮亞諾氏依其公設，對於固定之 x 與 y 定義 $x+y$ 如下：

$$x+1=x'$$

$$x+y'=(x+y)'$$

皮氏本人及其繼承者皆確定：對於一般之 x，y，$x+y$ 確已定義；因爲 $x+y$ 已定義之 y 所成之集合包含 1，而且若包含 y 必包含 y'。

但 $x+y$ 却未明顯定義爲任何自然數。

其實這一切毫無問題，只要有"$\leqq y$ 之數"的概念且了解具有下述性質之 y 所成之集合爲何即可——但皮亞諾氏之方法並非如此，因其所定次序定義在加法之後 —— 對於所有 $z\leqq y$ 之諸 z，$f(z)$ 已定義並滿足下列性質之 y 所成之集合：

$$f(1)=x\ ,$$

$$\text{若 } z<y\text{，則 } f(z')=(f(z))'$$

狄狄肯氏乃採用此方式。作者靠普林斯頓一位同事紐曼之熱忱幫助，曾依前述次序之介紹，爲本書立了一個程序，可惜此程序對學生而言較爲繁複。在此僅介紹卡爾瑪博士在基格德所作之一個甚爲簡單之證明。此證明旣簡單且與第一章諸證明甚爲相似，反使專家們皆可能未加注意，作者亦有此自愧之感。因 $x\cdot y$ 之形式相似，故可用相似之法證明；至於 $\sum\limits_{n=1}^{m} x_n$ 與 $\prod\limits_{n=1}^{m} x_n$ 則僅利用狄狄肯之方法已可。因自第一章§ 3 起，吾人已有 $x\leqq y$ 之諸 x 所成之集合矣！

爲使學生得以盡可能地覺其容易，作者將某些語句（並非冗長者）在許多章，甚至每一章中重複使用。如定理 16 與 17，專家們僅說明其一已可知全部：此定理之證明實際上只要任何數之集合定義了 $<$ 與 $=$ 並且有其前諸性質時，此證法即成立。但因此種定理在下一章必將引用，因此重複地於各章中皆加以介紹證明。至於 $\sum\limits_{n=1}^{m} a_n$ 與 $\prod\limits_{n=1}^{m} a_n$，不僅不必先證明以應下章之需，

反而於較大之數系中介紹證明可以應用至其前之數系；所以留至第五章複數中再介紹，關於減法與除法亦然；實際上當被減數大於減數時，減法於自然數中已有意義，當除之過程無餘數時除法於自然數中也有意義。

此書之撰寫，爲求適切簡單，採用古板之形式（“公設”，“定義”，“定理”，“證明”，“註”幾乎每一文字均歸入於此五大類之中）。

吾積多年之準備與經驗成就此書，希望勤奮之學生於兩日之內即閱讀完畢，而後忘却其內容，僅記下歸納公設與狄狄肯氏基本定理可矣！（其他之規則學生已經異常熟悉）。

更望與吾觀點不同諸同僚能察此問題之容易而後對初學者講授時能（依下述或其他方法）先作介紹，若能如此，則將是吾所不敢奢望之極成功之舉矣！

愛德蒙．蘭道於柏林　1929 年 12 月 28 日

目　録

第一章　自然數

§1　公設

吾人假定已知有：

一個由某些物件所成之集合，其元素稱爲自然數，而此集合具有下列諸性質——這些性質視爲公設。

在將諸公設作有系統的陳述之前，吾人先把＝與≠兩個經常使用的符號作些必要的說明。

除非另有聲明，本書中之小寫斜體字母皆表示自然數。

若 x 與 y 爲已知之自然數，則

x 與 y 可能表示相同的自然數，此種情形可寫成

$$x = y$$

（＝讀作“等於”）；

x 與 y 可能表示不同的自然數，此種情形可寫成

$$x \neq y$$

（≠讀作“不等於”）。

依此，下列諸式在純邏輯的基礎上是成立的：

1）對於任意 x，恆有 $x = x$。

2）若 $x = y$，則 $y = x$。

3）若 $x = y$，$y = z$，則　$x = z$。

如此，則形如 $a = b = c = d$ 之敍述，其外觀上只表示

$$a = b\ ,\ b = c\ ,\ c = d\ ,$$

實際上還含有另外的關係，如

$$a = c\ ,\ a = d\ ,\ b = d\ ,$$

（此種情形，在以下各章中意義是相同的。）

現在，吾人假定由所有自然數所成的集合具有下列諸性質：

公設 *1*：1爲一自然數。

亦即，此集合不是空集合；它有一元素吾人把它寫成 1（讀作“一”）。

公設 2：對於任一 x 恰有一自然數稱爲 x 之後繼元素，x 之後繼元素記爲 x'。

在書寫複雜的自然數之後繼元素時，爲避免引起混淆，須先把此數置於括弧中。在本書裡，如 $x+y$，xy，$x-y$，x^y，等等，就如此行之。

因此，若 $$x=y$$
則 $$x'=y'$$

公設 3：吾人恆有 $x'\neq 1$。

亦即，1 不是任何自然數之後繼元素。

公設 4：若 $x'=y'$，則 $x=y$。

亦即，對於任一已知之自然數，此數可能不是任何自然數之後繼元素；若非如此，則恰有一自然數以此已知數爲後繼元素。

公設 5（歸納公設）：設 $\mathfrak{M}$ 爲自然數所成之集合，若此集合具有下列性質：

I）1 屬於 $\mathfrak{M}$。

II）若 x 屬於 $\mathfrak{M}$，則 x' 亦屬於 $\mathfrak{M}$。

則集合 $\mathfrak{M}$ 包含所有的自然數。

§2 加法

定理 1：若 $x\neq y$，則 $x'\neq y'$。

證明：若結論不眞確，則得 $x'=y'$，而因此依公設 4 得：$x=y$。

定理 2：$x'\neq x$。

證明：令 $\mathfrak{M}$ 表示滿足 $x'\neq x$ 之所有自然數 x 所成之集合。

I）依公設 1 與公設 3，$1'\neq 1$；因此 1 屬於 $\mathfrak{M}$。

II）若 x 屬於 $\mathfrak{M}$，則 $x'\neq x$，而因此依定理 1 得：$(x')'\neq x'$ 故 x' 亦屬於 $\mathfrak{M}$。

依公設 5，$\mathfrak{M}$ 包含所有的自然數，即對於任一 x，恆有 $x'\neq x$。

【譯註】：研讀此書，讀者當先有一必要的觀念，即具有本節所述之皮亞諾五公設的集合，絕非只是一般中學數學課本中所提的“N”，吾人試舉二例：

1.令 S 爲一集合，其元素爲一正方形，一正八邊形，一正十六邊形，一正三十二邊形，………，則以其中之正方形作爲公設 1 中所須之 1，每一元素以邊數爲其二倍之正多邊形爲其後繼元素；此集合 S 是否合乎皮氏五公設？

2.令 T 表示由 3，3/2，3/3，3/4，3/5，3/6，………，所成之集合，以其元素 3 作爲公設 1 所須之 1，而元素 $\frac{3}{n}$ 之後繼元素爲 $\frac{3}{n+1}$；此集合 T 是否合乎皮氏五公設？

定理 *3*：若 $x \neq 1$，則必有一自然數 u 存在，使 $x = u'$。（因此，依公設 *4*，此種自然數 u 恰有一個）

證明：令 $\mathfrak{M}$ 表示由 1 及有一自然數 u 存在使 $x = u'$ 成立之自然數 x 所成之集合。（對於每一個有此性質的 x，依公設 *3* 必有 $x \neq 1$。

I）1 屬於 $\mathfrak{M}$。

II）若 x 屬於 $\mathfrak{M}$，將數 x 以 u 表之，則吾人得

$$x' = u',$$

故 x' 屬於 $\mathfrak{M}$。

依公設 *5*，$\mathfrak{M}$ 包含所有的自然數；因此對於每一 $x \neq 1$ 都有一自然數 u 存在，使滿足 $x = u'$。

定理 *4*，同時也爲定義 1：對於任一對自然數 x，y，吾人恰有一方法使之與另一自然數對應，此對應之自然數寫成 $x + y$（＋讀作"加"），並滿足：

(1) 對於每一 x，$x + 1 = x'$。

(2) 對於每一 x 與每一 y，$x + y' = (x + y)'$。

$x + y$ 稱爲 x 與 y 之和，或稱 x 加 y 所得之自然數。

證明：(A) 吾人先證明對於每一個固定的 x，最多只有一種方法可定義 $x + y$ 使滿足 $x + 1 = x'$，及對於任一自然數 y，恒有 $x + y' = (x + y)'$。

令 a_y 與 b_y 爲定義於每一自然數 y 並滿足 $a_1 = x'$，$b_1 = x'$，及對於每一自然數 y，$a_{y'} = (a_y)'$，$b_{y'} = (b_y)'$。

令 $\mathfrak{M}$ 表示由滿足 $a_y = b_y$ 的自然數 y 所成之集合；

I）$a_1 = x' = b_1$，因此 1 屬於 $\mathfrak{M}$。

II）若 y 屬於 $\mathfrak{M}$，則 $a_y = b_y$，因此依公設 *2*，$(a_y)' = (b_y)'$，更得 $a_{y'} = (a_y)' = (b_y)' = b_{y'}$，故 y' 屬於 $\mathfrak{M}$。

因此 $\mathfrak{M}$ 爲所有自然數所成之集合；即對於任一 y，恒有 $a_y = b_y$。

(B) 其次吾人將證明對於一固定的 x 而言，不論 y 爲任何自然數，吾人確實可以定義 $x + y$，使滿足 $x + 1 = x'$，及對於每一 y，恒有 $x + y' = (x + y)'$。

令 $\mathfrak{M}$ 表示不論 y 爲任何自然數，$x + y$ 恒可定義的 x 所成之集合（依 (A)，若 $x + y$ 可定義，則恰有一種方法）

I）若 $x = 1$，則定義 $x + y = y'$，即合二條件；

因爲

$$x + 1 = 1' = x'$$

$$x + y' = (y')' = (x + y)'。$$

故1屬於$\mathfrak{M}$。

Ⅱ）若x屬於$\mathfrak{M}$，則對於所有的y，$x+y$存在。

對於x'，吾人定義$x'+y=(x+y)'$，即可合二條件；

因爲
$$x'+1=(x+1)'=(x')'$$
$$x'+y'=(x+y')'=((x+y)')'=(x'+y)'$$

故x'屬於$\mathfrak{M}$。

因此$\mathfrak{M}$包含所有的自然數。

定理5（加法結合律）：$(x+y)+z=x+(y+z)$。

證明：取一對固定的自然數x與y，令$\mathfrak{M}$表示對於此二數x與y使定理之敍述成立的所有z所成的集合。

Ⅰ）$(x+y)+1=(x+y)'=x+y'=x+(y+1)$；

故1屬於$\mathfrak{M}$。

Ⅱ）若z屬於$\mathfrak{M}$。則$(x+y)+z=x+(y+z)$，
$$(x+y)+z'=((x+y)+z)'=(x+(y+z))'$$
$$=x+(y+z)'=x+(y+z'),$$

故
$$(x+y)+z'=x+(y+z'),$$

於是z'屬於$\mathfrak{M}$。

因此原式對於所有的自然數z皆成立。

定理6（加法交換律）：$x+y=y+x$。

證明：取固定的y，並令$\mathfrak{M}$表示對於此數y使敍述爲眞的所有x所成的集合。

Ⅰ）吾人有
$$y+1=y'$$

而且，依定理4之證明中，吾人有
$$1+y=y'$$

故
$$1+y=y+1$$

於是1屬於$\mathfrak{M}$。

Ⅱ）若x屬於$\mathfrak{M}$，則$x+y=y+x$。

因此
$$(x+y)'=(y+x)'=y+x'$$

又依定理4之證明中，吾人有
$$x'+y=(x+y)'$$

故
$$x'+y=y+x'$$

於是x'屬於$\mathfrak{M}$。

因此原式對於所有的自然數x皆成立。

定理7：$y \neq x+y$。

證明：取固定的x，令$\mathfrak{M}$表示對於此數x使敍述爲眞的所有y所成之集合。

I)

$$1 \neq x'$$
$$1 \neq x+1\ ;$$

故1屬於$\mathfrak{M}$。

II) 若y屬於$\mathfrak{M}$，則$y \neq x+y$，

因此

$$y' \neq (x+y)',$$
$$y' \neq x+y',$$

故y'屬於$\mathfrak{M}$。

因此原式對於所有的自然數y皆成立。

定理8：若$y \neq z$，則$x+y \neq x+z$。

證明：取固定的y與固定的z，並使滿足$y \neq z$；令$\mathfrak{M}$表示對於此二數y與z使$x+y \neq x+z$成立的所有x所成的集合。

I)

$$y' \neq z',$$
$$1+y \neq 1+z\ ;$$

故1屬於$\mathfrak{M}$。

II) 若x屬於$\mathfrak{M}$，則$x+y \neq x+z$。

故

$$(x+y)' \neq (x+z)',$$
$$x'+y \neq x'+z,$$

於是x'屬於$\mathfrak{M}$。

因此，原敍述恒成立。

定理9：對於已知的自然數x與y，下列三種情形恰有一成立：

(1)　$x=y$。

(2)　有一自然數u存在，使滿足$x=y+u$。(依定理8，此種u恰有一個)。

(3)　有一自然數v存在，使滿足$y=x+v$。(依定理8，此種v恰有一個)。

證明：(A)依定理7，(1)與(2)兩種情形不能同時成立。同樣地，(1)與(3)兩種情形也不能同時成立。至於(2)與(3)兩種情形亦依定理7知其不能同時成立；因爲若兩者皆成立，則吾人得

$$x=y+u=(x+v)+u=x+(v+u)=(v+u)+x。$$

因此，(1)，(2)與(3)三種情形中至多只有一成立。

(B)取 x 爲固定之數，令𝔐表示對於此數 x 能使(1)，(2)與(3)三者中至少有一成立的所有 y 所成之集合。

I) 若 $y=1$，則依定理 *3* 吾人有

$$x=1=y \qquad (\text{情形(1)})$$

或 $$x=u'=1+u=y+u \qquad (\text{情形(2)})$$

故 1 屬於𝔐。

II) 若 y 屬於𝔐。則

設 y 合乎第(1)情形， $x=y$，

因之 $y'=y+1=x+1$， （ y' 滿足情形(3)）；

設 y' 合乎第(2)情形， $x=y+u$

若 $u=1$ 則 $x=y+1=y'$ （ y' 滿足情形(1)）；

但若 $u\neq 1$，則依定理 *3*，$u=w'=1+w$，

$$x=y+(1+w)=(y+1)+w=y'+w$$

（ y' 滿足情形(2)）；

設 y 合乎第(3)情形， $y=x+v$，

故 $y'=(x+v)'=x+v'$， （ y' 滿足情形(3)）。

不論何種情形，y' 皆屬於𝔐。

因此於(1)，(2)與(3)三種情形之中，至少有一成立。

§3 次序

定義 *2*：若 $x=y+u$， 則 $x>y$。 （$>$讀作"大於"）

定義 *3*：若 $y=x+v$， 則 $x<y$。 （$<$讀作"小於"）

定理 *10*：對於已知的自然數 x，y，則下列三者之中恰有一成立：

$$x=y,\quad x>y,\quad x<y。$$

證明：依定理 *9*，定義 **2** 與定義 *3* 可得。

定理 *11*：若 $x>y$，則 $y<x$。

證明：以上二式皆表示有一自然數 u 存在，使 $x=y+u$。

定理 *12*：若 $x<y$，則 $y>x$。

證明：以上二式皆表示有一自然數 v 存在，使 $y=x+v$。

定義 *4*：$x\geq y$ 之意爲"$x>y$ 或 $x=y$"。（$\geq$讀作"大於或等於"）

定義 *5*：$x\leq y$ 之意爲"$x<y$ 或 $x=y$"。（$\leq$讀作"小於或等於"）

定理 *13*：若 $x\geq y$，則 $y\leq x$。

證明：依定理 11。

定理 14：若 $x \leqq y$，則 $y \geqq x$。

證明：依定理 12。

定理 15（次序之遞移性）：若 $x < y$，$y < z$，則 $x < z$。

註：依此定理，若 $x > y$，$y > z$，則 $x > z$。

因為
$$z < y, \quad y < x,$$
$$z < x;$$
往後，類似此種只將已知之公式反轉即能推出的敍述，就省略而不再列出。

證明：取適當的自然數 v，w，可得
$$y = x + v, \quad z = y + w,$$
故
$$z = (x + v) + w = x + (v + w),$$
$$x < z。$$

定理 16：若 $x \leqq y$，$y < z$ 或 $x < y$，$y \leqq z$，則 $x < z$。

證明：若假設中之等號成立，則原敍述顯然為眞。若假設中等號不成立，則依定理 15 可得。

定理 17：若 $x \leqq y$，$y \leqq z$，則 $x \leqq z$。

證明：若假設中兩式皆等號成立，則原敍述顯然為眞。若假設中有一式等號不成立，則依定理 16 可得。

形如 $a < b \leqq c < d$ 的符號，就是依據定理 15 與 17 使其用法正確可行。此一式之含意直接可見者是
$$a < b, \quad b \leqq c, \quad c < d,$$
同時，依上述定理，亦可推得
$$a < c, \quad a < d, \quad b < d。$$
（此種情形，在以下各章意義是相同的。）

定理 18：$x + y > x$。

證明：$x + y = x + y$

定理 19：若 $x > y$，或 $x = y$，或 $x < y$，則 $x + z > y + z$，或 $x + z = y + z$，或 $x + z < y + z$。依序分別成立。

證明：(1)若 $x > y$，則 $x = y + u$，
$$x + z = (y + u) + z = (u + y) + z = u + (y + z)$$
$$= (y + z) + u,$$
$$x + z > y + z。$$

(2)若 $x = y$，則顯然地 $x + z = y + z$。