高等学校教材

普通地图制图中的数学方法

祝国瑞　徐肇忠编著

测绘出版社

普通地图制图中的

数 学 方 法

祝国瑞 徐肇忠 编著

测 绘 出 版 社

内 容 简 介

本书综合了近年来国内外学者的研究成果，内容丰富新颖，并结合中国的实际情况，以地貌、水系、居民地等多种要素为例，做了大量实验，提供了较多的实例。本书重点讨论了数学模型的建立，对于各种类型的微机和带回归功能的计算器作为计算工具的计算方法也介绍了其最基本的思路。

本书作为地图制图专业本科的授课教材，同时也可作为科研、生产、教学各部门从事地图制图的科学技术干部的参考书。

高等学校教材

普通地图制图中的数学方法

祝国瑞　徐肇忠　编著

*

测绘出版社出版

测绘出版社印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行

*

开本 787×1092　1/16・印张 12.5・字数 283 千字

1990年6月第一版・1990年6月第一次印刷

印数 0,001—1,500 册・定价 2.60 元

ISBN 7-5030-0104-6/P・39

序　言

对制图物体从数学方面描述是制图塑型中三个主要方面之一。用数学方法描述事物要比文字描述更为确切、精练，也往往更加有效。

在地图制图学中，数学方法的使用是很早的。从公元前3世纪地图上开始出现经纬线起，地图上就使用了较严密的数学方法。但是，两千多年来，数学方法的应用仅局限于地图的数学基础方面。在制图学的其他方面，尤其在制图资料分析和制图综合理论及实践这些在制图学里极其重要的环节中，则一直是以文字描述为基础。

18世纪以来，大量的实测地形图为地图制图提供了精确、可靠的充足资料，继之完成了大量的各式各样的制图作品，地图制图理论也不断地得以发展和完善。许多地图作品在其他学科，特别是在地理学中广泛应用并发挥了很大的作用，因而它们也就被社会普遍承认。这就在地图内容的精确性、详细性、易读性、艺术性等诸方面逐渐形成了特定的质量标准。但是，这些标准基本上还是以文字描述为基础的。

在地图制图过程中，仅依据制图人员的知识和经验，采用文字描述来表达质量标准是不很明确的。特别是对制图资料分析和确定制图综合程度方面，由于制图单位、制图时间的不一，地图制图中很难统一标准，从而影响了地图，尤其是地形图的系列化。因此，在地图制图过程中采用数学方法已被各国制图学家所关注。近几十年来，特别是机助制图方法被提出以后，用数学方法描述地图制图过程引起了人们的广泛兴趣。学者们在研究和探索的过程中引用过不少的数学方法，例如本教材中将要介绍的数理统计法、图解计算法、开方根规律、等比数列法、模糊综合评判法、信息论方法、图论的方法等，它们共同的特点是用数学的方法描述制图综合问题，以期达到规格化和标准化。这个过程将大大促进制图作品的统一，简化地图编辑和编绘的过程，而且有利于逐步转化为计算机语言，为机助制图提供理论模型。

应该看到，上述各种方法虽然有一定的研究成果和样品试验，但大部分还缺少在实践中的充分检验。加上这些方法中有些由于其本身的复杂性和不够完善，数学方法目前在地图制图中大规模地使用还是有困难的。

为了促进制图科学的发展，我们有责任不断地完善制图数学方法。这就要求我们继续研究，不断探索，特别是在生产实践中使用它们，使之在应用过程中进一步发展和完善。

事实上，不论是在国外还是国内，数学方法在地图制图中正在被越来越多的人所接受，并且在实际生产中已部分地被应用，起到了很好的作用。

本书重点讨论建立数学模型，对于用各种类型的微机和带回归功能的计算器作为计算工具的计算方法，只介绍其最基本的思路。

这里讨论了一部分的应用举例，但不可能涉及所有的范围，读者应当学会用移植的方法去研究更多的内容。

限于学科的分工，本书只研究数学方法在普通地图制图中（特别是在地图内容分析和制图综合中）的应用问题。在地图投影、地图量算和专题地图制图中的数学方法将在另外的课程中讨论。

本书作为地图制图专业本科的授课教材，同时也可作为科研、生产、教学各部门从事地图制图的科学技术干部的参考书。

本书第一章、第三章、第四章、第六章由祝国瑞编写，第二章、第五章、第七章由徐肇忠编写。何宗宜同志对第六章作了有益的增补，胡鹏同志对第七章作了建设性的补充。最后由祝国瑞根据测绘教材委员会的审查意见对全书进行了统一修改。

本书经测绘教材委员会审定，承王家跃、王瑞林副教授审稿，提出了许多宝贵建议。书中插图由高淑宁、程汉珍描绘。

我们向所有对本书的出版作出贡献的同志深表谢意。敬请各方面的读者对本书中可能出现的错误和不足之处批评指正。

编　著　者

1985年12月

目　录

第一章　数理统计法

为了能提供合乎质量标准的地图，制图人员在编辑准备工作中必须对地图上表示的各要素的特征进行大量的研究。首先必须分析所提供的制图资料并对地图上各要素的特征作出科学的评价。数理统计法在制图中应用的实质就是利用分析地图上所表示要素的图形获得数学模型。编辑人员用这个模型对所研究的地图上表示的各要素进行数学描述。无疑数理统计法是认识和评价大量客观现象规律性的良好方法，它可以为地图设计和制图综合提供科学的依据。

§1-1　基本知识

概率论和数理统计之所以能被广泛地用于各门学科，是因为自然界存在着不能用"因果关系"加以严格控制和准确预测的现象，即这种现象的发生是具有偶然性质的。但是，从大量的偶然性的研究中，我们又可以找出其规律性，即得知其必然性，从而较准确地预测其结果。

在大自然中，例如，某条河流的弯曲状态是偶然的，但是当我们研究了大量河流所处的地理环境（雨量、气温、地面坡度、岩石性质、植被条件及人力加工等）以后，就可以知道在什么样的条件下可能会出现这种弯曲形状的一般规律。类似地，如河流的分布，居民地的形状、分布、大小，地貌的高度、坡度、切割程度，道路的等级、形状，密度，植被的品种、覆盖率、分布等都有它们各自的偶然性和必然性。因此，概率论和数理统计在地图制图学中的应用是有广阔前景的。

一、概率的一些基本概念

概率论和数理统计研究的问题是相对于一组条件而言的，只有在这一组条件实现的情况下，才能获得有价值的统计资料。

1．随机试验：如果在同一组条件下进行的试验，不一定得到同样的结果，然而每一种结果都有一定的出现机会，或者说是一定的可能程度，这个试验就是一个随机试验。

2．事件：在任何一组条件下实际发生的现象都称为事件。按出现的可能性又分为三类：

必然事件——在一定的条件下必然出现的现象；

不可能事件——在一定的条件下永远不可能发生的现象；

偶然事件——在一定的条件下既可能发生又可能不发生的现象。它又称为随机事件。显然，随机试验的结果是偶然事件。

由于概率论研究的对象是随机事件，通常把它简称为事件。

3．随机变量：表示随机试验结果的量称为随机变量。它可以是一个数或一个表达

式，也可以是一个表明性质的标志。

4．总体和样品

总体——准备加以观察的、一个满足指定条件的元素或个体的组合，它包括研究现象的全部情况，它所包含的元素或个体可以是有限的，也可以是无限的。

样品——总体是由单个元素或个体组成的，我们从中抽取一部分进行研究，使之代表总体，这些被研究的元素或个体就称为样品。例如，我们把一个大区域中的全部河流当成研究的总体，而具体研究的是组成各大河系的小河系或一条条河流，它们就是研究的样品。

5．频率和概率：就个别试验而言，我们很难预料其结果，当进行大量重复的试验以后，就可以从试验结果中找出一定的规律。

我们把某事件出现的次数称为频数，频数与试验总数之比称为频率。频数是绝对数，而频率则是一个相对数。

假定，试验总数为 n，某事件出现的次数为 m，则频率表示为

$$\mu=\frac{m}{n} \tag{1-1}$$

例如，某区域居民地总数为 1463 个，城镇居民地有 13 个，我们说该区域城镇居民地的频率为 0.009。

同一事件，由于试验的次数不同，频率将会是不一致的。但是，随着试验次数的增多，频率会围绕着某一个确定的常数 p 作平均幅度愈来愈小的波动，这就是频率的稳定性。当试验次数充分多时，频率可以代替该事件出现的可能性，这种可能性就称为概率。

这里，我们对事件概率的含义强调两点：其一，事件的概率是在一定条件下讨论的，并且其概率值的大小是由随机事件本身的内部矛盾所决定的，是客观存在的；其二，概率反映着被研究对象的统计性质。

二、概率的定义和基本性质

1．概率的古典定义

对于一个试验，如果各种结果出现的总和为 n，事件 A 出现的次数为 m，则事件 A 的概率为：

$$p(A)=\frac{m}{n} \tag{1-2}$$

这就是概率的古典定义。

根据这个定义只能计算简单事件的概率。这些事件在一次试验中可能出现的结局是有限的，而且每一试验结局出现的可能性是可以预知的。否则，我们将无法罗列出所有可能出现的情况。

2．概率的基本性质

从上面的定义中我们可以知道概率的一些基本属性：

① 事件 A 的概率为一个小于或等于 1 的非负数。

由于 $m\leqslant n$，则 $0\leqslant p(A)\leqslant 1$，即

当$m=n$时，$p(A)=1$，事件A必然发生；

当$m=0$时，$p(A)=0$，事件A不可能发生；

当$m<n$时，$0<p(A)<1$，事件A为偶然事件。$p(A)\to 1$，说明事件A发生的可能性大；反之，若$p(A)\to 0$，说明事件A出现的可能性很小。

② 在同一组试验中，不具有性质A的事件为$\overline{A}$，读作“非A”，叫做A的对立事件，对于A和$\overline{A}$，恒有

$$p(A)+p(\overline{A})=1 \tag{1-3}$$

3．概率的统计定义

古典定义是研究那些简单事件时得出的，事实上，自然界的许多现象，事先都不可能知道其试验结果，也无法论证各种结果的产生是不是等可能的。对于这样一些事件，我们只有进行长期的、大量的重复试验，才能看出事件A发生或不发生的稳定规律。

以f表示n次试验中事件A发生的次数，当n充分大时，事件A的频率稳定在一个数值附近，观测次数愈多，出现的偏差就愈小。

上述情况告诉我们，在一般的场合下，也会有一个常数标志事件A发生的频率，即在试验次数很多时，事件A的频率在该数左右摆动。这个常数被认为是事件A的概率，这个意思用数学语言描述为：

$$p(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{f}{n} \tag{1-4}$$

这就是概率的统计定义。

显然，对于简单事件，概率的统计定义和古典定义是一致的。

三、分布函数及其数字特征

我们曾在上面讲过随机试验的概念，为了便于数学上的处理，我们把随机试验结果数量化，它取什么值是有一定概率规律的，这个规律具有可观测的频数意义。

例如，用网点法量取某地区的高程分布时，得到下列的统计结果（表1-1）。

为了使区间不相重叠，我们给定每个区间都是左闭右开的。例如，区间500～600，指的是从500起到小于600。

落在某高程区间的点数，近似地反映了高程分布的概率规律。

把随机变量取值x_i，这一事件的概率记作$p(\xi=x_i)$，并把ξ值落在半闭区间（x_1，x_2）上这一事件的概率记作$p(x_1\leqslant\xi<x_2)$。

若随机变量系列ξ可取任何可能的x值，则可得到大于或等于该值的概率函数，$p(\xi<x)$，称之为分布函数，它表达事件($\xi<x$)的概率分布。

我们又可以通过一系列单独的数字来表征一个已知的概率分布的基本状态，称为分布的数字特征，也称为统计特征。这些特征包括数列的中心位置(这方面的数字主要有平均数、中位数和众数)、分散程度(方差和离散度)、对称性(偏度)和高低(峰度)。

（一）分布函数

给定随机变量ξ，它的取值不超过实数x的事件的概率$p(\xi\leqslant x)$是x的函数，称为ξ

表 1-1

编　号	组　限(m)	点　数	频　率
1	0～100	84	0.1344
2	100～200	186	0.2976
3	200～300	121	0.1936
4	300～400	76	0.1216
5	400～500	50	0.0800
6	500～600	34	0.0544
7	600～700	17	0.0272
8	700～800	15	0.0240
9	800～900	11	0.0176
10	900～1000	10	0.0160
11	1000～1100	1	0.0016
12	1100～1200	4	0.0064
13	1200～1300	4	0.0064
14	1300～1400	3	0.0048
15	1400～1500	1	0.0016
16	1500～1600	0	0
17	1600～1700	1	0.0016
18	1700～1800	3	0.0048
19	1800～1900	0	0
20	1900～2000	1	0.0016
21	2000～2100	1	0.0016
22	2100～2200	1	0.0016
23	2200～2300	1	0.0016
Σ		625	1.0000

的概率分布函数，简称为分布函数。记作$F(x)$，即

$$F(x)=p(\xi\leqslant x)\qquad(-\infty<x<\infty)\tag{1-5}$$

它的几何意义我们将在后面解释。

分布函数有三个基本性质：

① $F(x)$ 是非减函数，即随着ξ取值的增加$F(x)$逐渐增大，它是概率分布的累加值；

② $F(-\infty)=0$，$F(\infty)=1$；

③ $F(x)$ 处处左连续。

在大多数的实际应用问题中，我们会遇到离散和连续两种类型的分布函数。下面分两个类型讨论其概率分布的描述。

1．离散型分布

一些随机变量，只可以取数轴上有限个或可数个孤立的值，称为离散型分布。如随机变量ξ只能在数轴上取有限个孤立的值x_1，x_2，…，x_n，并且对应于这些值有相应的确定概率p_1，p_2，…，p_n，即

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \xi = & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \hline p = & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{array}$$

这里，显然有$\Sigma p_i = 1$。这是因为，任何不包含x_i的实数集合上概率均为零。

离散型分布的随机变量ξ的分布函数具有下面的形式

$$F(x) = p(\xi < x) = \sum_{x_i < x} p_i \tag{1-6}$$

为了把问题讲清楚，我们用几何图形表示出离散型分布的概率分布和分布函数。

例如，大学一年级学生的年龄组成情况如表 1-2。

表 1-2

年　　龄	16	17	18	19	20
概　　率	0.06	0.42	0.34	0.13	0.05

其概率分布如图 1-1，分布函数图形如图 1-2。

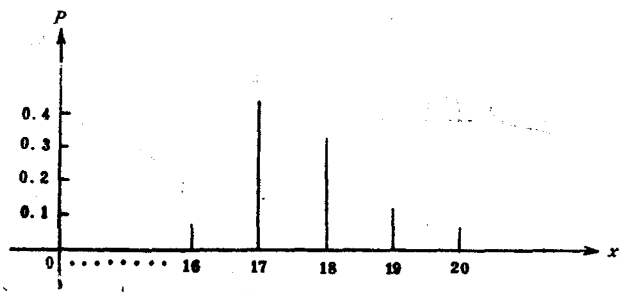

图 1-1　离散型变量的概率分布

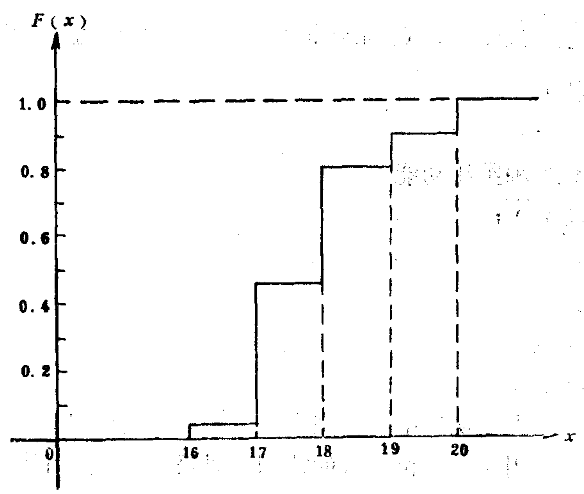

图 1-2　离散型变量的分布函数

2. 连续型分布

如果随机变量可以取数轴上某个区间的一切值，它就是连续型分布。随机变量ξ是连续分布，它的分布函数也是连续的，并有可积分的导数$F'(x)=f(x)$。

$f(x)$ 表示随机变量ξ在点x处的概率密度（又称分布密度或密度函数）。由于概率是非负数，故$f(x)\geqslant 0$。

对于连续型的随机变量，我们只谈它落在某一区间的概率，而不能谈某一点上的概率。对于任意区间（x_1，x_2），则有

$$p(x_1<\xi<x_2)=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx \qquad (1\text{-}7)$$

若 $x_1\to-\infty$，得到ξ的分布函数

$$p(\xi<x)=F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt \qquad (1\text{-}8)$$

由分布函数的性质可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1 \qquad (1\text{-}9)$$

连续型分布函数$F(x)$的图形如图 1-3。其对应的密度函数$f(x)$的图形叫分布曲线（图1-4）。

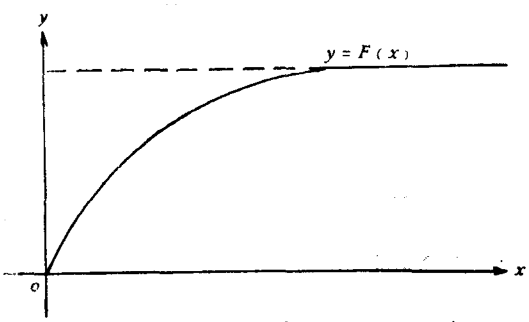

图 1-3 连续型分布函数（积累分布曲线）

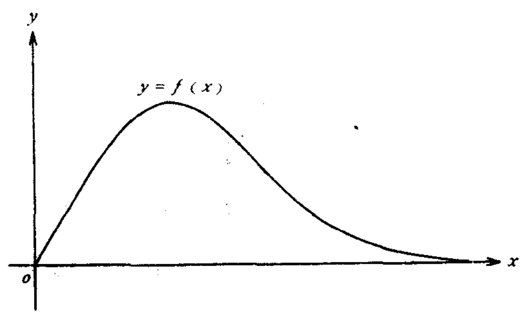

图 1-4 连续型分布曲线（密度函数）

（二）数字特征

1. 平均数

（1）平均数的种类和功能

——算术平均数$\overline{x}$；

——中位数$\check{x}$；

——众数 x_0；

——几何平均数；

——调和平均数。

平均数可以说明大量现象中的典型水平。例如，地图设计书中通常给出的居民地选取指标是平均数，它表明在一个相当大的范围内居民地数量的平均值。利用这个值，我们可以把不同地区不同时间的地图进行比较。

（2）算术平均数

它是统计学中应用最广的一类平均数，又称为均值。在一般情况下，如果不作特殊说明，平均数总是指的算术平均数。

① 简单算术平均数

如果把一系列变量 x_1，$x_2,\cdots,x_n$ 的总和除以它的项数，就是简单算术平均数。表示为

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{1-10}$$

② 加权算术平均数（加权平均数）

实际工作中，常常遇到各变量含有不同比重的问题。如量算河网密度时，分别量算了不同河系，得出一系列的密度系数 x_i，但由于被量测的河系具有不同的面积，在计算全地区的河网密度时，每个变量所占的比重有所不同，因此不能同等地看待这些变数。

设地区总面积为 P，则有

$$P=\sum_{i=1}^{n}p_i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

式中 p_i 是各河系的面积。这里 p_i 就是求河网密度时各河系的权，它们的加权平均数为

$$\overline{x}=\frac{\sum_i p_i x_i}{\sum_i p_i} \tag{1-11}$$

加权平均数等于各个变量乘上自己的权数，累加后除以权的总和。如果权是以频率表示的，由于 $\sum\mu_i=1$，则

$$\overline{x}=\sum_i \mu_i x_i \tag{1-12}$$

显然，简单算术平均数是加权平均数的特例，即各变数的权都相等。

③ 算术平均数的主要性质

——算术平均数与总项数的乘积，等于各变量的总和

$$n\overline{x}=\sum x_i \tag{1-13}$$

这个性质说明，算术平均数是各变量的共同代表。

——所有算术平均数的离差的总和等于零，即

$$\sum(x_i-\overline{x})=0 \tag{1-14}$$

这里讲的离差，即观测值同平均数之差。这个性质告诉我们，变量向两个方向的偏差（正的和负的）是可以相互抵消的。

——各变量与算术平均数的离差平方和为极小，即

$$\sum(x_i-\overline{x})^2=\min \tag{1-15}$$

（3）中位数

中位数是在一系列按顺序排列的观测值中找出的位于中间的一个数，即比它大的与比它小的变量个数相等。

如果总项数为奇数，则

$$\check{x} = x_{\frac{1}{2}(n+1)} \tag{1-16}$$

如果总项数是偶数，中位数为中间两项之和的一半，即

$$\check{x} = \frac{1}{2}(x_{\frac{1}{2}n} + x_{\frac{1}{2}(n+1)}) \tag{1-17}$$

因此，有时中位数事实上是不存在的，即数列中找不出具有该值的数字。它是一个比较模糊的概略平均值。

（4）众数

众数叫做众值。在一系列观测值中，它是出现频率最大的一个值。在分布曲线图上，它是曲线的顶点。

几何平均数和调和平均数在制图中很少应用，我们不进行讨论。

2．数学期望

数学期望也是一种平均数，即以概率为权的加权平均数。

如果随机变量数列和它们相应的概率为

$$x_1, \ x_2, \ \cdots, \ x_n$$

$$p_1, \ p_2, \ \cdots, \ p_n$$

我们定义它的数学期望值为

$$M\xi = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n = \sum_i p_ix_i \tag{1-18}$$

可以认为，数学期望值是数列的最理想的平均值。也就是统计总体的平均值。

由于我们通常研究的是样品而不是总体，而且每一独立事件的真实概率又往往是不知道的，因此总体的真实平均值是无法确定的。

根据概率的定义我们可以知道，事件的概率为观测值相当多时的概率稳定值。实际应用中，通常它是用在观测值相当多的条件下取得的频率来代替概率。这样，一个相当长数列的以频率为权的加权平均值接近于它的数学期望值。

（1-18）式是离散型随机变量的数学期望。对于连续型的随机变量 ξ，其数学期望值为

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \tag{1-19}$$

式中：$f(x)$ 为 ξ 的概率密度。

数学期望的基本性质有：

① 常数的数学期望是常数本身，即

$$MC = C \tag{1-20}$$

② 随机变量乘上某一常数的数学期望等于常数乘上该随机变量的数学期望，即

$$M(C\xi) = CM\xi \tag{1-21}$$

③ 若干个随机变量之和的数学期望等于这些随机变量的数学期望之和，即

$$M(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n) = M\xi_1 + M\xi_2 + \cdots + M\xi_n \tag{1-22}$$

④ 若干个随机变量之积的数学期望等于这些随机变量的数学期望之积，即

$$M(\xi_1 \cdot \xi_2 \cdots \xi_n) = M\xi_1 \cdot M\xi_2 \cdots M\xi_n \qquad (1\text{-}23)$$

3．矩

矩是力学上的名词，它表示力所产生的一种转动趋势。这种趋势的大小随力的大小和作用点与原点间隔的远近有所不同。借用到统计学中，它对研究分布函数有重要意义。

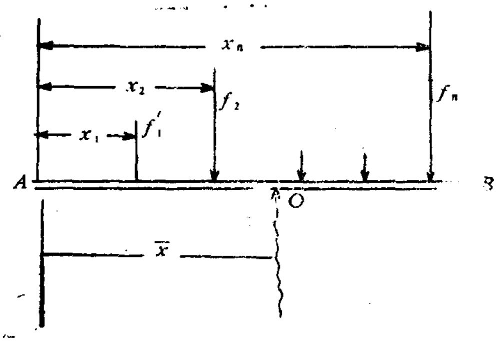

图 1-5　力矩

（1）矩的含义

图1-5是一根以A点为支点的杆AB，在它的上面作用有n个力$f_1, f_2, \cdots, f_n$，它们距A点的距离分别为x_1，x_2，…，x_n，则A点的力矩总和为

$$\begin{aligned} m_A &= x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_n f_n \\ &= \sum_i x_i f_i \end{aligned} \qquad (1\text{-}24)$$

同时，一定能在AB杆的下面找到一个支点O，它距A点的距离为

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$$

把一个大小等于$\sum f_i$而方向相反的力作用于O点，能使AB杆保持平衡，即

$$\sum x_i f_i = \overline{x}\sum f_i$$

或

$$\begin{aligned} &(x_1 - \overline{x})f_1 + (x_2 - \overline{x})f_2 + \cdots + (x_n - \overline{x})f_n \\ &= \sum (x_i - \overline{x}) f_i = 0 \end{aligned}$$

在统计学中也叫它为矩，另外也称动差，其中x表示变量取值或分组值，f表示频率。

（2）中心矩

由于平均数处于力矩中心，也就是统计的分布中心，把用均值作为零点的矩称为中心矩。表示为

$$\mu_k = M(\xi - M\xi)^k = \begin{cases} \sum\limits_i (x_i - M\xi)^k p_i \text{（离散型）} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^k f(x)dx \text{（连续型）} \end{cases} \qquad k = 0，1，2，\cdots \qquad (1\text{-}25)$$

k为中心矩的阶数，当$k=0$时称为0阶中心矩；$k=1$时称为一阶中心矩；依此有二阶、三阶、四阶……中心矩。

显然有　$\mu_0 = 1$，$\mu_1 = 0$。

（3）原点矩

当定点取系列零点时，称为原点矩。表示为

$$a_k = M\xi^k = \begin{cases} \sum\limits_i x_i^k p_i & \text{(离散型)} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx & \text{(连续型)} \end{cases} \tag{1-26}$$

显然，一阶原点矩就是数学期望本身。

（4）中心矩和原点矩的关系

统计学上常常用到中心矩，但是，由于$\overline{x}$通常是小数，计算起来不方便。为此，常常先算出原点矩，再算出中心矩，它们之间的关系是

$$\left.\begin{aligned} \mu_2 &= a_2 - a_1^2 \\ \mu_3 &= a_3 - 3a_1a_2 + 2a_1^3 \\ \mu_4 &= a_4 - 4a_1a_2 + 6a_1^2a_2 - 3a_1^4 \end{aligned}\right\} \tag{1-27}$$

4．方差和离散度

平均数是表明一个数列的集中常数，它表示分布的中心位置。但是不能表示出数列的分散或集中的程度，例如，有这样两个数列

14，15，16

5，15，25

它们的平均数都是15，但是这两个数列的集中程度却相差甚远。因此，为了确切地了解数列的特征，除了平均数之外，还要知道随机变量与其平均值之间的偏离情况，即数列的离散度。衡量离散度的标志是方差。

（1）标准差（中误差）

标准差是随机变量与数列的数学期望之差的平方和的数学期望的开方。即

$$\sigma = \sqrt{M(\xi - M\xi)^2} \tag{1-28}$$

实际计算时则用$\overline{x}$代替$M\xi$，即

$$\sigma = \sqrt{M(x - \overline{x})^2} \tag{1-29}$$

标准差又是分布的二阶中心矩的平方根，即

$$\sigma = \sqrt{\mu_2} = \sqrt{a_2 - a_1^2} \tag{1-30}$$

（2）方差

方差是标准差的平方，记为

$$D\xi = \sigma^2 = M(\xi - M\xi)^2 \tag{1-31}$$

不难看出，数列分布的愈分散，其标准差和方差都会比较大。

方差的基本性质有：

① 常数的方差等于0，即

$$DC = 0 \tag{1-32}$$

② 随机变量乘上某一常数的方差等于常数的平方乘上随机变量的方差，即

$$D(C\xi) = C^2 D\xi \tag{1-33}$$

③ 若干个不相关的随机变量之和的方差等于它们的方差之和，即