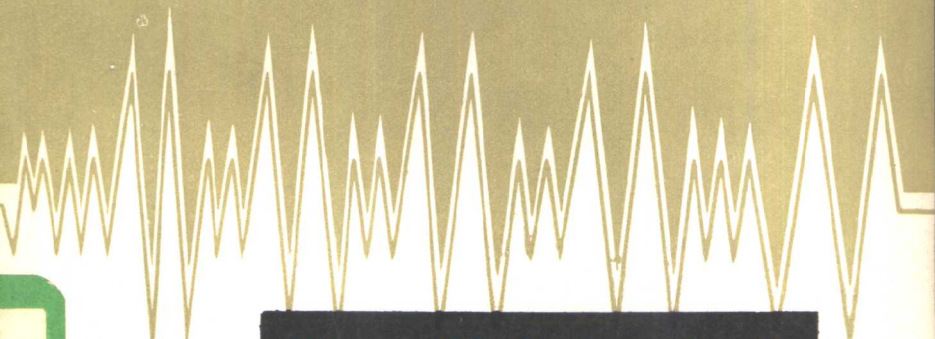


ZHENDONG FENXI JUZHENFA

【英】 D.J. 哈 特 著
鲍 维 千 陆 冠 东
范 佩 鑫 译



振动分析矩阵法

中 国 铁 道 出 版 社

振动分析矩阵法

〔英〕 D.J. 哈 特 著
鲍维千 陆冠东 范佩鑫 译

中 国 铁 道 出 版 社

1982年·北京

内 容 简 介

本书对线性振动系统用矩阵进行分析,并阐述怎样用计算机求解。

前三章介绍矩阵的基本知识及用计算机解振动问题的基本方法,作为振动分析的预备知识。后几章分别对单自由度及多自由度系统的自由振动和强迫振动以及扭振等进行矩阵分析,同时介绍计算机程序编写方法。这是振动分析方面一本很实用的书。

本书可供大专院校师生及从事振动计算的科技人员参考。

参加本书翻译的有:西南交通大学鲍维千(第一章~第四章)、陆冠东(第五章~第七章)、范佩鑫(第八章),由鲍维千定稿,经詹裴生校阅。

Matrix Computer Methods of Vibration Analysis
D.J.HATTER
Butterworth & Co(Publishers)Ltd, 1973

振 动 分 析 矩 阵 法

[英] D.J.哈特 著

鲍维千 陆冠东 范佩鑫 译

中国铁道出版社出版

责任编辑 何生泰

封面设计 王毓平

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

中国铁道出版社印刷厂印

开本: 787×1092 $\frac{1}{2}$ 印张: 7 字数: 154千

1982年1月 第1版 1982年1月 第1次印刷

印数: 0001—5,000册 定价: 0.90元

序 言

本书的目的在于填补振动分析的传统论述和近代专题论著之间的空白，那些专题论著要求读者具有相当水平的基础知识。

本书介绍一种把振动分析、矩阵代数和计算机方法三者结合起来的特殊技巧，作者把在东北伦敦工业大学的讲义整理成现在的形式。这些材料是为高年级大学生、研究生、实习工程师和程序设计者而编写的。

就编制程序而言，需要FORTRAN或一些其他算法语言的知识，但学习振动分析和矩阵理论则没有这种知识也能融会贯通。任何人，尽管对他们来说很多概念是新的，但都能通过本书的学习，了解程序设计的方法。

列入附录中的程序是以IBM1130 FORTRAN语言写成的，但只要稍作修改，或不作修改就能用于带有FORTRAN编译程序的计算机。

作者十分感谢东北伦敦工业大学计算中心的工作人员对本书程序的内容提出的意见；感谢特丽莎·泰勒(Teresa Taylor)夫人出色地为本书打印了原稿；也要感谢国际商用机器公司厚意允许复制第三章和第五章中的一些资料。

文中错误在所难免，对于任何指正，作者一定十分感谢。

D.J. 哈 特

目 录

第一章 矩阵及其运算	1
1.1 引言	1
1.2 标记法	1
1.3 矩阵的常见形式	1
1.4 矩阵的运算	4
1.5 矩阵求逆	7
1.6 行列式	18
1.7 分块矩阵	24
1.8 小结	26
1.9 习题	26
第二章 特征值及特征向量	28
2.1 引言	28
2.2 特征值及特征向量的定义	28
2.3 特征值的确定	28
2.4 特征向量的确定	31
2.5 迭代法	35
2.6 确定次特征值	38
2.7 习题	46
第三章 计算方法	47
3.1 引言	47
3.2 程序编制	47
3.3 流程图(框图)	47
3.4 求根	49
3.5 子程序	53
3.6 矩阵的运算——下标变量	55
3.7 矩阵运算的子程序	58

3.8 特征值及特征向量	60
3.9 数值考虑	61
3.10 图形输出	65
3.11 习题	65
第四章 自由振动	67
4.1 引言	67
4.2 单质量-弹簧系统的自由振动	68
4.3 多自由度系统的固有频率	70
4.4 第4.3.2节的系统推广到多自由度	75
4.5 分支系统	77
4.6 组成动力学矩阵的通用规则	80
4.7 振型	82
4.8 编制程序的要求	82
4.9 习题	83
第五章 柔度矩阵、刚度矩阵和质量矩阵	85
5.1 引言	85
5.2 刚度矩阵	85
5.3 柔度矩阵	88
5.4 刚度矩阵和柔度矩阵之间的关系	91
5.5 质量矩阵	91
5.6 用柔度矩阵、刚度矩阵和质量矩阵组成系统矩阵	92
5.7 前几节的意义	94
5.8 刚度矩阵和柔度矩阵在结构振动方面的应用	94
5.9 铰接静定构架	99
5.10 计算方面的要求——利用标准程序	104
5.11 结论	108
5.12 习题	108
第六章 有内阻尼的振动系统的强迫振动	109
6.1 引言	109
6.2 受周期性外力作用的单自由度系统	109
6.3 多自由度系统的稳态响应	112

6.4 台架激励	115
6.5 阻尼	116
6.6 有阻尼的多自由度系统	119
6.7 复矩阵求逆	124
6.8 一般情况——有阻尼分支系统的台架激励	126
6.9 编制程序的要求	129
6.10 振型的耦合	131
6.11 有非零惯性矩的质量的无阻尼振动	132
6.12 阻尼和激励对有非零惯性矩的质量振动的影响	137
6.13 小结	141
6.14 习题	141
第七章 变换矩阵	142
7.1 引言	142
7.2 定义	142
7.3 变换矩阵在单质量-弹簧系统中的应用	143
7.4 把7.3节的方法推广到有大量元素的系统	145
7.5 梁和轴的横向振动	147
7.6 用变换矩阵计算梁或轴的固有频率	151
7.7 解方程(7.23)	152
7.8 计算上的要求	155
7.9 中部有柔性支承的变换矩阵	157
7.10 均匀分布质量的变换矩阵	158
7.11 小结	164
7.12 习题	164
第八章 扭振	165
8.1 引言	165
8.2 用系统矩阵分析扭振系统	167
8.3 霍尔寿(HOLZER)求根法	169
8.4 霍尔寿方法的应用	170
8.5 计算上的要求	174
8.6 齿轮系	176

8.7 分支系统	179
8.8 振型及节点的位置	183
8.9 计算固紧/自由系统主振型的迭代法—— STODOLA法	185
8.10 编制程序的要求	188
8.11 习题	188
附录1 矩阵运算典型程序	189
A.1.1 引言	189
A.1.2 矩阵求逆 (见3.7.1节)	189
A.1.3 特征值及特征向量 (见第3.8节)	189
A.1.4 复矩阵求逆 (见第6.7节)	198
附录2 用变换矩阵求梁的固有频率的程序	203
A.2.1 引言	203
A.2.2 程序示范	203
附录3 扭转程序	210
A.3.1 霍尔寿分析法 (见第8.10节)	210
A.3.2 STODOL分析法 (见第8.10节)	210

第一章 矩阵及其运算

1.1 引 言

矩阵是由一些数或数学符号按矩形排列而成。矩阵可以以各种形式出现，而且矩阵的整理及处理，在允许进行代数运算这点上，特别适用于数字计算。本章的目的是为了提出矩阵运算的规则，以便可以扩大应用到随后的振动分析中去。

1.2 标 记 法

矩阵排列中的各个组成成分，称为矩阵的元素。元素按行和列排列，各个元素可以是一个常量、变量或代数式。要指明任一特定元素，只要指出它的行和列。因此，如果某元素位于矩阵 $[A]$ 的第四行第二列的交点，就称该元素为 A_{42} 。即元素具有两个下标，第一个下标标志行，第二个下标标志列。矩阵的阶数用行数与列数相乘表示。这样，三行和四列称为 3×4 ，并写为 (3×4) 。

1.3 矩阵的常见形式

矩阵经常以某些形式出现，对每种形式的矩阵都给予特定的说明及标记法。下面列举的是一些最常见的形式。

1.3.1 矩形矩阵

矩形矩阵具有 m 行、 n 列，并如下所示那样布置在方括号之间。元素的标记法按1.2节所述。

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \cdots A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \cdots A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \cdots A_{3n} \\ \vdots & & & \\ A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} & A_{m4} \cdots A_{mn} \end{bmatrix}$$

在用矩阵写方程式时，为了避免在每次涉及矩阵时详细地把矩阵写出，采用缩写是方便的。上述矩阵的缩写标记仅写为 $[A]$ 。

1.3.2 列矩阵

列矩阵是矩形矩阵只有单列的特例：

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

其缩写标记为 $\{A\}$ 。花括号特指列矩阵（也称为向量或向量矩阵）。

1.3.3 行矩阵

行矩阵是矩阵只有单行的特例：

$$[A_1 \ A_2 \ A_3 \cdots A_n]$$

其缩写标记为 (A) 。圆括号特指行矩阵（也称为转置向量，其理由将在后面解释）。

1.3.4 方阵

这又是矩形矩阵的一种特例，在这种矩阵中，行数和列

数相等，即 $m=n$ 。在振动分析中出现的方阵又有各种各样的特例，分述如下：

对角矩阵

在方阵中，连接左上角和右下角元素的对角线称为主对角线。在对角矩阵中，除位于主对角线上的元素外，其余都为零：

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

带状矩阵

这种带状结构是，除主对角线周围带状区域上的那些元素外，其余均为零：

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} & A_{45} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{nn-1} & A_{nn} \end{pmatrix}$$

在振动分析中，这种矩阵是常见的。因为上述矩阵有一个三元素的带宽，故通常称为三对角矩阵。

对称矩阵

若方阵按主对角线对称配置的元素两两相等，则称为对称矩阵，即

$$A_{34} = A_{43}, \quad A_{21} = A_{12} \quad \text{其通式为 } A_{ij} = A_{ji}$$

例如：

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & -6 \\ -2 & 4 & 9 & 3 \\ 1 & -6 & 3 & 17 \end{pmatrix}$$

单位矩阵及零矩阵

方阵有两个特殊的数字形式，即主对角线上元素为 1 而其余为零的单位矩阵；所有元素均为零的零矩阵。后面将要指出，这两种矩阵在程序编制中如何具体应用。单位矩阵的标记为 $[I]$ ，零矩阵的标记为 $[0]$ 。单位矩阵也称为幺矩阵。

1.4 矩阵的运算

矩阵只是一系列元素的排列，没有具体的数值或代数意义。用记号 $[A]$ 时，必须把它看作是大量数值的简化记号，因此，矩阵的运算包含着对其中各个数值的运算。下面将研究矩阵的各种运算。

1.4.1 加

两个矩阵必须具有相同的阶数才能相加，而且加法运算在对应元素之间进行。例如

$$\begin{pmatrix} 1.6 & 2 \\ 3.7 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4.1 & 3 \\ -2.1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.7 & 5 \\ 1.6 & -2 \end{pmatrix}$$

1.4.2 减

减法与加法同样处理。例如

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3.5 & 7.8 \\ -8.3 & 1.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 & -1.8 \\ 17.3 & 8.8 \end{pmatrix}$$

1.4.3 转置

在某些情况下，当用矩阵法分析振动时，有必要把矩阵的行和列互换。这种处理称为转置。注意，转置不改变主元（左上角元素）的位置。例如

$$[X] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad [X]^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$[X]^T$ 是矩阵 $[X]$ 的转置矩阵的标记法，有时也用 $[X]^t$ 和 $[\tilde{X}]$ 表示。

1.4.4 乘

乘法运算有三条基本规则：

(1) 两个矩阵相乘，第一矩阵的列数必须等于第二矩阵的行数。

(2) 两个方阵相乘，相乘的顺序是重要的。矩阵乘法不满足交换律，即如果 $[A]$ 和 $[B]$ 是方阵，则通常

$$[A] \times [B] \neq [B] \times [A]$$

(3) 乘积矩阵应该具有与第一个矩阵（左矩阵）相同的行数以及与第二个矩阵（右矩阵）相同的列数。这一点可以用来对乘法运算进行校核：如果 (3×4) 的矩阵被 (4×3) 的矩阵右乘，则其乘积为 (3×3) 阶，亦即 $(3 \times 4) \times (4 \times 3) = (3 \times 3)$ ；如果倒过来相乘，则为 $(4 \times 3) \times (3 \times 4) = (4 \times 4)$ 。

乘法运算过程如下：

计算乘积

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 13 & 11 \\ 6 & 9 & 10 & 16 \\ 13 & 17 & 25 & 33 \end{pmatrix}$$

乘积矩阵中的任意元素 A_{ij} 是由左矩阵的第 i 行与右矩阵的第 j 列，从左边和上方开始，两两元素相乘然后相加而得。对上述求积算式，可以作如下说明：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 2 & 1 \times 2 + 2 \times 1 & 1 \times 1 + 2 \times 6 & 1 \times 3 + 2 \times 4 \\ = 5 & = 4 & = 13 & = 11 \\ 4 \times 1 + 1 \times 2 & 4 \times 2 + 1 \times 1 & 4 \times 1 + 1 \times 6 & 4 \times 3 + 1 \times 4 \\ = 6 & = 9 & = 10 & = 16 \\ 7 \times 1 + 3 \times 2 & 7 \times 2 + 3 \times 1 & 7 \times 1 + 3 \times 6 & 7 \times 3 + 3 \times 4 \\ = 13 & = 17 & = 25 & = 33 \end{pmatrix}$$

可以发现，用这种方式列出矩阵相乘，使计算过程的全貌易于看清。

如果两个矩阵以两种不同的顺序都能相乘，则强调相乘顺序的重要性。

例如

$$\{A\} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (B) = [3 \quad 4]$$

则

$$\{A\} \times (B) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} [3 \quad 4] = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{而 } (B) \times \{A\} = [3 \quad 4] \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = [10]$$

矩阵与标量相乘，只要把矩阵中每个元素乘以该标量即可，如

$$5 \times \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 20 \\ 45 & 15 \end{pmatrix}$$

1.4.5 除

矩阵除法不能直接进行，即表达式 $[A]/[B]$ 在矩阵代数中没有意义。为了进行除法运算，利用所谓求逆的办法。

1.5 矩 阵 求 逆

研究矩阵方程式

$$[A] \times [B] = [C] \quad (1.1)$$

如果 $[B]$ 是未知矩阵，而 $[A]$ 和 $[C]$ 均为已知，显然， $[B]$ 是 $[A]$ 和 $[C]$ 的函数。为求 $[B]$ ，假定另一矩阵 $[A]^{-1}$ ，使

$$[A]^{-1} \times [A] = [I] \quad (1.2)$$

式中 $[I]$ 为单位矩阵。

$[A]^{-1}$ 称为 $[A]$ 的逆矩阵或 $[A]$ 的倒数。在(1.1)式两边都左乘 $[A]^{-1}$, 得到

$$[A]^{-1} \times [A] \times [B] = [A]^{-1} \times [C]$$

$$\text{或} \quad [I] \times [B] = [A]^{-1} \times [C] \quad (1.3)$$

$[B]$ 左乘以 $[I]$ 仍为 $[B]$ (矩阵与单位矩阵相乘仍为原矩阵), 从而由(1.3)式得

$$[B] = [A]^{-1} \times [C] \quad (1.4)$$

注意:

(1) 只有方阵才可能存在逆矩阵。如果分析(1.1)和(1.4)式, 可以看出, 只有当 $[A]$ 和 $[A]^{-1}$ 都是方阵时, 这两个方程式才有意义。

(2) 矩阵与其逆矩阵无论用哪种顺序相乘均产生乘积 $[I]$ 。这是矩阵乘法不满足交换律的一个例外。

1.5.1 联立方程式以矩阵形式表示

为了检验求逆矩阵的某些方法, 有必要研究若干求解联立方程式的过程。例如

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 6 \end{aligned} \right\}$$

由1.4.4节的规则, 该方程组可写成矩阵形式如下:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

对(1.5)式进行矩阵相乘, 即得到前面的原始方程组。

如果把(1.5)式改写成

$$[A]\{x\} = \{B\} \quad (1.6)$$

$$\text{式中 } [A] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \{x\} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\{B\} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

则显然有

$$\{x\} = [A]^{-1}\{B\} \quad (1.7)$$

亦即可以用逆矩阵来求解 x_1 、 x_2 及 x_3 。矩阵求逆过程，基本上可由下列求解联立方程式的过程来实现。

1.5.2 高斯消元法

为解(1.5)式，把方程式改写为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

第一步

在第一列中找出最大的元素(本例为 2)，把包含该元素的整行移至第一行：

$$\begin{array}{cccc} 2 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \end{array}$$

注意，要选的是绝对值最大的元素；因此，如果第一列中有一个值为 -3 的元素，则应将该行移至第一行。

第二步

取新的第二行的第一个元素，除以新的主元。本例中，得到一个 0.5 的值(称为第一系数)。