全国高等教育自学考试指定教材

电力系统及其自动化专业（独立本科）

电磁场

（附 电磁场课程自学考试大纲）

全国高等教育自学考试指导委员会 组编

王泽忠 主编

中国电力出版社

全国高等教育自学考试指定教材
电力系统及其自动化专业(独立本科)

电　磁　场

（附 电磁场课程自学考试大纲）

全国高等教育自学考试指导委员会　组编
王泽忠　主编

中国电力出版社

内 容 提 要

本书根据全国高等教育自学考试指导委员会电子电工与信息类专业委员会审定的电力系统及其自动化专业（独立本科）《电磁场课程自学考试大纲（含考核知识点和考核要求）》编写，并经全国高等教育自学考试指导委员会批准出版。

本书内容包括矢量分析和场论基础、静电场、恒定电场、恒定磁场、时变电磁场、电磁场能量以及平面电磁波。通过学习本书，读者可以了解由库仑定律、安培定律、法拉第电磁感应定律和位移电流假设建立电磁场理论的过程，掌握电磁场的基本概念、基本原理和基本分析方法。本书思路清晰、文字流畅，每章附有一定量的习题，并给出参考答案，便于自学者阅读使用。书末收入《电磁场课程自学考试大纲（含考核知识点和考核要求）》，供自学者对照学习。

本书是电力系统及其自动化（独立本科）专业的自学教材，也可供类似专业的其他读者参考。

图书在版编目（CIP）数据

电磁场/王泽忠主编．-北京：中国电力出版社，1999
全国高等教育自学考试指定教材　电力系统及其自动化专业（独立本科）
ISBN 7-80125-978-5

Ⅰ．电…　Ⅱ．王…　Ⅲ．电磁场-高等教育-自学考试-教材　Ⅳ．O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 04266 号

中国电力出版社出版
（北京三里河路 6 号　100044　http://www.cepp.com.cn）
北京鑫正大印刷厂印刷
*
1999 年 4 月第一版　　1999 年 4 月北京第一次印刷
787 毫米×1092 毫米　16 开本　11.25 印张　253 千字
印数 0001—8500 册　　定价 15.00 元

出 版 前 言

高等教育自学考试教材是高等教育自学考试工作的一项基本建设。经国家教育委员会同意，我们拟有计划、有步骤地组织编写一些高等教育自学考试教材，以满足社会自学和适应考试的需要。《电磁场》是为高等教育自学考试电力系统及其自动化专业组编的一套教材中的一种。这本教材根据专业考试计划，从造就和选拔人才的需要出发，按照全国颁布的《电磁场自学考试大纲》的要求，结合自学考试的特点，组织高等院校一些专家学者集体编写而成的。

电力系统及其自动化专业《电磁场》自学考试教材，是供个人自学、社会助学和国家考试使用的。现经组织专家审定同意予以出版发行。我们相信，随着高教自学考试教材的陆续出版，必将对我国高等教育事业的发展，保证自学考试的质量起到积极的促进作用。

编写高等教育自学考试教材是一种新的尝试，希望得到社会各方面的关怀和支持，使它在使用中不断提高和日臻完善。

全国高等教育自学考试指导委员会

一九九八年十月

编　者　的　话

本书是全国高等教育自学考试指导委员会组编的电力系统及其自动化专业（独立本科）教材之一，由华北电力大学（北京）王泽忠教授、赵莲清副教授和宗伟副教授编写。王泽忠教授任主编。

“电磁场”是电力专业一门重要的技术基础课，具有较强的理论性。为了便于自学，在第一章中专门介绍了矢量分析和场论等电磁场的数学基础。在编写过程中，第二章和第四章采用相同的思路，分别从库仑定律和安培定律导出静电场和恒定磁场的基本方程。这样便于对照学习。第三章是第二章和第四章的过渡，电荷运动形成电流，电流产生磁场。在第五章中，从法拉第电磁感应定律出发，引入麦克斯韦关于位移电流的假设，将静电场和恒定磁场的基本方程加以修正和扩展并推广到时变电磁场，得到电磁场的基本方程组。第六章集中讨论了电磁场的能量。第七章简单介绍了平面电磁波。作为电磁场理论的直接应用，在有关章节中介绍了计算电路参数的思路和方法。

本书由清华大学马信山教授主审，首都经贸大学杨有启教授和华北电力大学（北京）邵汉光教授参审。三位教授提出的宝贵意见和建议，对本书的修改和最后定稿起到了重要作用。在本书编写和审稿过程中，始终得到教育部全国高等教育自学考试指导委员会电子电工与信息类专业委员会秘书长陈敏逊教授的指导和支持。编者在此表示衷心的感谢。

编　者

一九九八年十月

目　　录

第一章　矢量分析与场论基础

本章是电磁场的数学基础。首先复习矢量代数的有关公式，给出矢量函数的微分和积分运算规则。介绍场的基本概念，导出标量场的等值面方程和矢量场的矢量线方程。通过介绍标量函数方向导数的概念，给出梯度的定义，导出直角坐标系中梯度的计算公式。通过介绍矢量函数通量的概念，给出散度的定义，导出直角坐标系中散度的计算公式。通过介绍矢量函数环量和环量面密度的概念，给出旋度的定义，导出直角坐标系中旋度的计算公式。给出哈米尔顿算子的定义和运算规则，用哈米尔顿算子表示梯度、散度和旋度。最后，给出三种常用坐标系中有关的公式，供查阅使用。

第一节　矢量分析公式

1．矢量代数公式

1）标量、矢量和单位矢量。只有大小，没有方向的量称为标量。不仅具有大小，而且具有空间方向的量称为矢量。矢量的大小用绝对值表示，叫做矢量的模。模为 1 的矢量叫做单位矢量，用 $\boldsymbol{e}$ 表示。如 $\boldsymbol{c}_x$、$\boldsymbol{e}_y$、$\boldsymbol{e}_z$ 分别表示与 x、y、z 三个坐标轴同方向的单位矢量。

2）矢量的加减法。设 $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{e}_x+B_y\boldsymbol{e}_y+B_z\boldsymbol{e}_z$

$$\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=(A_x\pm B_x)\boldsymbol{e}_x+(A_y\pm B_y)\boldsymbol{e}_y+(A_z\pm B_z)\boldsymbol{e}_z$$

几何关系如图 1-1 所示。

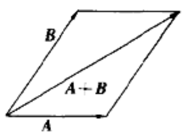

图 1-1　二矢量之和

3）矢量的数乘。即

$$\lambda\boldsymbol{A}=\lambda A_x\boldsymbol{e}_x+\lambda A_y\boldsymbol{e}_y+\lambda A_z\boldsymbol{e}_z$$

式中：λ 为实数。

4）矢量的点积。即

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=AB\cos\theta$$

式中：θ 是矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 之间的夹角；$B\cos\theta$ 是矢量 $\boldsymbol{B}$ 在矢量 $\boldsymbol{A}$ 方向上的投影（如图 1-2）；$A\cos\theta$ 是矢量 $\boldsymbol{A}$ 在矢量 $\boldsymbol{B}$ 方向上的投影。矢量的点积的运算公式如下

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}$$

$$(\lambda\boldsymbol{A})\cdot(\mu\boldsymbol{B})=\lambda\mu\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$$

式中：λ、μ 为实数。

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^2=AA=A^2$$

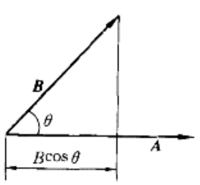

图 1-2　二矢量的点积

5）矢量的叉积。即

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{e}_x-(A_zB_x-A_xB_z)\boldsymbol{e}_y+(A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{e}_z$$

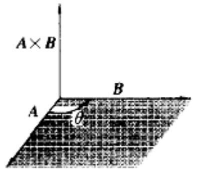

图 1-3 二矢量的叉积

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = AB\sin\theta\boldsymbol{e}_n$$

式中：$\boldsymbol{e}_n$ 是与矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都垂直的单位矢量；$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{e}_n$ 构成右手螺旋关系；θ 是矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 之间的夹角。图 1-3 灰色部分平行四边形的面积就是 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 的模。矢量的叉积的有关运算公式如下

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = -(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A} = 0$$

6）矢量的混合积。即

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$$

2. 矢量函数的导数和微分公式

1）$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_x + \dfrac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_y + \dfrac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_z$；

2）$\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \mathrm{d}A_x\boldsymbol{e}_x + \mathrm{d}A_y\boldsymbol{e}_y + \mathrm{d}A_z\boldsymbol{e}_z$；

3）$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{C}}{\mathrm{d}t} = 0$。

式中：$\boldsymbol{C}$ 是常矢量。

4）$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}$；

5）$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(k\boldsymbol{A}) = k\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$。

式中：k 是常数。

6）$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u\boldsymbol{A}) = u\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}$；

7）$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{B}$；

8）$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\times\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{B}$；

9）设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(u)$，$u=u(t)$，则$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$。

3. 矢量函数的积分公式

1）
$$\begin{aligned}\int\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t &= \left[\int A_x(t)\mathrm{d}t\right]\boldsymbol{e}_x + \left[\int A_y(t)\mathrm{d}t\right]\boldsymbol{e}_y + \left[\int A_z(t)\mathrm{d}t\right]\boldsymbol{e}_z \\ &= B_x(t)\boldsymbol{e}_x + B_y(t)\boldsymbol{e}_y + B_z(t)\boldsymbol{e}_z + C_x\boldsymbol{e}_x + C_y\boldsymbol{e}_y + C_z\boldsymbol{e}_z\end{aligned}$$

式中：$B_x(t)$、$B_y(t)$、$B_z(t)$分别是 $A_x(t)$、$A_y(t)$、$A_z(t)$的原函数；C_x、C_y、C_z 是任意常数。

2）$\int\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{B}(t) + \boldsymbol{C}$

式中：$\boldsymbol{B}(t)$是 $\boldsymbol{A}(t)$的原函数；$\boldsymbol{C}$ 是任意常矢量。

3）$\int[\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{B}(t)]\mathrm{d}t = \int\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t + \int\boldsymbol{B}(t)\mathrm{d}t$

4）$\int k\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t = k\int\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t$

式中：k 是常数。

5) $\int \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{C} \cdot \int \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t$

式中：$\boldsymbol{C}$ 是常矢量。

6) $\int \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{C} \times \int \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t$

式中：$\boldsymbol{C}$ 是常矢量。

第二节　场的等值面和矢量线

1. 场的基本概念

在许多学科领域中，为了考察某些物理量在空间的分布和变化规律，引入场的概念。如果空间中的每一点都对应着某个物理量的一个确定的值，我们就说在这空间里确定了该物理量的场。

场中的每一点都对应着一个物理量。由标量构成的场称为标量场。如温度场、能量场、电位场等。由矢量构成的场称为矢量场，如速度场、力场、电场（用场矢量表示）和磁场（用场矢量表示）等。

空间的一点 M，可以由它的三个坐标 x、y、z 确定。因此，一个标量场和一个矢量场可分别用坐标的标量函数和矢量函数表示，其表示式为

$$u(M) = u(x,y,z) \tag{1-1}$$

$$\boldsymbol{A}(M) = \boldsymbol{A}(x,y,z) \tag{1-2}$$

其中矢量函数 $\boldsymbol{A}$ (M) 的坐标表示式可写成

$$\boldsymbol{A}(M) = A_x(x,y,z)\boldsymbol{e}_x + A_y(x,y,z)\boldsymbol{e}_y + A_z(x,y,z)\boldsymbol{e}_z \tag{1-3}$$

函数 A_x、A_y、A_z 分别为矢量函数 $\boldsymbol{A}$ 在直角坐标系中三个坐标轴上的投影，为三个标量函数。$\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$、$\boldsymbol{e}_z$ 分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向的单位矢量。

如图 1-4 所示，α、β、γ 分别为矢量 $\boldsymbol{A}$ 与三个坐标轴正向之间的夹角，称为方向角。$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为方向余弦。此时有

$$\boldsymbol{A}(M) = A\cos\alpha\boldsymbol{e}_x + A\cos\beta\boldsymbol{e}_y + A\cos\gamma\boldsymbol{e}_z \tag{1-4}$$

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A}, \cos\beta = \frac{A_y}{A}, \cos\gamma = \frac{A_z}{A} \tag{1-5}$$

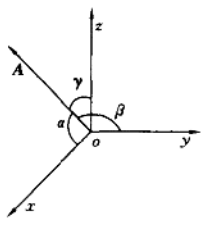

图 1-4　矢量的方向角

如果场中的物理量不仅与点的空间位置有关，而且随时间变化，则称这种场为时变场；反之，若场中的物理量仅与空间位置有关，而不随时间变化，则称这种场为恒定场。

2. 标量场的等值面

设标量场 $u(M)$ 是空间的连续函数，那么通过所讨论空间的任何一点 M_0，可以作出这样的一个曲面 S，在它上面每一点处，函数 $u(M)$ 的值都等于 $u(M_0)$，即在曲面 S 上，函数 $u(M)$ 保持着同一数值 u (M_0)，这样的曲面 S 叫做标量场 u 的等值面。等值面的方程为

$$u(x,y,z) = C \tag{1-6}$$

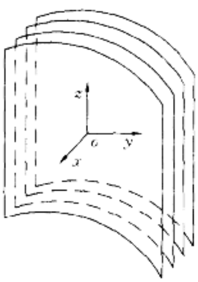

图 1-5 等值面

式中：C 为常数。给定 C 的一系列不同的数值，可以得到一系列的等值面，称为等值面族，见图 1-5。

等值面族可以充满整个标量场所在的空间。等值面互不相交，因为如果相交，则函数 $u(x,y,z)$ 在相交处就不具有唯一的函数值。场中的每一点只与一个等值面对应，即经过场中的一个点只能作出一个等值面。

电磁场中的电位场就是一个标量场。由电位相同的点所组成的等值面叫做等电位面。

在坐标原点放置一个点电荷 q，它所产生电场的电位表示式为

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{1-7}$$

等位面方程为

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = C \tag{1-8}$$

解得

$$r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 C} \tag{1-9}$$

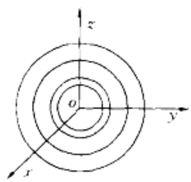

图 1-6 点电荷的等电位面

这是以坐标原点为球心的球面的方程。给定 C 的不同数值 C_1，C_2，……，就得到一族如图 1-6 所示的同心球面。

标量场的等值面与一个平面相交，就得到标量场在该平面上的等值线。如 $u(x,y,z)$ 在 $x-y$ 平面上的等值线方程为

$$u(x,y) = C \tag{1-10}$$

式中：C 为常数。

3. 矢量场的矢量线

前面引入等值面概念来形象地描述标量场，对于矢量场，可以用矢量线来形象地表示其分布情况。

所谓矢量线，就是这样的曲线，在它上面每一点处曲线的切线方向和该点的场矢量方向相同，见图 1-7。

可见，矢量线反映了场矢量在线上每一点的方向。

一般来说，矢量场中每一点有一条矢量线通过。所以，矢量线应是一族曲线，它充满了整个矢量场所在的空间。已知场矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(x,y,z)$，可如下所述求得矢量线的方程。

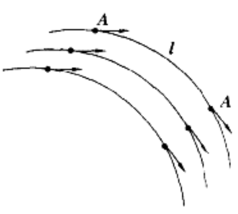

图 1-7 矢量线

如图 1-8，设 $M(x,y,z)$ 为矢量线 $\boldsymbol{l}$ 上的任一点，其矢径（始点位于坐标原点，终点位于 M 点的距离矢量）为 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$ 则矢量微分

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\boldsymbol{e}_x + \mathrm{d}y\boldsymbol{e}_y + \mathrm{d}z\boldsymbol{e}_z \tag{1-11}$$

在点 M 处与矢量线相切的矢量，按矢量线的定义，它必定

在 M 点处与场矢量方向相同，场矢量为

$$\boldsymbol{A} = A_x(x,y,z)\boldsymbol{e}_x + A_y(x,y,z)\boldsymbol{e}_y + A_z(x,y,z)\boldsymbol{e}_z \quad (1\text{-}12)$$

因此有

$$\frac{\mathrm{d}x}{A_x} = \frac{\mathrm{d}y}{A_y} = \frac{\mathrm{d}z}{A_z} \quad (1\text{-}13)$$

这便是矢量线所满足的微分方程，其解为矢量线族。再利用过 M 点这个条件，即可求出过 M 点的矢量线。

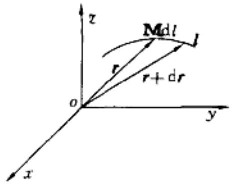

图 1-8 矢量线上的一点

因矢量线的切线方向即场矢量的方向，所以矢量线方程又可以用矢量式表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{A} = 0$$

将各分量代入上式

$$(\mathrm{d}yA_z - A_y\mathrm{d}z)\boldsymbol{e}_x + (\mathrm{d}zA_x - A_z\mathrm{d}x)\boldsymbol{e}_y + (\mathrm{d}xA_y - A_x\mathrm{d}y)\boldsymbol{e}_z = 0 \quad (1\text{-}14)$$

得

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}yA_z - A_y\mathrm{d}z = 0 \\ \mathrm{d}zA_x - A_z\mathrm{d}x = 0 \\ \mathrm{d}xA_y - A_x\mathrm{d}y = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1\text{-}15)$$

上述三个方程与式（1-13）等价。

在电磁场中，电力线和磁力线都是矢量线。

第三节 标量场的方向导数和梯度

1. 方向导数的定义

对于确定在某空间上的标量场，我们需要研究 $u(M)$ 在其中的变化情况。根据多元函数微分学，要了解 $u(M)$ 沿着 x 轴（或 y 轴，或 z 轴）方向的变化，只需要求出 $u(x,y,z)$ 关于 x（或 y、z）的偏导数。在许多场合，除了沿坐标轴方向的变化外还需要知道 $u(M)$ 沿着其它任意方向的变化情况。这就需要计算 $u(M)$ 沿着任意方向的导数。例如，讨论温度场时，如要了解热的分布和转移的规律，就需要知道温度沿着任一方向下降（或上升）的变化率，这就是标量场沿任一方向求导数的问题。

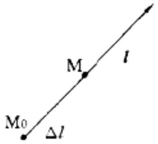

图 1-9 方向导数计算模型

如图 1-9，从标量场中任一点 M_0 出发引一条射线 $\boldsymbol{l}$，在 $\boldsymbol{l}$ 上任取一点 M，用 Δl 表示从 M_0 到 M 的距离。$\Delta u = u(M) - u(M_0)$。若当沿着 $\boldsymbol{l}$，$\mathrm{M} \to \mathrm{M}_0$ 时，比式 $\frac{\Delta u}{\Delta l} = \frac{u(M) - u(M_0)}{\Delta l}$ 的极限存在，则称此极限值为函数 $u(M)$ 在点 M_0 处沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数，记作 $\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_0}$，即

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \lim_{M \to M_0} \frac{u(M) - u(M_0)}{\Delta l}$$

$$=\lim_{M\to M_0}\frac{\Delta u}{\Delta l}=\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}l}\right|_{M_0} \tag{1-16}$$

由上式可知，方向导数是标量场函数在一点 M_0 处沿某一方向 $\boldsymbol{l}$ 对距离的变化率，它反映了函数 $u(M)$ 沿 $\boldsymbol{l}$ 方向增减的情况。当 $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}>0$ 时，表示函数 $u(M)$ 在点 M_0 沿 $\boldsymbol{l}$ 方向是增加的，$\frac{\partial u}{\partial l}$ 越大，表示增加得越快；当 $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}<0$ 时，表示函数 $u(M)$ 在点 M_0 沿 $\boldsymbol{l}$ 方向是减小的，$\left|\frac{\partial u}{\partial l}\right|$ 越大，表示减小得越快。

我们熟知的沿坐标轴的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$、$\frac{\partial u}{\partial z}$ 都是 $\frac{\partial u}{\partial l}$ 的特例。当 $\boldsymbol{l}$ 指向 x 轴正向时，$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}$；当 $\boldsymbol{l}$ 指向 y 轴正向时，$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial y}$；当 $\boldsymbol{l}$ 指向 z 轴正向时，$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial z}$。

2. 方向导数的计算

在直角坐标系中，设标量函数 $u(x,y,z)$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处可微，则函数 u 在点 M_0 处沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数存在。根据全微分概念可得

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{1-17}$$

将上式代入式（1-16），得

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}l}\right|_{M_0}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}l} \tag{1-18}$$

将 $\boldsymbol{l}$ 方向的三个方向余弦表示式代入式（1-18），得

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\cos\alpha\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}+\cos\beta\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}+\cos\gamma\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} \tag{1-19}$$

式中：$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$、$\frac{\partial u}{\partial z}$ 是 u 在点 M_0 处沿坐标轴的偏导数。方向导数是标量，它与点 M_0 有关，也与方向 $\boldsymbol{l}$ 有关。

例 1-1 求函数 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在点 M_0（1，1，0）处沿 $\boldsymbol{l}=2\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z$ 方向的方向导数。

解 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}=\left.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{M_0}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}=\left.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{M_0}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}=\left.\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{M_0}=0$

而 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦由公式（1-5）求得，即

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{2}{3},\quad \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{2}{3},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{1}{3}$$

则方向导数由公式（1-20）得到

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{2}{3}+0=\frac{4}{3\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

3. 梯度

标量函数 u 在 M_0 点沿着不同方向的变化率是不同的，那么，是否存在某个方向，使得函数 u 沿着该方向的变化率最大呢？最大的变化率又是多少呢？这是电磁场理论中经常遇到的问题。

如前所述，在直角坐标系中，标量函数的方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \tag{1-20}$$

式中：$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 为 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向余弦。我们知道 $\boldsymbol{l}$ 方向的单位矢量可表示为

$$\boldsymbol{e}_l=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}l}=\frac{\mathrm{d}x\boldsymbol{e}_x+\mathrm{d}y\boldsymbol{e}_y+\mathrm{d}z\boldsymbol{e}_z}{\mathrm{d}l}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l}\boldsymbol{e}_x+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l}\boldsymbol{e}_y+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}l}\boldsymbol{e}_z \tag{1-21}$$

可见

$$\boldsymbol{e}_l=\cos\alpha\boldsymbol{e}_x+\cos\beta\boldsymbol{e}_y+\cos\gamma\boldsymbol{e}_z \tag{1-22}$$

$\boldsymbol{l}$ 方向的方向余弦是 $\boldsymbol{l}$ 方向的单位矢量 $\boldsymbol{e}_l$ 在相应的坐标轴上的投影。如令矢量

$$\boldsymbol{G}=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \tag{1-23}$$

从式（1-20）可以看出

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{e}_l \tag{1-24}$$

令 θ 表示矢量 $\boldsymbol{G}$ 与单位矢量 $\boldsymbol{e}_l$ 之间的夹角，根据矢量点积的计算式可得

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{e}_l=G\cos\theta \tag{1-25}$$

随着 $\boldsymbol{l}$ 方向的改变，θ 发生变化，方向导数值随之变化。当 $\boldsymbol{l}$ 方向与 $\boldsymbol{G}$ 方向一致时，方向导数值达到最大，最大的方向导数为 G。G 是矢量 $\boldsymbol{G}$ 的模。

如果在标量场中任一点 M 处，存在矢量 $\boldsymbol{G}$，其方向为场函数 $u(x,y,z)$ 在 M 点处变化率最大（方向导数最大）的方向，其模 $|\boldsymbol{G}|$ 是这个最大变化率的数值，则称矢量 $\boldsymbol{G}$ 为标量场 $u(x,y,z)$ 在点 M 处的梯度。记为

$$\mathrm{grad}u=\boldsymbol{G} \tag{1-26}$$

显然，在直角坐标系中

$$\mathrm{grad}u=\boldsymbol{G}=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \tag{1-27}$$

梯度运算是分析标量场的工具。梯度是描述标量场中任一点函数增减性质的量，但标量场的梯度本身却是一个矢量，沿着梯度的方向，函数 $u(x,y,z)$ 增加得最快。

方向导数等于梯度在该方向上的投影。表示为

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\mathrm{grad}u\cdot\boldsymbol{e}_l=|\mathrm{grad}u|\cos\theta \tag{1-28}$$

场函数在点 M 处梯度的方向垂直于过该点的等值面，且指向 u 增大的方向。如图 1-10。

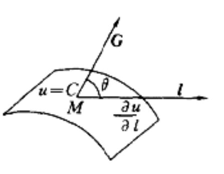

图 1-10　梯度、方向导数及等值面的关系

标量场的每一点都有一个梯度，它是矢量，这便构成了标量场的梯度场。标量场的梯度场是矢量场。

4. 梯度的运算公式

设 C 为常数，u 和 v 分别是两个标量函数，有

1) $\mathrm{grad}C=0$;

2) $\mathrm{grad}(Cu)=C\mathrm{grad}u$;

3) $\mathrm{grad}(u\pm v)=\mathrm{grad}u\pm\mathrm{grad}v$;

4) $\mathrm{grad}(uv)=u\mathrm{grad}v+v\mathrm{grad}u$;

5) $\mathrm{grad}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{1}{v^2}(v\mathrm{grad}u-u\mathrm{grad}v)$;

6) $\mathrm{grad}f(u)=f'(u)\mathrm{grad}u$。

以上各式证明都不难，现仅给出公式 6）的证明。由式（1-27）可知

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}f(u)&=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\\&=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+f'(u)\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\\&=f'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right)=f'(u)\mathrm{grad}u\end{aligned}$$

例 1-2 标量场 $u(M)=3x^2+z^2-2yz+2zx$。试求过 $M_0\left(0,\dfrac{1}{2},1\right)$ 点的梯度和梯度的模。

解 因为$\dfrac{\partial u}{\partial x}=6x+2z$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-2z$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=2x-2y+2z$。所以 $\mathrm{grad}u=(6x+2z)\boldsymbol{e}_x-2z\boldsymbol{e}_y+2(x-y+z)\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{G}=\mathrm{grad}u|_{M_0}=2\boldsymbol{e}_x-2\boldsymbol{e}_y+2\left(-\dfrac{1}{2}+1\right)\boldsymbol{e}_z=2\boldsymbol{e}_x-2\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z$，$|\boldsymbol{G}|=\sqrt{2^2+2^2+1}=3$。

第四节 矢量场的通量和散度

1. 矢量场的通量

在场中选取一曲面 S。为区分曲面的两侧，取定其中的任一侧作为曲面的正侧。如果曲面是闭合的，习惯上取外侧为正侧。表示曲面正侧的方法是取曲面的法线方向。如图 1-11，在曲面 S 上任取一点 M 与包含这点在内的一曲面元 $\mathrm{d}S$，过 M 点作曲面的法向单位矢量 $\boldsymbol{e}_n$。

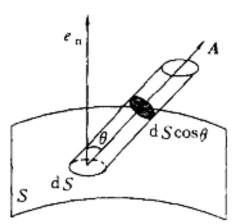

图 1-11 通量的计算模型

矢量 $\boldsymbol{A}(M)$ 穿过曲面元的通量定义为

$$\mathrm{d}\Phi=A_n\mathrm{d}S=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_n\mathrm{d}S=\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\tag{1-29}$$

因此，矢量场函数 $\boldsymbol{A}(M)$ 穿过场中某一有向曲面 $\boldsymbol{S}$ 的通量定义为

$$\Phi=\iint_S A_n\mathrm{d}S=\iint_S\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_n\mathrm{d}S=\iint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\tag{1-30}$$

式中：$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\mathrm{d}S\boldsymbol{e}_n$。

通量是一个标量。由于场矢量并不总是与曲面的法线方向一致，所以 $\mathrm{d}\Phi=\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 可能

取正值，也可能取负值。当场矢量与曲面法线方向之间夹角为锐角时，$d\Phi>0$；当场矢量与曲面法线方向之间夹角为钝角时，$d\Phi<0$；当场矢量与曲面法线方向垂直时，$d\Phi=0$。

若 S 是闭合曲面，且指定外侧方向为法线方向，则有

$$\Phi = \oint\!\!\!\oint_S A_n \mathrm{d}S = \oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-31}$$

若 $\Phi>0$，表示流出闭合面的通量大于流入的通量，说明有矢量线从闭合面内散发出来；若 $\Phi<0$，表示流入闭合面的通量大于流出的通量，说明有矢量线被吸收到闭合面内；若 $\Phi=0$，表示流出闭合面的通量与流入的通量相等，说明矢量线处于某种平衡状态。在电磁场中有电通量和磁通量等。

例 1-3 在点电荷 q 产生的电场中，场矢量 $\boldsymbol{D}=\frac{q}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_r$。其中 r 是点电荷 q 到场点 M 的距离，$\boldsymbol{e}_r$ 是从点电荷 q 指向场点 M 的单位矢量。设 S 为以点电荷为中心，R 为半径的球面，求从球内穿出 S 的电通量 Φ。

解 在球面 S 上恒有 $r=R$，且 $\boldsymbol{e}_r$ 与球面的法向单位矢量 $\boldsymbol{e}_n$ 的方向一致，所以

$$\Phi = \oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{q}{4\pi R^2}\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{e}_r \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{q}{4\pi R^2}\oint\!\!\!\oint_S \mathrm{d}S = \frac{q}{4\pi R^2} \cdot 4\pi R^2 = q$$

可见，在球面 S 内产生电通量 Φ 的源，就是电荷 q。当 q 为正电荷时，$\Phi>0$，为正源，说明有电力线从 q 向外发出；当 q 为负电荷时，$\Phi<0$，为负源，说明有电力线终止于 q。

2. 散度的定义

以上讨论了矢量在闭合面上的通量。利用通量概念只能分析闭合面内场矢量源的整体情况。要分析场中任一点的情况，必须将闭合面缩小到一点上。为此，引入矢量场的散度概念。

设有矢量场函数 $\boldsymbol{A}$(M)，在场中作包围点 M 的闭曲面 S，设其所包围的空间区域为 Ω，体积为 ΔV。当 Ω 收缩到 M，即 $\Delta V\to 0$ 时，若极限 $\lim\limits_{\Delta V\to 0}\left(\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}/\Delta V\right)$ 存在，则称此极限值为矢量场 $\boldsymbol{A}$（M）在点 M 处的散度，记作 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$，即

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V} \tag{1-32}$$

散度运算是分析矢量场的工具。矢量的散度是描述矢量场中任一点发散性质的量。矢量的散度是标量。散度就是通量的体密度，即单位体积发出的通量。矢量 $\boldsymbol{A}$ 的散度形成一标量场，叫做矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度场。

应用散度概念可以分析矢量场中任一点的情况。在 M 点，$\mathrm{div}\boldsymbol{A}>0$，表明 M 点有正“源”；$\mathrm{div}\boldsymbol{A}<0$，表明 M 点有负“源”。$\mathrm{div}\boldsymbol{A}$ 的正值越大，正“源”的发散量越大；$\mathrm{div}\boldsymbol{A}$ 为负值，其绝对值越大，表明这个负“源”吸收量越大。$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0$，表明该点无“源”。如果在场中处处有 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0$，则称此场为无“源”场，或称为无散场。

3. 散度的计算

在直角坐标系中，若矢量场 $\boldsymbol{A} = A_x(x,y,z)\boldsymbol{e}_x + A_y(x,y,z)\boldsymbol{e}_y + A_z(x,y,z)\boldsymbol{e}_z$ 的分量 A_x、A_y、A_z 有一阶连续偏导数，则可求 $\boldsymbol{A}$ 在任一点 M 处的散度。根据散度的定义可知，$\mathrm{div}\boldsymbol{A}$

与所取 ΔV 的形状无关，只要在取极限时，所有的尺寸都趋于零即可。如图 1-12，以观察点 M(x,y,z) 为中心作一小平行六面体，其三个边长分别为 $2\Delta x$、$2\Delta y$、$2\Delta z$，分别计算各表面穿出的 $\boldsymbol{A}$ 的通量。设穿入表面的通量为负，穿出表面的通量为正。

在 M 点附近，将矢量函数 $\boldsymbol{A}$ 展开成泰勒级数并忽略高阶项。从前、后一对表面穿出的净通量为

$$-\left(A_x-\frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta x\right)4\Delta y\Delta z+\left(A_x+\frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta x\right)4\Delta y\Delta z=\frac{\partial A_x}{\partial x}8\Delta x\Delta y\Delta z \qquad (1\text{-}33)$$

从左、右一对表面穿出的净通量为

$$-\left(A_y-\frac{\partial A_y}{\partial y}\Delta y\right)4\Delta x\Delta z+\left(A_y+\frac{\partial A_y}{\partial y}\Delta y\right)4\Delta x\Delta z=\frac{\partial A_y}{\partial y}8\Delta x\Delta y\Delta z \qquad (1\text{-}34)$$

从上、下一对表面穿出的净通量为

$$-\left(A_z-\frac{\partial A_z}{\partial z}\Delta z\right)4\Delta x\Delta y+\left(A_z+\frac{\partial A_z}{\partial z}\Delta z\right)4\Delta x\Delta y=\frac{\partial A_z}{\partial z}8\Delta x\Delta y\Delta z \qquad (1\text{-}35)$$

因此，从平行六面体六个面上穿出的净通量为

$$\oint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=8\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z \qquad (1\text{-}36)$$

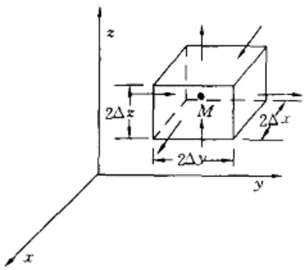

图 1-12 散度计算模型

六面体的体积 $\Delta V=8\Delta x\Delta y\Delta z$，所以

$$\frac{\oint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (1\text{-}37)$$

因此，由散度的定义

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V} \qquad (1\text{-}38)$$

得直角坐标系中散度的计算公式

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (1\text{-}39)$$

例 1-4 求点电荷 q 产生的静电场中，场矢量 $\boldsymbol{D}=\frac{q}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_r$ 在 $r\neq 0$ 的任何一点 M 处的散度 $\mathrm{div}\boldsymbol{D}$。

解 $\boldsymbol{D}=\frac{q}{4\pi r^3}(x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z)=D_x\boldsymbol{e}_x+D_y\boldsymbol{e}_y+D_z\boldsymbol{e}_z$

于是有 $\quad \frac{\partial D_x}{\partial x}=\frac{q}{4\pi}\frac{r^2-3x^2}{r^5},\quad \frac{\partial D_y}{\partial y}=\frac{q}{4\pi}\frac{r^2-3y^2}{r^5},\quad \frac{\partial D_z}{\partial z}=\frac{q}{4\pi}\frac{r^2-3z^2}{r^5}$

所以 $$\mathrm{div}\boldsymbol{D}=\frac{q}{4\pi}\frac{3r^2-3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=0 \quad (r\neq 0)$$

4. 散度的运算公式

设 C 为常数，u 为标量函数，$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为矢量函数，有

1) $\mathrm{div}(C\boldsymbol{A})=C\mathrm{div}\boldsymbol{A}$；

2) $\mathrm{div}(u\boldsymbol{A})=u\mathrm{div}\boldsymbol{A}+\mathrm{grad}u\cdot\boldsymbol{A}$；

3) $\mathrm{div}(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})=\mathrm{div}\boldsymbol{A}\pm\mathrm{div}\boldsymbol{B}$。