《自修数学》小丛书

曲 线

〔英〕D. A. 约翰逊 著

科 学 出 版 社

《自修数学》小丛书

曲　　线

〔英〕D. A. 约翰逊 著

毛毓球 译

科 学 出 版 社

1 9 8 6

内 容 简 介

本书是《自修数学》小丛书中的一本．书中把现实世界中常见的事物看作是一些几何曲线，并以通俗易懂的语言介绍了这些曲线(如圆、椭圆、抛物线、双曲线、转动曲线等)的特点以及它们的画法等．

本书深入浅出、生动有趣，适合中等文化程度的读者阅读．它对启发人们的思维、培养人们对数学的兴趣，能起积极作用．

Donovan A. Johnson

CURVES

John Murray London, 1966

曲　　线

〔英〕D. A. 约翰逊 著

毛毓球 译

责任编辑 毕颖

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院开封印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1980年10月第一版　　开本：787×1092 1/32

1986年7月第二次印刷　　印张：2 1/2

印数：68,201—70,400　　字数：46,000

统一书号：13031·1348

本社书号：1871·13—1

定价： 0.45 元

出版说明

英国出版的《自修数学》小丛书（Exploring Mathematics on Your Own）是给具有中等文化程度的读者编写的一套近代数学通俗读物。该丛书自1964年初版后，于1974年、1976年多次再版印刷。为开阔读者眼界，增长数学知识，我们将选其中的一部分翻译出版，其目次如下：

大家学数学
测量世界
数型
毕达哥拉斯定理
统计世界
集合、命题与运算
数学逻辑与推理
曲线
拓扑学——橡皮膜上的几何学
概率与机率
向量基本概念
有限数学系统
无限数
矩阵

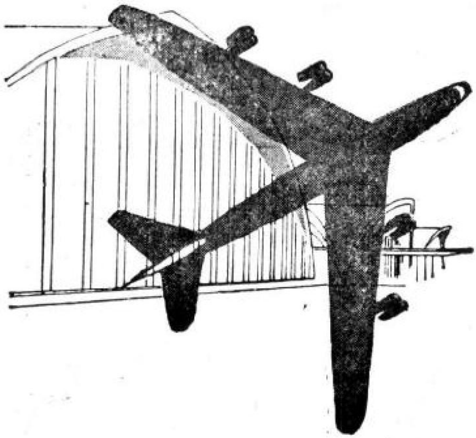
"在这种有条不紊的安排之下，
宇宙中存在着奇妙的对称；
各种天体轨道的运行和量值，
它们的关系是那样的协调一定."
——哥白尼

写 在 前 面

我们写这本关于曲线的小册子，是为了与你们共享在探索有趣的数学概念中的愉快．读数学书就象阅读惊险小说或探索一个洞穴一样．数学里有许多令人惊奇的、迷惑人心的、变幻多端的和生动有趣的概念．我们希望当你在数学中独立进行探索时，借助于这本书，你将会由于发现各种新概念而感到乐趣盎然．

然而，读这本书不同于读别的书，例如，读故事书．开始时要读得慢一些，养成手头备有铅笔和纸的习惯．在阅读时应该充分地用它们来帮助你弄清概念．如果你最初对每句每段并不能十分理解，请不必为此而感到惊讶．但要有耐心．如果你能完成本书中的练习、作图和问题解答，你就会感到本书中一系列的概念容易理解得多了．我们希望这本书会给你带来许多乐趣．

目　　录



一、曲　　线

1. 现实世界中的曲线、形体和模型

我们生活的世界，是一个几何曲线，几何曲面，几何形体以及几何图案的世界．从行星的轨道到大海的波涛，宇宙中这些曲线的轨迹，已经被人们在数学上加以分析．从银河的形态到松球的结构，我们看出外形与图案的和谐．从蝴蝶的对称到雪花的几何形状，足以表明自然界是有待探索的数学图形的模型．

工艺界也离不开曲线、形体和模型．从宇宙飞船的飞行路线到电视的无线电波，这些曲线都有数学图形．从喷气式飞机的形状到挖掘机的设计，它们的外形都要依据数学原理

来设计．从乐器的对称到流线型跑车，它们的基本模型都是几何形体和曲线．

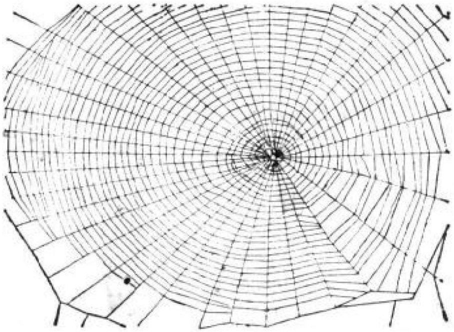


图1　蜘蛛网上许多直线所组成的曲线

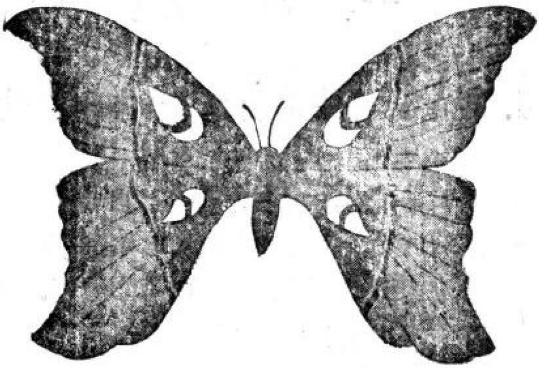


图2　蝴蝶的对称

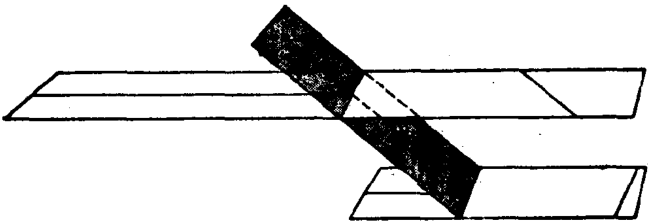
2. 我们生活的空间

我们生存在空间里，这空间整个地围绕着我们．空间有

限度吗？我们说空间可以向任何方向扩展而没有限度．有时我们讲有限的空间，象房间里的空间，电冰箱里的空间等．

空间是直的还是曲的？迄今为止数学家们对这一问题已经争论了好几个世纪了．如果我们在地球上朝一个方向走去，譬如说向西方，我们就会回到出发点，因为地球的表面是个曲面．如果我们打算朝空间内一个方向，譬如向上飞行，我们还会回到我们的出发点吗？

数学家们把空间说成是点的集合．空间没有重量，我们不能看到、听到或触及到空间．我们常说到三维空间：长、宽、高．



3. 空间里的点、线和面

点　我们学习空间里的曲线必须从点开始．正象1是构成计数的基础一样，点是空间的基本元素．那么什么是点呢？我们把点想象为针的尖端或书页上的小点，但都不是．点是没有大小的，我们既看不到它，也摸不着它．数学家所说的点是指空间中的一个位置．记住，一个点仅仅表示空间中

的位置.

线 有时点的集合是线. 因此线是点的集合. 一条线没有宽度和厚度, 但是我们说线是有长度的. 一条线可以朝两个方向无限伸展. 有时我们也讲线是动点的轨迹. 直线的一部分叫做线段. 度量线段用长度单位,例如英寸,厘米和英里等.

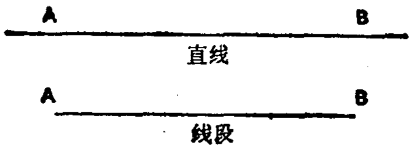


图 3

一条线可以是直线,象直尺的边,一页纸的折痕等. 一条折线是直线段的集合,这些线段有不同的方向,但端点相互联结. 再有就是曲线,曲线经常改变着它的方向.

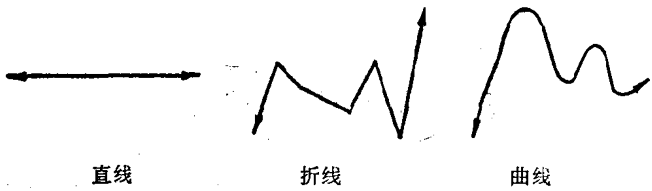


图 4

自然界里常会遇到的直线,如晶体的边、光线和昆虫的腿等. 但是自然界里大多数的是曲线, 例如海边各种各样的贝壳、树干的年轮等都是曲线.

海贝的模型

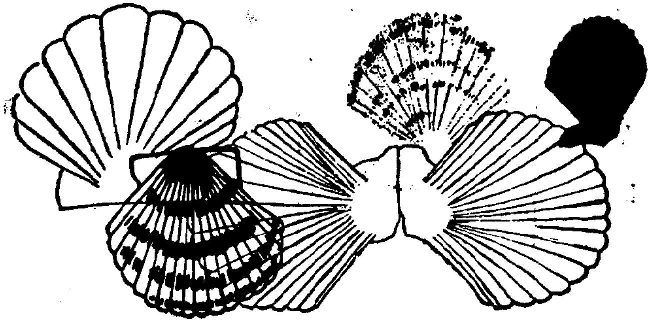


图 5

4. 平面和曲面

有时点的集合是平面．一个平面是平的表面，象桌面和墙壁．但是数学里所讲的平面是无形的．它是点的集合．一个平面没有厚度，但是具有长度和宽度．有时我们也说平面是直线运动的轨迹．一个平面可以无限延伸．平面的一部分可以用面积单位来度量，例如平方尺或亩等．

当一条曲线作非滑动的运动时，它的轨迹是曲面．球是最普通的曲面例子．当直线沿着曲线运动时就形成另外一些曲面．例如直线沿着圆周运动，就形成圆柱曲面．

5. 一维或二维

空间内的直线或平面可有不同的位置，见图 6.

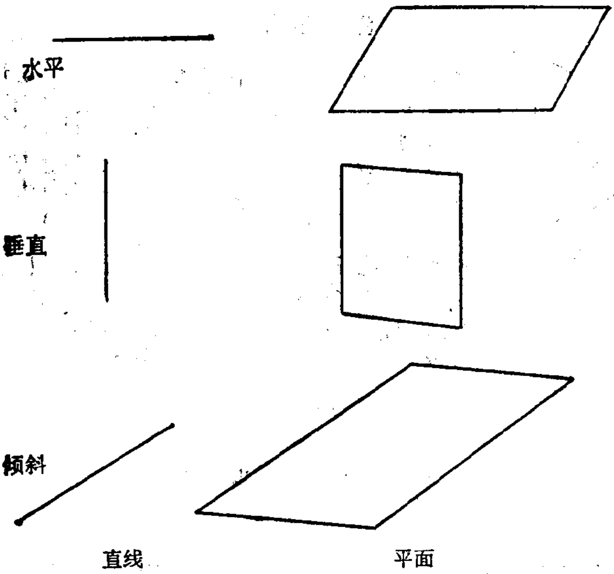


图 6

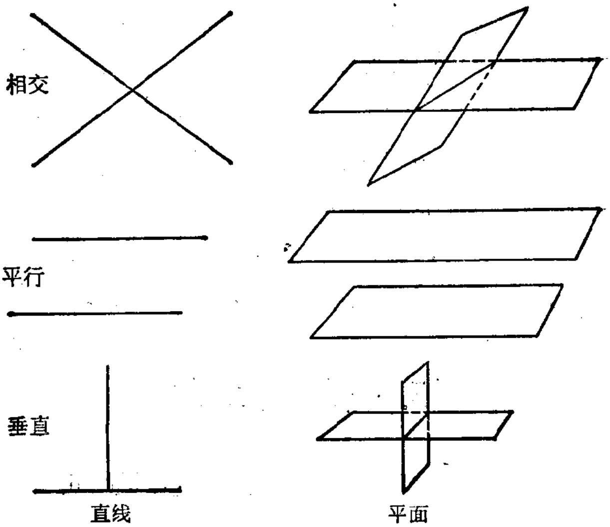
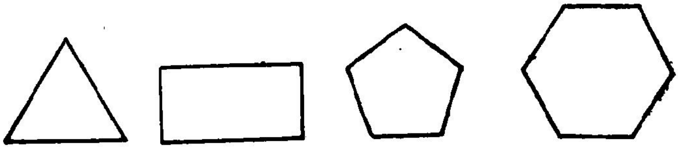


图 7

空间内两条直线或两个平面可以有不同的相互位置关系，见图 7.

当两条直线在不同的平面内而且不相交时，它们叫做**异面直线**．当几条直线在同一平面上两两相交时，组成不同的几何图形叫做**多边形**(图 8).



三角形由三条直线组成　四边形由四条直线组成　五边形由五条直线组成　六边形由六条直线组成

图 8

6. 三维或更多维

当几个平面相交时，组成不同的几何立体叫做**多面体**(图 9).

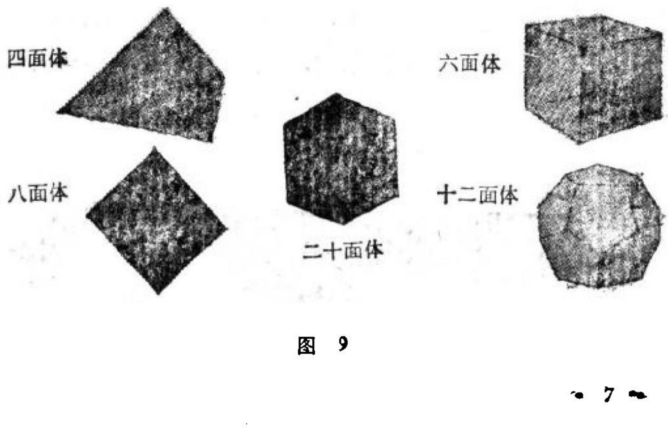


图 9

我们说点是没有大小尺寸的．当点运动时，它的轨迹可以形成线段，线段有一个尺寸（一维）：长度．一条线段被两个端点所限制．

如果一条线段作垂直于它本身的运动，运动的距离等于该线段的长，那么就形成一个二维的正方形．这正方形是由4条同一尺寸的线段围成的．如果这正方形作垂直于这一平面的运动，运动的距离等于正方形一边的长，那么就形成一个立方体，立方体具有三维．这个有限的空间由6个二维平面围成的．同样，这个立方体“作垂直于这一空间”的运动，那么就形成了四维的超立方体．这个有限的超立方体由8个三维空间围成的．上述中每运动一步，角或顶点的个数是原来的二倍．这样对于四维立方体它的顶点的个数是2^4，或16．对于n维来说，顶点的个数是2^n．如果我们检查每一图形的边数和表面数，我们发现边数是$n\cdot 2^{n-1}$，而它的表面数是

$$(n^2-n)2^{n-3}.$$

因此，空间是个数无限而且广度也无限的点的集合．空间也可看作无数条直线的集合或无数个平面的集合．空间也可看作无数个有限空间的集合．下面就来研究空间里的曲线．

7. 空间里的位置

为了在空间里沿着曲线航行，我们必须确定点的位置并描述曲线．我们在数学上用图象来处理．让我们复习一下某些为了把空间扩展到四维的代数知识吧！我们怎样在直线上确定一个点呢？最简单的方法是用直线表示数轴，见图 10．

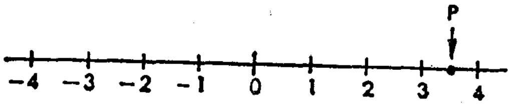


图 10

这样，我们便能用数字在直线上确定一个点，如 $3\frac{1}{2}$ 可以定在 P 点．确定点的位置的数叫做坐标．对于数轴上的每一点我们可以找到一个数，这个数就给定了它的位置． 方程 $x=3\frac{1}{2}$表示 P 点在直线上的位置．表示点在这条直线上的位置的一般方程是 $x=a$，这里 a 是任意实数．

其次，让我们来考虑点在平面上的位置． 如果我们想要在平面上确定一个点，我们就用两条数轴，如图 11 中的 Ox 和 Oy．

这样，P 点就被由坐标 (3，4) 所构成的有序数对所确定了．对于这平面上的任意一点，我们总能找到一对实数来确定它． $x+y=7$ 是经过 P 点的直线方程的一个例子．同样，在 xy 坐标平面内的任何直线方程总可写成 $ax+by=c$ 的形式．对于象 $x^2+y^2=25$ 的方程，它的图象是曲线，如图 11 中

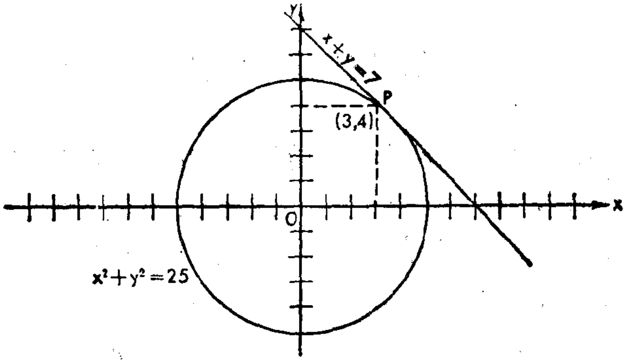


图 11

的圆．因为 $3^2+4^2=25$，所以 P 点也在这个圆上．

在三维空间中确定一点 P 需要三条数轴 Ox，Oy，Oz，如图 12．这样空间中的一点 P 被三个一组的有序数组(3，4，2)所确定．在这个空间中的任何一点，我们总能找到三个一组的实数组来确定它．

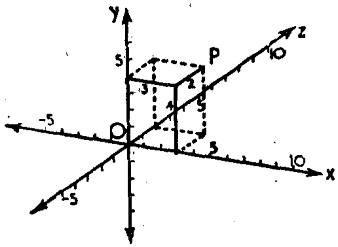


图 12

$x+y+z=9$ 是经过 P 点的平面方程的一个例子．在这个空间里任何平面的方程总可写成 $ax+by+cz=d$ 的形式．如果方程为 $x^2+y^2+z^2=29$，这个图象就是一个曲面，如