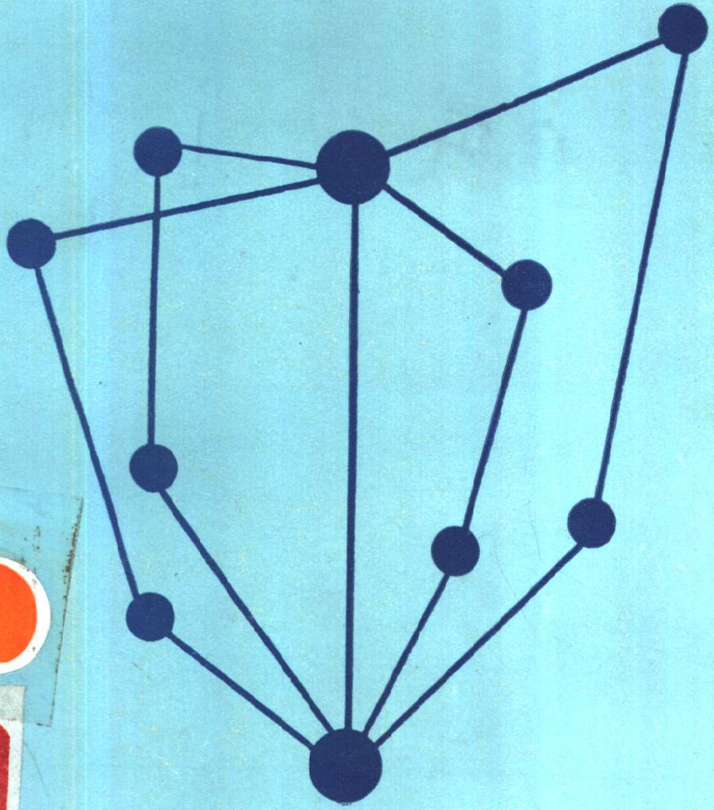
线性规划教程

陈重穆　编著

四川教育出版社



线性规划教程

陈[illegible] 编著

四川教育出版社
一九八八·成都

责任编辑：何伍鸣

封面设计：何一兵

版面设计：唐　瑛

线性规划教程

四川教育出版社出版　　（成都盐道街三号）

四川省新华书店发行　　七二三四印刷厂印刷

开本787×1092毫米1／32　印张　6　字数　千

1988年8月第一版　　1988年8月第一次印刷

印数：1—1,020　册

书号：ISBN 7—5408—0289—8/G,255　　定价：1.83元

前　言

一、关于一般线性规划。本书介绍的“直除法”与一般常见的“单纯形法”，其基本计算都是初等变换，但直除法与单纯形法有较大的不同：（1）单纯形法是从几何观点出发，直除法是从代数观点出发，其理论较为简明。（2）单纯形法要从一个预备解开始才能进行计算，为此常须引入若干“伪变数”，使变数个数增多而使计算复杂化。直除法则不需如此，常是一旦求出预备解就得最优解。（3）单纯形法在计算中只变动约束条件而保持目标函数不变。直除法是两者均可变，从而具有较大的机动性、灵活性。（4）由于目标函数保持不变，单纯形法的检验数迭代一次要计算一次，为此单纯形法计算表就较为复杂。直除法则是边计算边检验，检验数自然在表中出现，计算表格较简。（5）规划的各种重要信息在直除法计算表中表现得较为直接，从最后规划表中可直接读出对偶规划的解。敏感性分析所需各项数据也较易从表中得出，从以下事实可以说明直除法优越之

处：用单纯形法进行敏感性分析不如直除法来得简明，特别对约束条件系数a_{ij}，当x_j为基变量时的敏感性分析，按单纯形法，由于太复杂一般书对此都付之阙如。本书用直除法并不太烦难地完成了a_{ij}的敏感性分析（§2.3）。（6）由于直除法的规划表把数据间的关系表现得较为明白，因而用它来研讨对偶规划就使得对偶规划的理论变得较为简明。

二、关于"运输问题"。本书介绍的"加减法"与常见的表上作业法（闭回路法，位势法）更有较大的不同。加减法进一步发挥了变动目标函数的优势，完全在目标函数（运价表）上进行加减变换，并引入了"端点给值法"使"加减法"具有崭新的面貌。加减法的优点从以下事实足以说明："指派问题"是一类特殊的线性规划，它有专门的克尼格解法。用加减法来求解并不比克尼格法更复杂（§3.3）。从某种意义上说克尼格法是加减法的特例。

三、关于"机具调配问题"。这是一类在保证完成计划前提下，调配机具、劳力，使生产效益最大的线性规划问题。在m或n不超过2时，可用"效率比"方法，但此法不适用于一般情况，对一般情况尚未见有专门方法。令人感到惊奇的是，解它的乘除法竟与加减法非常类似，不过一是用加减，一是用乘除。如果用对数化乘除为加减，乘除法就基本上与加减法一致了。

四、关于“配套生产”（康托诺维奇问题A）。解此问题有康氏本人的“解乘数法”。本书引入了“模数”使能应用乘除法。乘除法明显比解乘数法为简，特别免去了解乘数法中一系列解方程的计算。

五、关于“图上作业法”。图上作业法为我国的独创，具特殊的风格，在实际中简便易行，故本书特予介绍。本书所介绍的“一次调整法”及“检验图”方法是目前所知的最好的方法。在理论证明上本书也作了一定处理，使之更完整简明。

六、本书可以在36学时内授完。根据需要可以只讲绪论及前三章，把第四、第五两章作为阅读材料，这样大致需要15学时。也可专讲绪论及第一，第二两章，约需10学时。重点放在应用上的读者，各章的有限可达性的论证都可略去。在其他的教材中关于方法的有限可达性大多是没有讲的。这样所需的时间还可以减少。

七、编写本书时曾参考下列各书，特别在例、习题方面。谨向这些书的作者致谢。

谈祥柏，《线性规划》。

管梅谷，郑汉鼎，《线性规划》，山东科学技术出版社，1983。

李维铮等，《运筹学》，清华大学出版社，1985。

何建坤等，《实用线性规划及计算机程序》，清华大学出版社，1985。

第一本书是一本好的普及读物，可以在教学中参考。第二本书是一本专著性质的书，材料丰富，理论完备，对从事线性规划研究及教学的同志很有参考价值。第三、四两本书重点在应用上，宜于在教学及实际工作中参考。

八、本书最后附有邱克同志用FORTRAN77语言编写的按直除法解一般线性规划的程序，供应用者参考。

目　　录

绪　论

线性规划是应用数学的一个分支，它是为了解决实际生活中如何安排人力、物力、财力，使它们发挥最大限度的效益，使完成任务最多，最快、最好、最省的这样一些实际问题而发展起来的。

§0.1　例　子

例1　设已知成人每天需要维生素A、B、C的最低量及甲、乙、丙、丁四种食品每单位含这些维生素的数量以及这些食品的价格如下页表所示。问如何搭配这四种食品使能满足需要而花钱最少？

设甲、乙、丙、丁四种食品依次按x_1、x_2、x_3、x_4个单位搭配。于是所花的钱应为：

$$S(x)=0.8x_1+0.5x_2+0.9x_3+1.5x_4$$

而且x_1，x_2，x_3，x_4还应满足：

	单位	甲	乙	丙	丁	每天需要量
A	国际单位	1000	1500	1750	3250	4000
B	毫克	0.6	0.3	0.7	0.3	1
C	毫克	17.5	7.5	0.0	30.0	30
单价	元	0.8	0.5	0.9	1.5	

$$\begin{cases} 1000x_1+1500x_2+1750x_3+3250x_4\geqslant 4000 \\ 0.6x_1+0.3x_2+0.7x_3+0.3x_4\geqslant 1 \\ 17.5x_1+7.5x_2 \qquad +30x_4\geqslant 30 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geqslant 0 \end{cases}$$

我们须要求出满足上述条件的x，使$S(x)$达到最小值。其中x表示向量$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$，（下文中x有类似用法，我们不再作说明）。

可以增加三个未知量x_5，x_6，x_7使前三个不等式变为等式而得数学问题如下：

极小化 $$S(x)=0.8x_1+0.5x_2+0.9x_3+1.5x_4+0x_5+0x_6+0x_7$$

$$\begin{cases} 1000x_1+1500x_2+1750x_3+3250x_4-x_5 \qquad =4000 \\ 0.6x_1+\ 0.3x_2+\ 0.7x_3+\ 0.3x_4 \qquad -x_6=1 \\ 17.5x_1+\ 7.5x_2 \qquad +30x_4 \qquad -x_7=30 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7\geqslant 0 \end{cases}$$

例 2　用长为7.4米的钢材作钢架，每套钢架由长为2.9米，2.1米和1.5米的元钢各一根组成，问应如何下料，使用的原料最省？

在7.4米长的钢材上截取所需长度的钢材有如下八种截法

根数 \ 方式 / 长度	一	二	三	四	五	六	七	八
2.9米	1	2	0	1	0	1	0	0
2.1米	0	0	2	2	1	1	3	0
1.5米	3	1	2	0	3	1	0	4
残　　料	0	0.1	0.2	0.3	0.8	0.9	1.1	1.4

选择方式六可达配套之要求，每套残料为0.9米。为了使残料最少以节约原材料，我们希望在残料低于0.9米的一至五种方式中找到适当的搭配，以达配套之要求。

设一至五种方式按比例$x_1:x_2:x_3:x_4:x_5$配搭，并可设$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1$。于是得数学问题：

极小化　$S(x)=0x_1+0.1x_2+0.2x_3+0.3x_4+0.8x_5$

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1$$

$$x_1+2x_2+0x_3+x_4+0x_5=0x_1+0x_2+2x_3+2x_4+x_5$$

$$=3x_1+x_2+2x_3+0x_4+3x_5$$

或　　极小化　$S(x)=0.1x_2+0.2x_3+0.3x_4+0.8x_5$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ x_1+2x_2-2x_3-x_4-x_5=0 \\ 2x_1-x_2+2x_3-x_4+3x_5=0 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\geqslant 0 \end{cases}$$

例3　某村有可耕地80亩，这些地适于洋芋、小麦、大豆、白菜、菠菜的种植和畜牧，各种农作物中，有的是春播秋收，有的是秋播冬收，在不同季节各种作物需要的投资和劳力都不一样，由于资金、劳力及计划等限制，应如何安排，也就是要种多少亩洋芋，多少亩小麦，多少亩大豆，……，才能使全年收入最多？

为了研究解决这个问题，现在把所需各项数据列如下表：

因　　素	单位	洋芋	小麦	大豆	畜牧	白菜	菠菜	因素上限
土地（春）	亩	1	1	1	1			80
土地（秋）	亩		1	1	1	1	1	80
1～2月劳力	日	16	5					280
3～4月劳力	日	12	8					300
5～6月劳力	日	10	10	15				320
7～8月劳力	日			4		40		320
9～10月劳力	日			1		10	70	300
11～12月劳力	日		8	1		40	160	320
资　　金	元	80	40	20	30	80	50	2400
计　　划	亩		⩾10			两项不少于2亩		
收　　入	元	170	140	80	50	400	380	

在上表的第三个纵列中表示种一亩洋芋需要1～2月劳动日16个，3～4月劳动日12个，5～6月劳动日10个，投资80元，无计划限制，最后能收入170元，其余各列表示的意思与此类似。最后“因素上限”一列表示土地、每月能提供的劳力及资金的最大限度。

设x_1为洋芋种植亩数，

x_2为小麦种植亩数，

…………………………

x_6为菠菜种植亩数，

于是全年收入为

$$S(x)=170x_1+140x_2+80x_3+50x_4+400x_5+880x_6$$

x应满足

$$\begin{cases}
x_1+x_2+x_3+x_4 \leqslant 80\\
x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 \leqslant 80\\
16x_1+5x_2 \leqslant 280\\
12x_1+8x_2 \leqslant 300\\
10x_1+10x_2+15x_3 \leqslant 320\\
4x_3+40x_5 \leqslant 320\\
x_3+x_5+70x_6 \leqslant 300\\
8x_2+x_3+10x_5+160x_6 \leqslant 320\\
80x_1+40x_2+20x_3+30x_4+80x_5+50x_6 \leqslant 2400\\
x_2 \geqslant 10\\
x_5+x_6 \geqslant 2\\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 \geqslant 0
\end{cases}$$

我们的目的是求出满足上述条件的x_i（$i=1,2,\cdots,6$），使$S(x)$达到最大值。

象例1一样，我们可以添入一些新未知量，使上述诸不等式变为等式，而得数学问题：

$$\max S(x)=170x_1+140x_2+80x_3+50x_4+400x_5+880x_6$$

$$\begin{cases}
x_1+x_2+x_3+x_4+x_7=80\\
x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_8=80\\
16x_1+5x_2+x_9=280\\
12x_1+8x_2+x_{10}=300\\
10x_1+10x_2+15x_3+x_{11}=320\\
4x_3+40x_5+x_{12}=320\\
x_3+x_5+70x_6+x_{13}=300\\
8x_2+x_3+10x_5+160x_6+x_{14}=320\\
80x_1+40x_2+20x_3+30x_4+80x_5+50x_6+x_{15}=2400\\
x_2-x_{16}=10\\
x_5+x_6-x_{17}=2\\
x_i\leqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ 17
\end{cases}$$

§0.2 同解变换与判别定理

在研究人力、物力、财力的合理调配和使用，在作出基建、设施、经营、管理中的正确决策等大量实际问题中，常会提出与上节相似的数字问题，即求一个线性函数的最小值

或最大值，而诸变量是非负的，且满足一组线性不等式和等式，这个问题就叫做**线性规划**，它可以归结为如下的标准形式：

$$\min \text{(或}\max\text{)}\ S(x)=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \qquad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\geqslant 0 \end{cases} \qquad (2)$$

或简写为

$$\min \text{(或}\max\text{)}\ S(x)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m \\ x_j\geqslant 0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \end{cases}$$

$S(x)$ 叫做**目标函数**。方程（2）叫做**约束条件**。满足约束条件的非负解叫**预备解**或**可行解**。使目标函数达最优值的预备解叫**最优解**或**规划的解**。现在我们来阐明约束条件中出现不等式时，仍可化为等式而归结为（2）的形式。设有约束条件

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i \qquad \text{(或}\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\geqslant b_i\text{)}$$

于是引入新变量 $y_i\geqslant 0$，得

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+y_i=b_i \qquad \text{(或}\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-y_i=b_i\text{)}$$