反饋(回授)控制
系統詳解

曉園出版社

世界圖書出版公司

反馈（回授）控制系统详解

Van de 维戈特 著
吴昌晖 译

*

晓园出版社
世界图书出版公司北京公司 重印
北京朝阳门内大街 137 号
北京中西印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1993 年 6 月第 一 版　开本：850×1168 1/32
1993 年 6 月第一次印刷　印张：11.75
印数：0001－900　字数：28.2 万字
ISBN：7－5062－1621－3/TN・18
定价：9.50 元 (W_B9303/23)

前　言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則澈底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與舖路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精微的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進境上有更上層樓的成就。

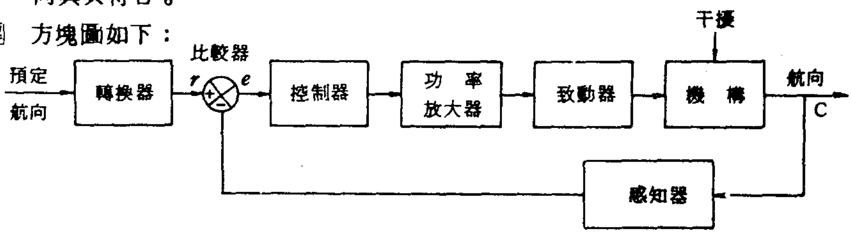
反饋(回授)控制系統詳解

（目　　錄）

第一章　介紹及線性動力模型

1　試建立一艘船的自動導航系統之基本方塊圖。描述圖中各方塊，指出何種硬體可用於指出所預定的航向（ desired heading ），以及如何使實際航向與其符合。

解　方塊圖如下：



轉換器：將預定航向轉換爲與其成比例之電壓信號（ r ）。

可用一旋轉式之電位計（可變電阻）達成此硬體功能。

感知器：偵測實際航向並轉換爲電壓信號。羅盤即可達成此功能。

比較器：比較預定航向電壓信號與感知器所傳回之信號產生一誤差信號 $e = r - c$.

控制器：處理誤差信號，並決定機構之動作方式，輸出一控制信號。

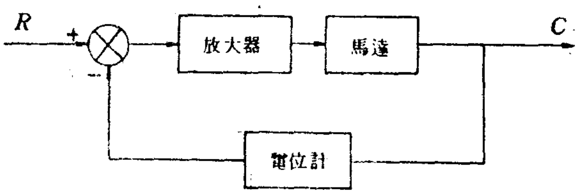
上述四者皆可用機械方式，轉換爲機械信號，以控制整個系統。

機　構：控制船的航向，可能爲一操舵機構，或噴射引擎或其他。

動作原理：若航向與預定航向不同時，則必定存在一誤差信號（ $e = r - c$ ）使系統繼續修正其航向，使實際航向與預定航向一致。

2　對一個使用馬達來控制軸角度的定位系統，畫一個方塊圖，電位計可用來測量位置。

解



3 在方塊圖中，輸出 y 及輸入 x 的關係爲 $y = 2x + 0.5x^3$

(a)求在下列操作點時的 y

(i) $x_0 = 0$，(ii) $x_0 = 1$，(iii) $x_0 = 2$

(b)求在這些操作點附近的線性化模式，在這些模式中，重新定義 x，y 表對於操作點值的變化量。

解 $y(x) = 2x + 0.5x^3$

(a) (i) $y(0) = 0$

(ii) $y(1) = 2.5$

(iii) $y(2) = 8$

(b) $y \overset{\triangle}{=} \Delta y = \left(\dfrac{df}{dx}\right)_{x_0} \Delta x \overset{\triangle}{=} \left(\dfrac{df}{dx}\right)_{x_0} x = (1.5x_0^2 + 2)x$

(i) for $x_0 = 0$，$y = 2x$

(ii) for $x_0 = 1$，$y = 3.5x$

(iii) for $x_0 = 2$，$y = 8x$

4 一方塊圖之輸出 z 爲兩個輸入，x 和 y 的函數如下式：

$$z = 5x - 3y + x^3 + y^3 + x^2 y$$

試導出在操作點 $x_0 = 1$，$y_0 = 2$，之小變化量（ small variation ）的線性化模式。於此模式中，重行定義 x，y，z 以表示對於操作點之變化量。

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 5 + 3x^2 + 2xy$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -3 + 3y^2 + x^2$

$\Delta z = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)\Delta y$ $\quad$ then $\quad \Delta z \Big|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}} = 12\Delta x + 10$

定義：$Z \equiv \Delta z$，$X \equiv \Delta x$，$Y \equiv \Delta y$，則 $Z = 12X + 10Y$

5 求 $r(t) = 2t$，$0 \leqslant t < 1$；$r(t) = 2$，$t \geqslant 1$ 的拉氏轉換

解 $R(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st}\, r(t)\, dt$

$$= \int_0^1 e^{-st}\, 2t\, dt + \int_1^\infty e^{-st}\, 2\, dt$$

$$=-\frac{2}{s}te^{-st}\Big|_{t=0}^{t=1}-\frac{2}{s^2}e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=1}-\frac{2}{s}e^{-st}\Big|_{t=1}^{t\to\infty}$$

$$=-\frac{2}{s}e^{-s}-\frac{2}{s^2}e^{-s}+\frac{2}{s^2}+\frac{2}{s}e^{-s}$$

$$=\frac{2}{s^2}(1-e^{-s})$$

。

6. 在長度爲L的管路中，流體的速度爲v，入口處流體溫度T_i 在 $t=0$時，產生了大小爲A的步階變化，不考慮熱量損失且變數都表變化量。

(a)求出口溫度T_o及其拉氏轉換。

(b)求T_o/T_i 。

解 (a) $\begin{cases} T_i = A\ , & \text{for} \quad t \geqslant 0 \\ T_i = 0\ , & \text{for} \quad t < 0 \end{cases}$

$$\therefore \begin{cases} T_o = A\ , & \text{for} \quad t \geqslant \dfrac{L}{v} \\ T_o = 0\ , & \text{for} \quad t < \dfrac{L}{v} \end{cases}$$

$$\therefore T_o(t) = Au\left(t-\frac{L}{v}\right) \qquad T_o(s)=\frac{A}{s}e^{-\frac{L}{v}s}$$

(b) $$G(s)=\frac{T_o(s)}{T_i(s)}=\frac{\frac{A}{s}e^{-\frac{L}{v}s}}{\frac{A}{s}}=e^{-\frac{L}{v}s}$$

7. 試用終値定理（final value theorem）以決定$c(t)$的穩態値 $c_{ss}=\lim\limits_{t\to\infty}c(t)$，$c(t)$之轉換式$C(s)$如下：

(a) $$C(s)=\frac{s+11}{(s+2)(s+5)}$$

(b) $$C(s)=\frac{2}{s(s+3)}$$

(c) $$C(s)=\frac{4s^2+5s+6}{s(2s^3+7s^2+13s+2)}$$

。

(d) $C(s)=\dfrac{2s^2+5s+1}{s^3+2s^2+3s+4}$

解 (a) $c_{ss}=\lim\limits_{t\to\infty}c(t)=\lim\limits_{s\to 0}s\cdot C(s)=\dfrac{0\times 11}{2\times 5}=0$

(b) $c_{ss}=\lim\limits_{s\to 0}sC(s)=\dfrac{2}{3}$

(c) $c_{ss}=\lim\limits_{s\to 0}sC(s)=\dfrac{6}{2}=3$

(d) $c_{ss}=\lim\limits_{s\to 0}sC(s)=\dfrac{0\cdot 1}{4}=0$

8. 對下列的微分方程及初始條件，寫出其拉氏轉換。

(a) $\ddot{c}+6\dot{c}+13c=5u(t)$，$c_0=1$，$\dot{c}_0=4$

(b) $\ddot{c}+3\dot{c}+4c=7u(t)+2t$，$c_0=1$，$\dot{c}_0=2$

(c) $\ddot{c}+3\dot{c}+4c=6\sin wt$，$c_0=4$，$\dot{c}_0=5$

(d) $\dot{c}+2c=u(t)$，$c_0=1$

解 (a) $s^2C(s)-sc_0-\dot{c}_0+6(sC(s)-c_0)+13C(s)=5\cdot\dfrac{1}{s}$

$\therefore (s^2+6s+13)C(s)=\dfrac{5}{s}-s-10$

$\therefore C(s)=\dfrac{5-10s-s^2}{s(s^2+6s+13)}$

(b) $s^2C(s)-sc_0-\dot{c}_0+3(sC(s)-c_0)+4C(s)=\dfrac{7}{s}+\dfrac{2}{s^2}$

$\therefore (s^2+3s+4)C(s)=\dfrac{2}{s^2}+\dfrac{7}{s}+s+2-3$

$\therefore C(s)=\dfrac{2+7s-s^2+s^3}{s^2(s^2+3s+4)}$

(c) $s^2C(s)-sc_0-\dot{c}_0+3(sC(s)-c_0)+4C(s)=\dfrac{6w}{s^2+w^2}$

$$\therefore (s^2+3s+4)C(s)=4s+5+12+\frac{6w}{s^2+w^2}$$

$$\therefore C(s)=\frac{17+4s+\dfrac{6w}{s^2+w^2}}{s^2+3s+4}$$

(d) $sC(s)-c_0+2C(s)=\dfrac{1}{s}$

$$\therefore (s+2)c(s)=1+\frac{1}{s}$$

$$\therefore C(s)=\frac{s+1}{s(s+2)}$$

9. 求 $G(s)=\dfrac{5(1-0.4s)}{(s+1)(0.2s+1)}$ 的單位步階響應

解 $R=\dfrac{1}{s}$

$$C=GR=\frac{5(1-0.4s)}{s(s+1)(0.2s+1)}=\frac{25-10s}{s(s+1)(s+5)}$$

$$=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+1}+\frac{K_3}{s+5}$$

$$K_1=\frac{25}{5}=5$$

$$K_2=\frac{35}{-1\times(4)}=-\frac{35}{4}$$

$$K_3=\frac{75}{(-5)(-4)}=\frac{15}{4}$$

$$\therefore c(t)=5-\frac{35}{4}e^{-t}+\frac{15}{4}e^{-5t}$$

10. 試計算一系統對於衰減的指數函數輸入 $r(t)=e^{-t}$ 的響應，系統之轉換函數如下：$G(s)=3\cdot\dfrac{s^2+9s+18}{s^2+6s+8}$

解 $C=G\cdot R=3\cdot\dfrac{s^2+9s+18}{s^2+6s+8}\cdot\dfrac{1}{s+1}$

$$=3\cdot\frac{s^2+9s+18}{(s+1)(s+2)(s+4)}\quad(R=\mathcal{L}[r(t)])$$

$$=\frac{10}{s+1}+\frac{(-6)}{s+2}+\frac{(-1)}{s+4}$$

取反拉氏轉換

$c(t)=10\cdot e^{-t}-6\cdot e^{-2t}-e^{-4t}$

11 對下列附初始條件的系統

(i) $\dot{c}+6c=r$，$c(0)=1$

(ii) $\ddot{c}+7\dot{c}+10c=r$，$c(0)=1$，$\dot{c}(0)=4$

求(a)轉換函數 C/R

(b)對初始條件的響應

解 (i) $sC(s)-c_0+6C(s)=R$

(a) $c_0=0$，$C/R=\dfrac{1}{s+6}$

(b) $R=0$，$c(s)=\dfrac{1}{s+6}$

$\therefore c(t)=e^{-6t}$

(ii) $s^2C(s)-sc_0-\dot{c}_0+7(sC(s)-c_0)+10C(s)=R$

(a) $c_0=\dot{c}_0=0$，$C/R=\dfrac{1}{s^2+7s+10}$

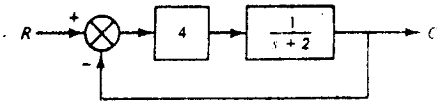
(b) $R=0$，$C(s)=\dfrac{s+4+7}{s^2+7s+10}=\dfrac{3}{s+2}-\dfrac{2}{s+5}$

$\therefore c(t)=3e^{-2t}-2e^{-5t}$

12 如圖P1.12之系統

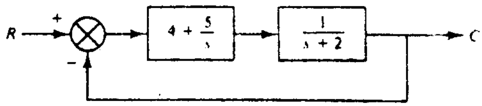
(a)求閉迴路轉換函數

(b)求單位步階響應



(i)

圖 P1.12



(ii)

解 (a) $T = \dfrac{G}{1+G}$

(i) $$T(s) = \frac{\dfrac{4}{s+2}}{1+\dfrac{4}{s+2}} = \frac{4}{s+6}$$

(ii) $$T(s) = \frac{\dfrac{4s+5}{s(s+2)}}{1+\dfrac{4s+5}{s(s+2)}} = \frac{4s+5}{(s+1)(s+5)}$$

(b) $R = \dfrac{1}{s}$

(i) $$C = TR = \frac{4}{s(s+6)} = \frac{\dfrac{2}{3}}{s} + \frac{-\dfrac{2}{3}}{s+6}$$

$$\therefore c(t) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}e^{-6t}$$

(ii) $$C = TR = \frac{4s+5}{s(s+1)(s+5)} = \frac{1}{s} + \frac{-\dfrac{1}{4}}{s+1} + \frac{-\dfrac{3}{4}}{s+5}$$

$$\therefore c(t) = 1 - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{3}{4}e^{-5t}$$

13. 試計算Fig F　　　系統對單位步階函數之響應。

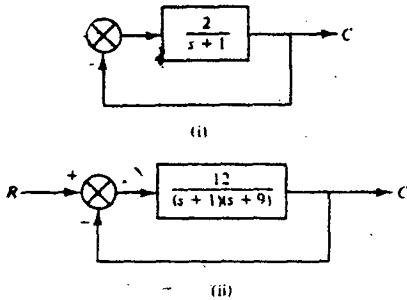


圖 P1.13

解 (i) $\dfrac{C}{R}=\dfrac{\dfrac{2}{s+1}}{1+\dfrac{2}{s+1}}=\dfrac{2}{s+3}$，單位步階（unit step）$\Rightarrow R(s)$

$$-\mathcal{L}(u(t))=\frac{1}{s}$$

$$C=\frac{2}{s+3}\cdot\frac{1}{s}=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{s}+\frac{-1}{s+3}\right],\quad c(t)=\frac{2}{3}\left[1-e^{-3t}\right]$$

(ii) $\dfrac{C}{R}=\dfrac{\dfrac{12}{(s+1)(s+9)}}{1+\dfrac{12}{(s+1)(s+9)}}=\dfrac{12}{s^2+10s+21}$

$$C=\frac{12}{(s+7)(s+3)}\cdot\frac{1}{s}=\frac{\left(\frac{4}{7}\right)}{s}+\frac{(-1)}{s+3}+\frac{\left(-\frac{3}{7}\right)}{s+7}$$

$$c(t)=\frac{4}{7}-e^{-3t}+\frac{3}{7}e^{-7t}$$

14. 對圖P1.13的系統，決定其對初始條件的響應。

(i) $c(0)=1$

(ii) $c(0)=1$，$\dot{C}(0)=1$

解　(i) $C=\dfrac{\dfrac{2}{s+1}}{1+\dfrac{2}{s+1}}R=\dfrac{2}{s+3}R$

$R=0$ ，$c(0)=1$ ，$\therefore sC(s)-c_0+3C(s)=0$

$\therefore C(s)=\dfrac{1}{s+3}$

$\therefore C(t)=e^{-3t}$

(ii) $C=\dfrac{\dfrac{12}{(s+1)(s+9)}}{1+\dfrac{12}{(s+1)(s+9)}}=\dfrac{12}{s^2+10s+21}R$

$\therefore s^2C(s)-sc_0-\dot{c}_0+10(sC(s)-c_0)+21C(s)=0$

$\therefore C(s)=\dfrac{s+11}{s^2+10s+21}=\dfrac{2}{s+3}-\dfrac{1}{s+7}$

$\therefore c(t)=2e^{-3t}-$

15.　如圖P1.15所示之系統

(a)求E/R。

(b)用終值定理求步階輸入的穩態誤差$e=r-c$。

(c)觀察K值及系統型態對系統特性的影響。

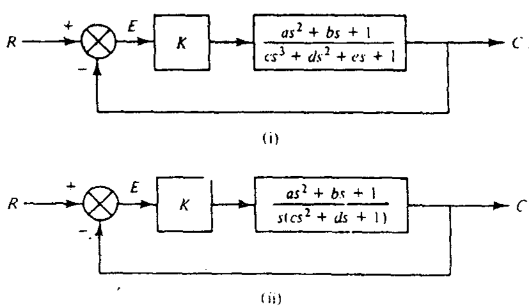


圖 P1.15

解 (a) $E = R - C$

$$\therefore \frac{E}{R} = 1 - \frac{C}{R} = 1 - T = 1 - \frac{K \cdot \dfrac{as^2+bs+1}{cs^3+ds^2+es+1}}{1 + \dfrac{K(as^2+bs+1)}{cs^3+ds^2+es+1}}$$

$$= \frac{cs^3+ds^2+es+1}{cs^3+(d+Ka)s^2+(e+Kb)s+1+K}$$

(b) $$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{cs^3+ds^2+es+1}{s(cs^3+(d+Ka)s^2+(e+Kb)s+1+K)}$$

$$= \frac{1}{1+K}$$

(c)當 $K\uparrow$，$e_{ss}\downarrow$，且型態數高，$e_{ss}\downarrow$

16. 對於圖 P 1.16 之系統，求其轉換函數 E/R，並求其在單位步階函數及單位斜坡函數輸入時之穩態誤差值。

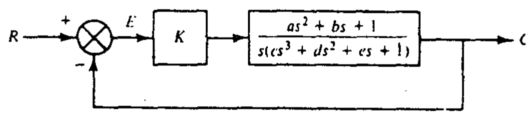


圖 P1.16

解 $E = R - C \Rightarrow E/R = 1 - C/R$

$$\frac{C}{R} = \frac{K \cdot \dfrac{(as^2+bs+1)}{s(cs^3+ds^2+es+1)}}{1 + K \cdot \dfrac{(as^2+bs+1)}{s(cs^3+ds^2+es+1)}} = \frac{K \cdot B(s)}{S \cdot A(s) + K \cdot B(s)}$$

$$\begin{pmatrix} B(s) = as^2+bs+1 \\ A(s) = cs^3+ds^2+es+1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{E}{R} = \frac{S \cdot A(s)}{S \cdot A(s) + K \cdot B(s)}$$

(i) 單位步階輸入 $R(s) = \frac{1}{s}$

$$E_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}s\cdot E(s)$$

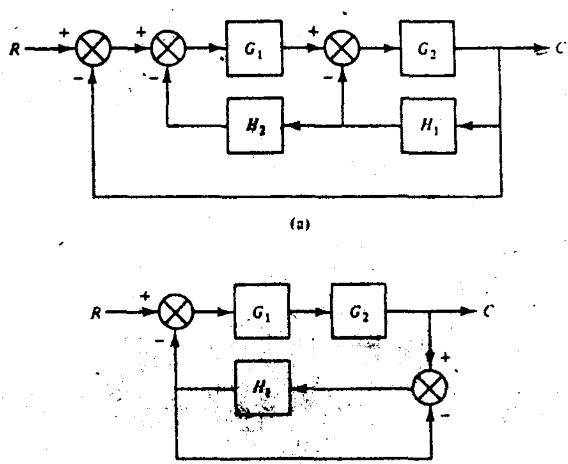
$$=\lim_{s\to 0}\cancel{s}\cdot\frac{s\cdot A(s)}{s\cdot A(s)+K\cdot B(s)}\cdot\frac{1}{\cancel{s}}=\frac{0}{0+K}=0$$

(ii) 單位斜坡輸入　$R(s)=\dfrac{1}{s^2}$

$$E_{ss}=\lim_{s\to 0}s\cdot E(s)=\lim_{s\to 0}\cancel{s}\cdot\frac{\cancel{s}\cdot A(s)}{s\cdot A(s)+K(B(s))}\cdot\frac{1}{\cancel{s^2}}$$

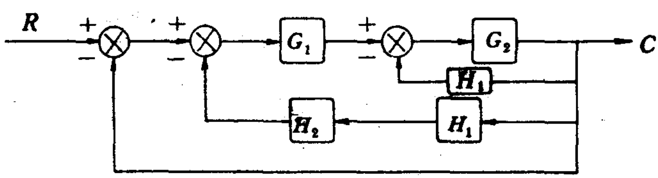
$$=\frac{1}{0+K}=\frac{1}{K}$$

17. 簡化圖P1.17的方塊圖，求其閉迴路轉換函數。

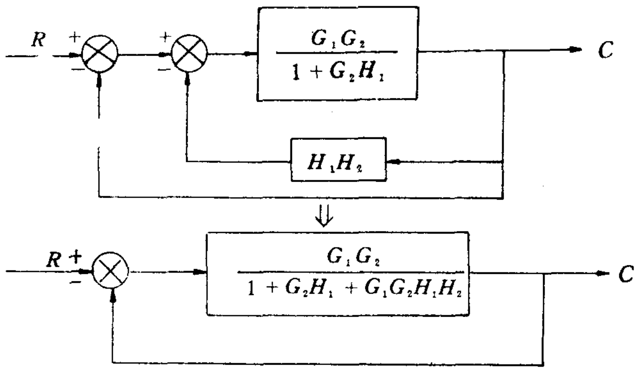


圖P1.17

解　(a)簡化成



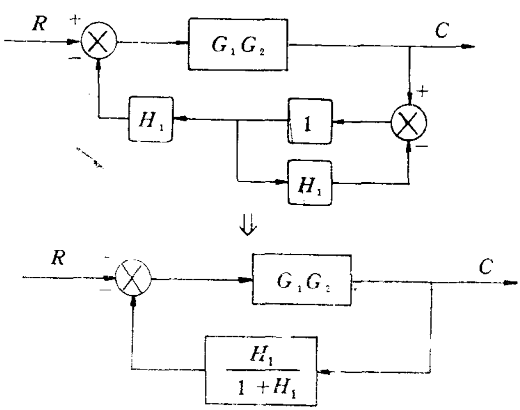
⇓



$$\therefore G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\dfrac{G_1G_2}{1+G_2H_1+G_1G_2H_1H_2}}{1+\dfrac{G_1G_2}{1+G_2H_1+G_1G_2H_1H_2}}$$

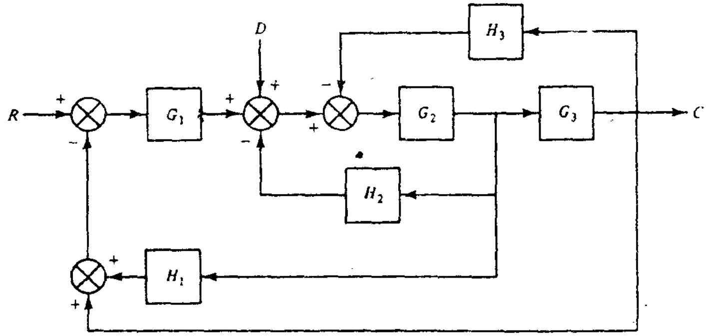
$$=\frac{G_1G_2}{1+G_2H_1+G_1G_2+G_1G_2H_1H_2}$$

(b)簡化成



$$\therefore G=\frac{C}{R}=\frac{G_1G_2}{1+\dfrac{G_1G_2H_1}{1+H_1}}=\frac{G_1G_2(1+H_1)}{1+H_1+G_1G_2H_1}$$

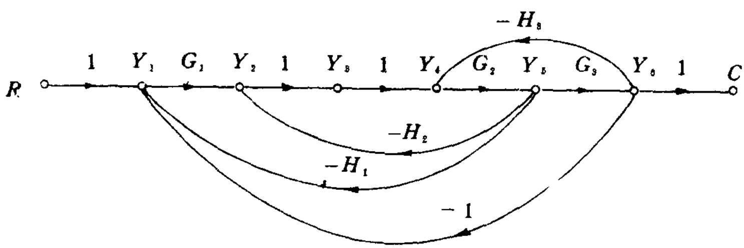
18. 求圖P1.18所示系統的C/R及C/D。



圖P1.18

解　換成signal flow graph

(a) for $D=0$



by Marson's formula

$$T(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\Sigma M_k\Delta_k}{\Delta}$$

$$=\frac{G_1G_2G_3}{1+G_2H_2+G_2G_3H_3+G_1G_2H_1+G_1G_3G_2}$$

(b) for $R=0$