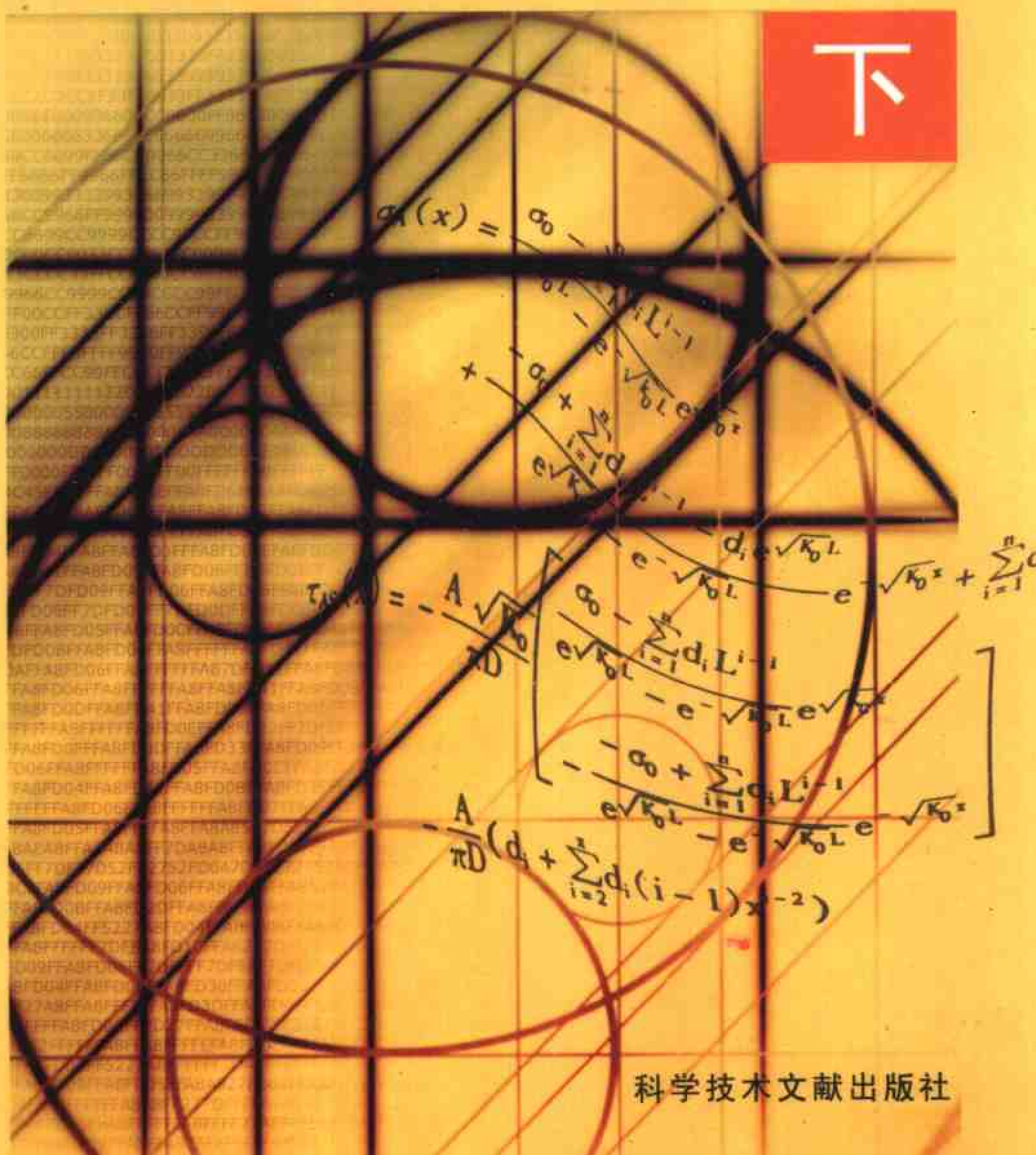
面向21世纪《高等数学》改革教材

GAODENGSUXUE JIAOCHENG

主编/阎大桂　但琦

高等数学教程

下



科学技术文献出版社

面向21世纪《高等数学》改革教材

高等数学教程

（下　册）

主编　阎大桂　但　琦

编委　（以姓氏笔画为序）

付诗禄　但　琦　余文革

林　琼　顾又川　阎大桂

蒋继宏

主审　严尚安

科学技术文献出版社

Scientific and Technical Documents Publishing House

·北　京·

目 录

第八章　多元函数微分学

上册中我们所讨论的函数都只有一个自变量,这种函数叫做一元函数.而实际问题中往往牵涉到多方面的因素,从变量关系来看就是依赖于多个自变量的函数,称为多元函数.因此有必要研究多元函数以及多元函数的微积分学.

多元函数是一元函数的推广和发展,它的许多概念及处理问题的思想方法与一元函数既有共同之处,也有实质性的差异,学习时应特别注意多元函数与一元函数相应内容之间的共同性与特殊性.而从二元函数到更多元函数就没有什么本质差别了.本章重点介绍二元函数的微分法及其简单应用.

第一节　多元函数

一、平面点集

一个变量 x 的变域是数轴上的点集,当考虑两个变量 x,y 时,x 与 y 的一组值 (x,y) 可看作是平面上的一个点 P 的直角坐标.于是两个变量的变域就相当于平面上的一个点集,常用 D,E 等表示.如 $D=\{(x,y)|x>0,y>0\}$ 表示平面上所有满足 $x>0,y>0$ 的点 (x,y) 所组成的集合.下面介绍一些平面点集的有关概念.

(1)邻域:设 $P_0(x_0,y_0)$ 是平面上一点,δ 是一个正数,称平面点集 $\{(x,y)|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$ 为点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 δ **邻域**,记为 $U(P_0,\delta)$;称平面点集 $\{(x,y)|0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$ 为点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 δ **去心邻域**,记为 $\hat{U}(P_0,\delta)$.

(2)内点:设 $P_0\in E$,若存在 P_0 的一个 δ 邻域 $U(P_0,\delta)$,使得 $U(P_0,\delta)\subset E$,则称 P_0 为 E 的内点。若 E 中的每一点都是内点,则称 E 为**开集**.

(3)边界点:若点 P_0 的任一邻域中既有属于 E 的点,又有不属于 E 的点,则称 P_0 为 E 的一个**边界点**,全体边界点的集合称为 E **的边界**.

(4)区域:设 E 为一开集,若对于 E 内任意两点都能用位于 E 内的折线连接起来,则称 E 为**开区域**.开区域连同边界称为**闭区域**.开区域和闭区域统称为**区域**.如果区域可以延伸到无限远,就称这个区域是**无界的**.如果区域总可以被包含在一个以原点为中心而半径适当大的圆内,则称此区域是**有界的**.

二、多元函数的概念

我们先考虑几个多元函数的例子：

例 1 设三角形底边长为 x，底边上的高为 y，那么三角形的面积 S 为

$$S=\frac{1}{2}xy$$

这个关系式给出了 S 与 x、y 的对应规律，当 $x>0$、$y>0$ 时，给定 x、y 的每一组值都有一个确定的 S 值与之对应.

例 2 球心在原点，半径为 R 的上半球面的方程为

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

对于 $x^2+y^2\leq R^2$ 上的每一个点 $P(x,y)$，通过 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 都有一个确定的 z 值与之对应.

例 3 一定量的理想气体的压强 P、体积 V 和绝对温度 T 之间具有关系

$$P=\frac{RT}{V}$$

其中 R 为常数，当 V、T 在一定范围($V>0,T>0$)内取定一对值时，就有一确定的 P 值。

由以上例题，我们可以提出二元函数的概念。

定义 1 设有变量 x、y、z，如果对于变量 x、y 在它们的变化范围 D 内所取的每一对值，变量 z 按照一定的法则，总有一个确定的值与之对应，则称 z 为 x、y 的**二元函数**，记作

$$z=f(x,y)$$

其中 x、y 称为**自变量**，函数 z 又称为**因变量**，自变量的变化范围 D 称为**函数的定义域**。

例 4 求下列函数的定义域，并指出它们是怎样的区域？

(1) $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$；　　(2) $z=\ln(x+y)$；

(3) $z=\arcsin\dfrac{x}{2}+\arcsin\dfrac{y}{3}$；　　(4) $z=\dfrac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}$.

解 (1)由根式函数的要求，该函数的定义域为 $x^2+y^2\leq R^2$，即圆周 $x^2+y^2=R^2$ 及其内部，有界闭区域(图 8－1).

(2)根据对数函数的定义域，该函数的定义域为 $x+y>0$，无界开区域(图 8－2).

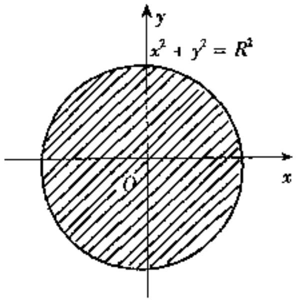


图 8－1

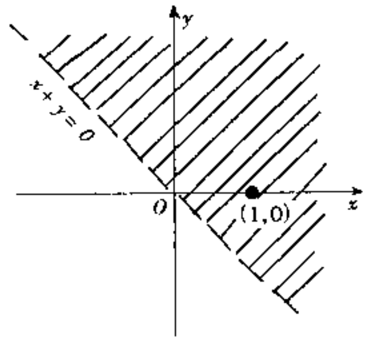


图 8－2

(3)此函数的定义域应为这两项各自定义域的公共部分，即

$$|x|\leq 2,|y|\leq 3$$

它的图形是包括边界的矩形,有界闭区域(图 8-3).

(4)$z=\dfrac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}$的定义域是 $x^2+y^2<1$,即不包括边界的单位圆,有界开区域(图 8-4).

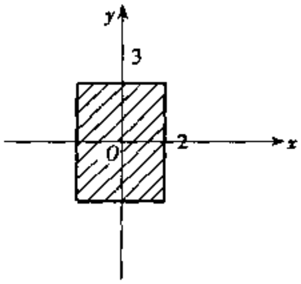


图 8-3

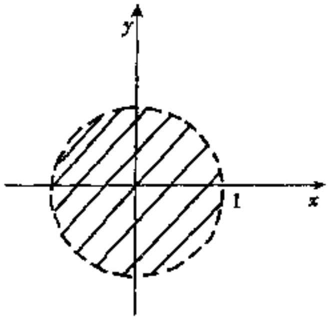


图 8-4

二元函数的几何意义是它表示空间中一曲面. 设 $z=f(x,y)$的定义域为 xOy 平面上某一区域 D,对于 D 中的每一点 $P(x,y)$,按照函数关系就可得一 z 值,于是就确定了空间中的 $M(x,y,f(x,y))$. 当 $P(x,y)$在 D 中变动时,点 $M(x,y,f(x,y))$的轨迹是一个曲面,它就是 $z=f(x,y)$的图形(图 8-5). 例如 $z=1-x-y$ 的图形是一个平面,其定义域是 xOy 平面;$z=\sqrt{x^2+y^2}$的图形是以原点为顶点的上半圆锥面,它的定义域是 xOy 平面.

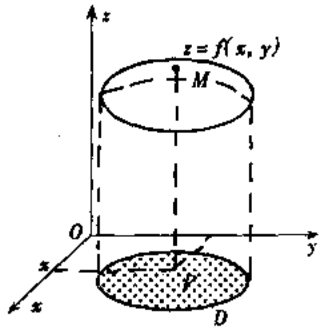


图 8-5

从二元函数的概念很容易推广到三元函数以及三元以上的函数. 有三个自变量的函数就是三元函数 $u=f(x,y,z)$. 一般地,有 n 个自变量的函数就是 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 二元及二元以上的函数统称为**多元函数**.

三、二元函数的极限

函数的极限是研究当自变量变化时,函数的变化趋势。对于二元函数,就是讨论当自变量 $x\to x_0, x\to y_0$,即点 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$时,函数的变化趋势.

与一元函数的极限比较,在二元函数的极限问题中,自变量的变化情况要复杂得多,因为在平面上,点 $P(x,y)$趋向于点 $P_0(x_0,y_0)$的方式是多种多样的。用 ρ 表示点 $P(x,y)$与点 $P_0(x_0,y_0)$之间的距离

$$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

如果我们用 $\rho\to 0$ 来表示二元函数的极限过程,它就使我们可仿照一元函数的极限定义给出二元函数极限的定义.

定义 2　设 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$附近有定义(在点 P_0 函数可以没有定义),如果动点 $P(x,y)$沿任意路径趋于定点 $P_0(x_0,y_0)$时(即当 $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0$ 时),$f(x,y)$总是趋于一个常数 A,我们就称 A 为函数 $f(x,y)$当 $x\to x_0, y\to y_0$,时的极限,记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=A,\ \lim_{P\to P_0} f(x,y)=A$$

类似于一元函数极限的"$\varepsilon-\delta$"定义，上述定义可叙述为：设函数 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$附近有定义(在点 P_0 可以没有定义)，如果对任意给定的正数 ε，都存在一个正数 δ，使得当

$$0<\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

时，都有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立，则称 A 为函数 $z=f(x,y)$ 当 $x\to x_0, y\to y_0$ 时的极限.

例 5 求证 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$.

证 由于 $(|x|-|y|)^2\geq 0$，可得 $x^2+y^2\geq 2|xy|$，所以

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leq\frac{|x|}{2}$$

显然，不论(x,y)沿怎样的路径趋向与(0,0)时，$|x|$都趋近于零，于是由定义得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{x^2}{x^2+y^2}=0.$$

注意：所谓二元函数极限存在，是指当 $P(x,y)$以任意方式趋近于 $P_0(x_0,y_0)$时，函数都无限接近于 A. 如果点 $P(x,y)$只是沿某一特殊路径，比如沿着某一条曲线或某一直线趋近于 $P_0(x_0,y_0)$时，函数无限接近于某一确定值，我们不能断定函数的极限存在；但是，如果当 $P(x,y)$以不同方式趋近于 $P_0(x_0,y_0)$时，函数趋近于不同的值，那么就可以断定这个函数的极限不存在.

例 6 考察函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x=y=0\end{cases}$$

在点(0,0)的极限.

解 当点 $P(x,y)$沿 x 轴趋近于点(0,0)时，$y=0, f(x,0)=0$,

$$\lim_{x\to 0}f(x,0)=0$$

同样，当点 $P(x,y)$沿 y 轴趋近于(0,0)时，$x=0, f(0,y)=0$,

$$\lim_{y\to 0}f(0,y)=0$$

虽然点 $P(x,y)$沿以上两种特殊路径趋于原点，函数都趋向于 0，但极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)$是不存在的，因为当点 $P(x,y)$沿着直线 $y=kx$ 趋近于点(0,0)时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y=kx\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+(kx)^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

它随着 k 值的不同而变化.

例 7 计算 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{\sin(x+y)}{x+y}$.

解 令 $x+y=t$，则当$(x,y)\to(0,0)$时，$t\to 0$，于是

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{\sin(x+y)}{x+y}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

四、二元函数的连续性

有了二元函数的极限概念,就容易给出二元函数的连续概念.

定义3　设 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 及其附近有定义,如果当 $P(x,y)$ 趋近于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时,函数 $f(x,y)$ 的极限存在,且极限值就等于函数在点 P_0 处的函数值 $f(x_0,y_0)$,即

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处**连续**.

如果 $f(x,y)$ 在区域 D 内的每一点连续,那么就称它在区域 D **内连续**.在区域 D 上连续的二元函数的图形是一张连续的曲面.

例8　讨论下列函数在原点处的连续性:

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

解　(1)由例5知

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$$

所以函数 $f(x,y)$ 在原点连续.

(2)由例6知,当 $x\to 0,y\to 0$ 时,函数 $f(x,y)$ 的极限不存在,所以该函数在原点不连续.

若二元函数在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处不连续,则称此函数在点 $P_0(x_0,y_0)$ **间断**.例如上例(2)中点(0,0)是函数的间断点.二元函数的间断情况要比一元函数复杂,它不但可以有间断点,还可能有间断线,例如函数 $z=\dfrac{1}{1-x^2-y^2}$ 在圆周 $x^2+y^2=1$ 上每一点都没有定义,所以圆周上的每一点都是间断点.

类似于一元函数,多元连续函数的和、差、积、商(在分母不为零处)均为连续函数;多元连续函数的复合函数也是连续函数.

将由变量 x、y 的基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合步骤所构成,并可用 x、y 的一个解析式表示的函数称为**二元初等函数**.一切二元初等函数 $z=f(x,y)$ 在其定义域上连续.

于是,二元初等函数 $z=f(x,y)$ 在其定义域内总有:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

例9　求 $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\y\to 3}}\dfrac{x+y}{xy}$.

解　因为函数 $f(x,y)=\dfrac{x+y}{xy}$ 是初等函数,且点(2,3)在该函数的定义域内,故

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}}\frac{x+y}{xy}=f(2,3)=\frac{5}{6}$$

有界闭区域上的多元连续函数有以下的两个性质：

性质 1 （最大值和最小值定理）在有界闭区域上连续的函数必有最大值和最小值.

性质 2 （介值定理）在有界闭区域上连续的函数必取得介于函数的最大值和最小值之间的任何值.

习　题 8-1

1. 已知函数 $f(x,y)=xy+\frac{x}{y}$，求 $f(1,-1)$.

2. 若 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\frac{x}{y}$，证明 $f(tx,ty)=t^2f(x,y)$.

3. 已知 $f(u,v,w)=u^w+w^{u+v}$，求 $f(x+y,x-y,xy)$.

4. 求下列各函数的定义域，并画出定义域的图形：

(1) $z=\ln(y^2-2x+1)$　　(2) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$

(3) $z=\arcsin\frac{y}{x}$　　(4) $\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$

5. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{1-xy}{x^2+y^2}$　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{1}{x^2+y^2}$

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$　　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin xy}{x}$

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{xy}}$

6. 下列函数在何处是间断？

(1) $z=\frac{y^2+2x}{y^2-2x}$　　(2) $z=\frac{1}{\sin\pi y}+\frac{1}{\sin\pi x}$

(3) $z=\sin\frac{1}{x^2+y^2}$　　(4) $z=\frac{1}{y-x}$

第二节　偏　导　数

一、一阶偏导数

在一元函数中，我们已经看到变化率（导数）的重要性，对于多元函数同样需要讨论它的变化率. 由于多元函数的自变量不止一个，因变量和它的自变量关系要比一元函数复杂得多. 这一节，我们讨论多元函数对其中一个自变量的变化率. 在二元函数 $z=f(x,y)$ 中，考虑函数对 x 的变化率时，只有自变量 x 变化，而另一个自变量 y 暂时固定（即看作常数），这时它就是 x 的一元函数，这函数对 x 的导数称为二元函数 z 对于 x 的偏导数.

定义　设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 及其附近有定义，当 y 固定在 y_0，而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应地函数有增量

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.z_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \text{或 } f_x(x_0,y_0)$$

若极限

$$\lim_{\Delta y \to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

存在，则称极限值为 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导函数，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.z_y\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \text{或 } f_y(x_0,y_0)$$

如果函数 $z=f(x,y)$ 在 D 内每一点 (x,y) 处对 x 的偏导数存在，这个偏导数就是 x、y 的函数，称为函数对自变量 x 的偏导函数，记作

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x},z_x \text{ 或} f_x(x,y)$$

类似地，可以定义 $z=f(x,y)$ 对自变量 y 的偏导函数，记作

$$\frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y},z_y\text{或} f_y(x,y)$$

显然，函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 就是偏导函数 $f_x(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的函数值；$f_y(x_0,y_0)$ 就是偏导函数 $f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的函数值. 偏导函数也简称为偏导数.

例 1　求 $z=x+3xy+y^2$ 在点 $(1,2)$ 处的偏导数.

解　对 x 求偏导数时，把 y 看作常量，$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+3y$；对 y 求偏导时，把 x 看作常量，$\frac{\partial z}{\partial y}=3x+2y$；将 $(1,2)$ 代入上面的结果，就得到：

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=8,\qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=7$$

例 2　求 $z=x^2\sin 2y$ 的偏导数.

解　$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin 2y,\frac{\partial z}{\partial y}=2x^2\cos 2y$.

例 3　求 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的偏导数.

解　这是一个三元函数，偏导数的定义与计算法与二元函数一样. 对 x 求偏导时，把 y、z 看作常量，

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

由于 r 中 x、y、z 是对称的，即三个变量互换后，函数不变. 因此，用变量轮换的办法，即可得出另外两个偏导数：

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\qquad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

例 4　求 $z=x^y$ 的偏导数.

解　对 x 求偏导时,把 y 看作常量,这时是幂函数,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$$

对 y 偏导时,把 x 看作常量,这时是指数函数,　　故

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$$

例 5　设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$$

求函数在原点处的偏导数.

解　函数在原点处对 x 的偏导数为

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$$

同理有

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$$

二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数有下述几何意义:二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形为一空间曲面,当 y 固定 $y=y_0$ 时,曲面 $z=f(x,y)$ 被平面 $y=y_0$ 所截得的曲线方程为

$$\begin{cases}z=f(x,y_0)\\ y=y_0\end{cases}$$

这条曲线在点 M_0 处的切线对 x 轴的斜率就是导数 $\dfrac{d}{dx}f(x,y_0)\Big|_{x=x_0}$,即偏导数 $f_x(x_0,y_0)$. 同理,$f_y(x_0,y_0)$ 的几何意义是曲面被平面 $x=x_0$ 所截得的曲线在点 M_0 处切线对 y 轴的斜率(图 8-6).

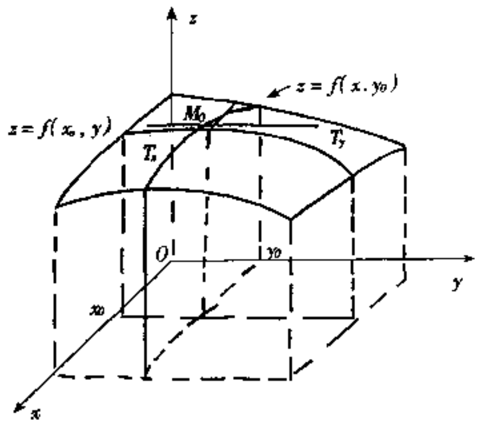


图 8-6

二、高阶偏导数

函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y)$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y)$ 一般还是 x、y 的函数. 如果这两个函数的偏导数也存在,则称它们是函数 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数. 这时有四个二阶偏导数:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y)\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y)\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)$$

其中 f_{xy} 和 f_{yx} 称为混合偏导数. 同样可以得到三阶、四阶…以及 n 阶偏导数.

例 6　求 $z=x^3y^2-3xy^3-xy+1$ 的二阶偏导数.

解　$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2-3y^3-y$　　$\frac{\partial z}{\partial y}=2x^3y-9xy^2-x$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy^2$　　$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6x^2y-9y^2-1$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=6x^2y-9y^2-1$　　$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x^3-18xy$

在这个例题中，两个混合偏导数是相等的.一般说，由于求导的次序不同，两个混合偏导数不一定相等.我们叙述下面重要结论.

定理　如果函数 $z=f(x,y)$的两个二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$及$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$在区域$D$内连续，则在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等.

换句话说，二阶混合偏导数在连续的条件下与求导的次序无关.

例7　证明函数 $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$满足方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

证　$$\frac{\partial u}{\partial x}=-x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}+3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$=-\frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}+\frac{3x^2}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5}$$

由于 u 中x、y、z是对称的，因此用轮换变量的办法就可以得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}+\frac{3y^2}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}+\frac{3z^2}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5}$$

因此　$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$=-\frac{3}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}+\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5}$$

$$=0$$

习　题 8-2

1.设$f(x,y)=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$，求$f_x(3,4)$.

2.设$f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$，求$f_x(x,1)$.

3.求下列函数对于每一个自变量的偏导数：

(1)$z=x^3y-y^3x$　　(2)$z=\arcsin\frac{y}{x}$

(3)$z=\frac{xe^y}{y^2}$　　(4)$z=\ln\tan\frac{x}{y}$

(5)$z=\left(\frac{1}{3}\right)^{-y/x}$　　(6)$z=(1+xy)^y$

(7) $u=z^{y/x}$ (8) $u=\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos z}$

4. 设 $z=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$，验证 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}$.

5. 设 $z=e^{y\frac{x}{2}}$，验证 $2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

6. 曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{1+x^2+y^2} \\ x=1 \end{cases}$ 在点 $(1,1,\sqrt{3})$ 处的切线与 y 轴正向所成倾角是多少？

7. 求下列各函数的二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial^2 y}$：

(1) $z=x^4+y^4-4x^2y^2$ (2) $z=\sin^2(ax+by)$

(3) $z=\arcsin(xy)$ (4) $z=y^{\ln x}$

8. 设 $f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$，求 $f_{xx}(0,0,1),f_{xz}(1,0,2),f_{yz}(0,-1,0)$ 及 $f_{zzx}(2,0,1)$.

9. 证明函数 $u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$ 满足 $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}$.

10. 设 $u=z\arctan\frac{x}{y}$，验证 $\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}+\frac{\partial^2 u}{\partial^2 z}=0$.

*11. 证明下列等式：

(1) 当 $z=f(x)g(y)$ 时，$z_xz_y=zz_{xy}$

(2) 当 $z=yf(x)+xg(y)$ 时，$xz_x+yz_y=z+xyz_{xy}$

*12. 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，证明：

$$\frac{\partial^2(\ln r)}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2(\ln r)}{\partial^2 y}+\frac{\partial^2(\ln r)}{\partial^2 z}=\frac{1}{r^2}$$

第三节 全 微 分

一元函数 $y=f(x)$ 在点 x 的微分 dy 是函数的增量 Δy 关于自变量的增量 Δx 的线性主部，即增量 Δy 可表示为

$$\Delta y=dy+\alpha=A\Delta x+\alpha$$

其中 $A(x)$ 与 Δx 无关，当 $\Delta x\to 0$ 时，α 是 Δx 的高阶无穷小. 作为一元函数微分概念的推广，我们引入二元函数全微分的概念.

定义 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的**全增量**

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y) \tag{1}$$

可表示为

$$\Delta Z=A\Delta x+B\Delta y+\alpha \tag{2}$$

其中 $A(x,y),B(x,y)$ 与 Δx、Δy 无关，当 $\Delta x\to 0$、$\Delta y\to 0$ 时，α 是 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 的高阶无穷小量. 则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处**可微**，而 $A(x,y)\Delta x+B(x,y)\Delta y$ 称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的**全微分**，记作 dz 或 df，即

$$dz=A\Delta x+B\Delta y \tag{3}$$

与一元函数类似；自变量的全微分等于它的增量，即用 dx、dy 分别表示 Δx、Δy，因此有

$$dz=Adx+Bdy$$

定理 1　如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 可微，则此函数在该点的两个偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$ 都存在，且 $A=\frac{\partial z}{\partial x}$，$B=\frac{\partial z}{\partial y}$，即

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy \tag{4}$$

证　已知 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 可微，因此有

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\alpha$$

其中 $$\lim_{\rho\to 0}\frac{\alpha}{\rho}=0.$$

先考虑对 x 的偏导数，此时 y 看作常量，因此有 $\Delta y=0$，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2}=|\Delta x|$，上式变为

$$f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=A\Delta x+\alpha$$

其中 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha}{|\Delta x|}=0.$$

所以，$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(A+\frac{\alpha}{\Delta x}\right)=A$$，即 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 存在，且有 $\frac{\partial z}{\partial x}=A$.

同理可证 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 存在，且 $\frac{\partial z}{\partial y}=B$. 从而可得：$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$.

例 1　计算函数 $z=x^2y+y^2$ 的全微分.

解　$\because \frac{\partial z}{\partial x}=2xy$，　$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y$

$$\therefore dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=2xydx+(x^2+2y)dy$$

例 2　计算函数 $z=e^{xy}$ 在点 $(2,1)$ 处的全微分.

解　$\because \frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}$，　$\frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}$，　$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)}=e^2$，　$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)}=2e^2$

$$\therefore \left.dz\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=e^2dx+2e^2dy$$

例 3　求 $u=xy^2z^3$ 的全微分.

解　$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2z^3$，　$\frac{\partial u}{\partial y}=2xyz^3$，　$\frac{\partial u}{\partial z}=3xy^2z^2$

$$\begin{aligned}du&=y^2z^3dx+2xyz^3dy+3xy^2z^2dz\\&=yz^2(yzdx+2xzdy+3xydz)\end{aligned}$$

我们知道，一元函数在某点的导数存在是微分存在的充分必要条件. 但对于多元函数来说，情况就不同了. 当函数的各偏导数都存在时，虽然能形式地写出 $\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$，但它与 Δz 之差并不一定是 ρ 的高阶无穷小，因此它不一定是全微分. 换句话说，各偏导数存在只是全微分存在的必要条件而不是充分条件. 例如，函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x=y=0\end{cases}$$

在原点 $(0,0)$ 处有 $f_x(0,0)=0$ 及 $f_y(0,0)=0$，所以

$$f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y=0$$

$$\Delta z=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

当点$(0+\Delta x,0+\Delta y)$沿直线 $y=x$ 趋近于点$(0,0)$时，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{2}|\Delta x|$，$\Delta z=\frac{\Delta x\cdot\Delta x}{2(\Delta x)^2}$，于是

$$\frac{\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\rho}=\frac{\Delta x\cdot\Delta x}{\sqrt{2}|\Delta x|\cdot 2(\Delta x)^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}|\Delta x|}$$

当 $\rho\to 0$ 时，它不趋近于 0，即

$$\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]$$

不是比 ρ 高阶的无穷小，所以函数在原点处的全微分不存在，即函数在原点处不可微.

但是，如果再假定函数的各偏导数连续，则可保证全微分存在，即有下面的定理.

定理 2 如果函数 $z=f(x,y)$的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$在点$P(x,y)$连续，则函数在该点的全微分存在.

证 要证明函数 $z=f(x,y)$在点 $P(x,y)$可微，就是要证明

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+a$$

其中 A、B 与 Δx、Δy 无关，a 是ρ 的高阶无穷小. 由于已知两个偏导数连续，利用拉格朗日中值定理将全增量 Δz 化成偏导数形式.

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)\\&=[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)]+[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]\end{aligned}$$

在第一个方括号内，$y+\Delta y$ 保持不变，因而可以看作是 x 的一元函数$f(x,y+\Delta y)$的增量，应用拉格朗日中值定理，得到

$$\begin{aligned}&f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)\\&\quad=f_x(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y)\Delta x\qquad(0<\theta_1<1)\end{aligned}$$

由假设 $f_x(x,y)$在点(x,y)连续，所以

$$f_x(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y)=f_x(x,y)+a_1$$

其中 a_1 是当 $\rho\to 0$ 时的无穷小. 于是

$$\begin{aligned}&f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)\\&\quad=f_x(x,y)\Delta x+a_1\Delta x\end{aligned}$$

同理，在第二个括号内，x 保持不变，它只是 y 的函数，可得

$$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)=f_y(x,y)\Delta y+a_2\Delta y$$

其中 a_2 是当 $\rho\to 0$ 时的无穷小. 所以

$$\Delta z=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y+a_1\Delta x+a_2\Delta y \tag{5}$$

令 $a=a_1\Delta x+a_2\Delta y$，有

$$\begin{aligned}\left|\frac{a}{\rho}\right|&=\left|\frac{a_1\Delta x+a_2\Delta y}{\rho}\right|\le|a_1|\left|\frac{\Delta x}{\rho}\right|+|a_2|\left|\frac{\Delta y}{\rho}\right|\\&\le|a_1|+|a_2|.\end{aligned}$$

所以，当 $\rho\to 0$ 时，$\frac{a}{\rho}\to 0$. 故函数 $z=f(x,y)$在点 $P(x,y)$处是可微的.

根据全微分概念可知，函数的全增量和全微分之间有关系式

$$\Delta z=\mathrm{d}z+a$$

由于

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

因此得到近似公式

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

$$\approx \mathrm{d}z=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y$$

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y$$

以上两个公式可用来对二元函数进行近似计算和误差估计.

例4　要制作一个圆柱形的无盖桶,其内圆柱的半径为 R,高度为 H,桶底与桶壁的厚度均为 K,试计算所需材料体积的近似值.

解　设内圆柱的体积为 V,则

$$V=\pi R^2H$$

如果 R 与 H 都取增量 $\Delta R=\Delta H=K$,则 V 的增量 ΔV 即为所需的材料的体积.由近似公式

$$\Delta z\approx \mathrm{d}z=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y,\text{ 则有}$$

$$\Delta V\approx \mathrm{d}V=\frac{\partial V}{\partial R}\Delta R+\frac{\partial V}{\partial H}\Delta H$$

由于

$$\frac{\partial V}{\partial R}=2\pi RH,\quad \frac{\partial V}{\partial H}=\pi R^2,\quad \Delta R=\Delta H=K$$

所以 $\Delta V\approx\pi K(2RH+R^2)$为所求的近似值.

习　题8-3

1. 已知 $z=x^2-xy+y$,

   (1) 求点(x_0,y_0)处的全增量 Δz;

   (2) 当 x 从2变到2.1,y 从2变到1.9时,全增量 Δz 的值为多少?

2. 求下列各函数的全微分:

   (1)$z=xy+\dfrac{x}{y}$　　(2)$z=\sin(xy)$

   (3)$z=\arctan\dfrac{x}{y}$　　(4)$z=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

   (5)$z=2xe^{-y}-3\sqrt{x}+\ln 3$　　(6)$z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

   (7)$u=x^{yz}$　　(8)$u=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+z^2}}{y}$

3. 求函数 $z=\ln\sqrt{1+x^2+y^2}$在点(1,2)处的全微分.

4. 求函数 $z=x^2y^3$,当 $x=2,y=-1,\Delta x=0.02,\Delta y=-0.01$ 时的全增量 Δz 和全微分 $\mathrm{d}z$ 以及 $\Delta z-\mathrm{d}z$.

第四节　复合函数求导法与隐函数求导法

一、复合函数求导法则

假设函数 $z=f(u,v)$通过中间变量 $u=\varphi(x,y)$、$v=\psi(x,y)$而成为 x、y 的复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$,我们要寻求一个像一元函数那样的复合函数的求导公式,可以不必