高等学校试用教材

优化方法与最优控制

上海交通大学 陈陈 编著

机械工业出版社

高等学校试用教材

优化方法与最优控制

上海交通大学　陈　陈　编著

机械工业出版社

（京）新登字054号

本教材主要介绍规划中的优化技术和最优控制的理论与计算机求解的算法。全书共分优化方法和最优控制两大部分。优化方法部分包括基本概念、线性规划及非线性规划等三章；最优控制部分包括变分、极小值原理、求解用的数值方法、线性调节器、动态规划及最小时间调节器等七章。

本书为高等学校工业电气自动化专业的教材（取材相当于国外80年代电气工程系研究生教学内容），也可作电气、仪表、自动控制、计算机应用等有关专业教学用书，还可供从事自动控制及系统工程的工程技术人员参考。

优化方法与最优控制
上海交通大学 陈 陈 编著
*
责任编辑：赖尚元 版式设计：霍永明
封面设计：郭景云 责任校对：熊天荣
责任印制：卢子祥
*
机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）
邮政编码：100037
（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）
北京市房山区印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行·新华书店经售
*
开本787×1092 1/16·印张13 1/2·字数328千字
1993年5月北京第1版·1993年5月北京第1次印刷
印数 0 001—1 200·定价：3.95元
*
ISBN 7-111-03474-0/TP·169（课）

前　　言

自动化专业解决的问题主要有管理和控制两大类，都存在着不同形式的寻优要求。《优化方法与最优控制》是自动化领域研究生必修的理论基础课程。本教材大纲由工业电气自动化专业教学指导委员会自动控制理论组讨论拟订，要求60学时，计算机作业较多。初稿经编审组各位教授评阅，提出许多宝贵意见，由同济大学徐衍华教授主审。

本课程包括优化方法和最优控制两大部分，这两部分相对独立又有共通之处。本教材主要吸取美国普杜（Purdue）大学教学内容，加之编著者本人和学生们的研究成果，注重坚实的数学基础，并强调计算方法。

在此书出版之际，编著者特别感谢普杜大学的J.Y.S.Luh教授和V.B.Haas教授，是他们最早把编著者带入这两个领域并给予了出色的指导，也借此机会感谢在本书有关的研究工作中作出了可喜贡献的我的学生杨剑波、徐昌模等。

目　录

第一篇 优 化 方 法

优化的概念来源已久。无论进行新系统设计或者改进原有系统，历来都要提出好几个方案，甚至列出所有可能采用的方案（即枚举），再从中选取最佳方案。自从出现了优化方法，它通过数学推导形成算法或逻辑过程，并利用数值计算迭代，即可直接求得最优方案，一举改变了过去用试凑法或实验及实例研究解决问题的途径。它是方法学上的一大变革，不仅大大节省了计算工作量，而且增进了决策的科学性。

优化方法是运筹学的重要组成部分，主要包括线性规划、非线性规划、整数规划及动态规划等。所应用的数学表达方式主要是代数方程组，一般不包括微分方程和差分方程。数学概念涉及线性代数、微积分以及实变函数中的一些内容。优化方法产生的经济效益是巨大的，所研究问题的规模也大，数值计算繁重，通常整个计算过程都在计算机上实现。本课程重点在于介绍各种优化方法的基本理论和算法逻辑，如何恰当地选择优化技术以及成功地应用这些方法应考虑的因素。

第一章 优化中的基本概念

人们不仅在设计系统时应用优化方法，而且更多地是在对现有系统运行进行规划调度时应用优化方法。将一个具体的工程问题或社会经济问题抽象成典型的优化问题本身就是一种艺术，是能否成功地解决问题的关键。它取决于工作人员的经验以及对各种优化技术掌握的熟练程度。

优化问题的构成通常有下列几个方面：

① 定义系统的边界：一开始就必须确定所研究系统的范围，把它和周围的环境分隔开。为了便于分析，我们倾向于把复杂系统分成若干子系统，然后分别处理。由于人为地把系统和环境之间以及子系统和子系统之间的交互联系割断了，所得到的系统只是近似地描述现实。

② 制订优化目标：选择判断系统设计或运行优劣的标准即优化目标，又称性能指标或优化判据。常用的优化目标是经济指标，细分起来还有成本、利润、资金回收、益本比等；有时也采用技术指标，如：最短生产周期、最大生产率、最小能耗等等。只求某一个性能指标的极大值或极小值称为单目标优化，而多目标优化则考虑在互相矛盾的目标之间如何进行折衷，以求得到各方面均能接受的优化方案。目标不同所得到的最优方案自然也不同。

③ 确定独立变量：系统受客观条件制约，因而固定不变的量称为参数，而在制定生产计划或设计方案时可以改变的量称为变量。问题中必须包括影响系统运行或设计的所有重要变量。变量的选取也取决于我们对问题研究所要求的详细程度。

④ 系统模型：通常系统模型由基本物料和能量平衡方程、工程设计关系和物理过程的

特性方程组成。此外，还附有许多有关运行范围、性能需求限制以及资源供应可能性等不等式。系统模型应表示各变量之间的关系或所存在的约束。

第一节　有关目标函数及约束的概念

在单变量优化问题中，变量 x 是标量，目标函数 $f(x)$ 是 x 的函数，也是标量。

定义：如图1-1所示，当 x 在 a 至 b 的闭区间内变化，即 $x\in[a,b]$，若 $f(x)$ 有上界和下界，则 $f(x)$ 可能达到的最(极)大值为其上界，而可能达到的最(极)小值为其下界。

定义：如图1-2所示，在 x 的整个域内，若 $f(x)$ 无上界（或无下界），则 $f(x)$ 无最大值（或无最小值）。

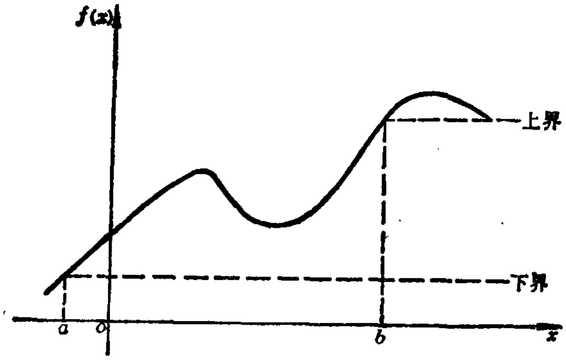

图1-1　目标函数和独立变量

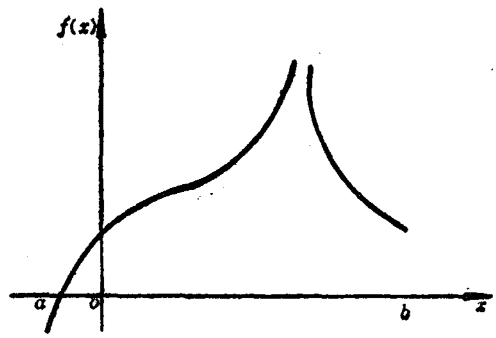

图1-2　无界函数

定义：x 所在的闭区间 $[a,b]$ 称为约束或可行域。

例1-1　无约束线性函数（见图1-3）既无极大值也无极小值。

例1-2　二次函数（见图1-4）只有一个极值。

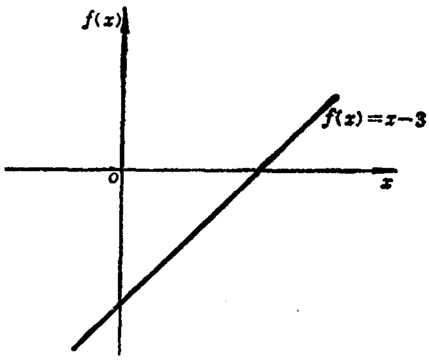

图1-3　无约束线性函数 $f(x)=x-3$

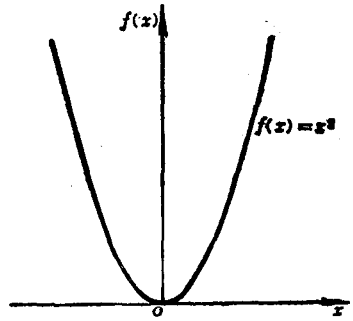

图1-4　极值点 $x=0$ 的二次函数 $f(x)=x^2$

例1-3　指数函数 $f(x)=e^{-x}$（见图1-5），$x\geqslant 0$，只有极大点。

定义：函数在 x_0 处连续的条件是：

① 函数 $f(x)$ 在 x_0 处的函数值 $f(x_0)$ 存在。

② 函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限和右极限相等，并等于 x_0 处的函数值 $f(x_0)$，即：

$$\lim_{h\to 0} f(x_0-h)=\lim_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0) \tag{1-1}$$

$$h>0$$

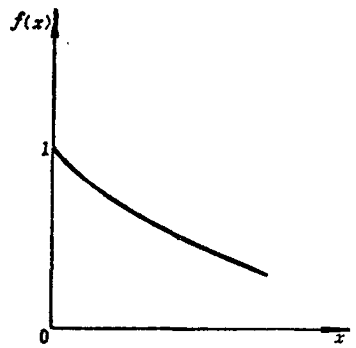

图1-5　$x \geqslant 0$ 的指数函数 $f(x)=e^{-x}$

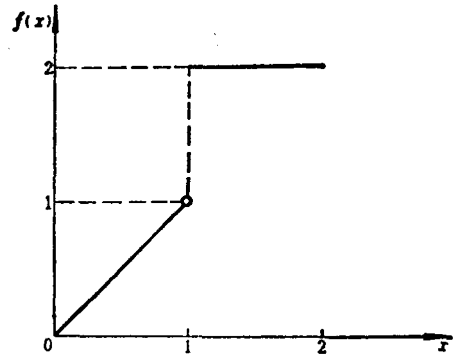

图1-6　不连续函数

例1-4　不连续函数（见图1-6）。

在 $x<1$ 时 $f(x)=x$，在 $x \geqslant 1$ 时 $f(x)=2$。函数的间断点为 $x=1$；在这一点处 $f(x)$ 的左极限 $\lim\limits_{h \to 0} f(1-h)=1$，而右极限 $\lim\limits_{h \to 0} f(1+h)=2$。

连续函数的特性如下：

① 连续函数的和与积也是连续函数。

② 两个连续函数的商在分母不为零的任意点连续。

离散函数是指变量 x 在指定域内只能设为离散量而非区域内所有的实数。

例1-5　不同直径的管道其单价是一个离散函数（见图1-7）。

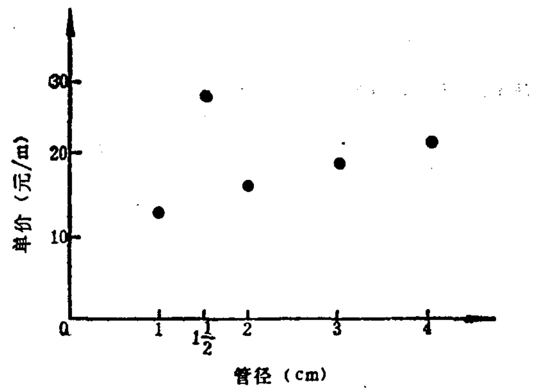

图1-7　不同直径管道的价格

第二节　总体和局部最优；严格和弱最优

优化问题分成两种类型：

① 确定已知点 x_0 是不是最优解。

② 当 x_0 不是最优点时，如何从 x_0 出发找到最优解。

定义：

总体最小：　在集合 S 内有定义的函数 $f(x)$，在 S 域内的 x^* 点达到最小值的充分必要条件是：对所有 $x \in S$（或对 S 内的任一元素 x）均有 $f(x^*) \leqslant f(x)$。

局部最小（相对最小）：　在 S 域上有定义的函数 $f(x)$，在 $x^* \in S$ 处有局部最小的充分必要条件是：对所有与点 x^* 的距离小于 δ 而且在 S 域内的点 x，换而言之，存在着 $\delta>0$，对所有满足 $|x-x^*|<\delta$ 且 $x \in S$ 的点 x，均有 $f(x^*) \leqslant f(x)$。

当函数只有一个峰值时，局部极小自然就是总体极小。当函数并非单峰时，多重局部最小可能存在，求总体极小一般只能求出所有的局部最优再选其中函数值最小者。

例1-6　如图1-8所示，$f(x)$ 具有多重局部最优，其中 x_3 是局部极大；x_2 是局部极小；x_1 是

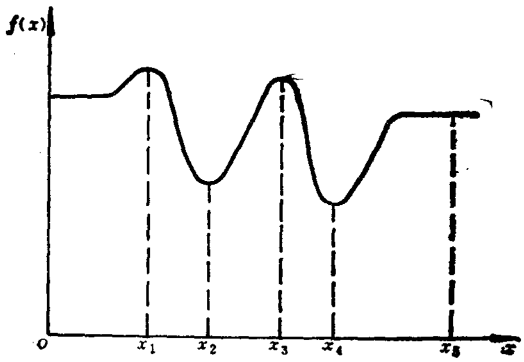

图1-8　多重局部最优

总体极大；x_4是总体极小；x_5既是局部极大又是局部极小。

定义：

弱最小：x^*是邻域δ内的弱局部极小（或极大）点，即存在δ，在$0<|x-x^*|<\delta$范围内，所有函数值$f(x)\geqslant f(x^*)$（或$f(x)\leqslant f(x^*)$），见图1-9。

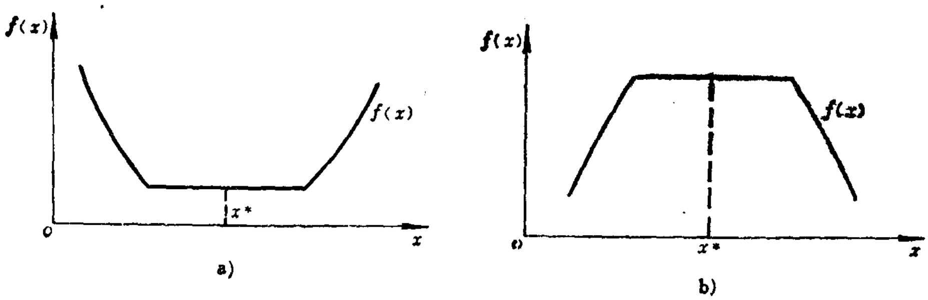

图1-9　具有弱极小点和弱极大点的函数

a）具有弱极小点的函数　b）具有弱极大点的函数

严格（强）极小：x^*是邻域δ内的严格（强）局部极小（或极大）点：即存在δ，在$0<|x-x^*|<\delta$中，所有函数值$f(x)>f(x^*)$（或$f(x)<f(x^*)$），见图1-10。

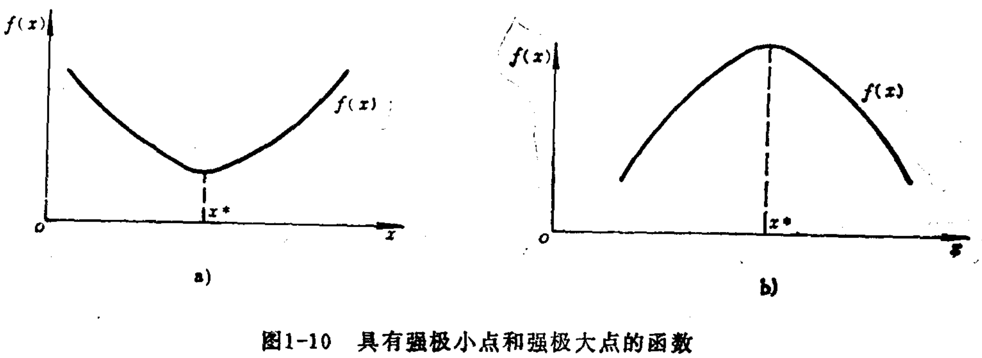

图1-10　具有强极小点和强极大点的函数

a）具有强极小点的函数　b）具有强极大点的函数

第三节　单变量单峰函数及凸、凹函数的定义

定义： $f(x)$在 $a \leqslant x \leqslant b$ 区间内是单峰函数的充分必要条件是，它在该区间内最优点x_0的两侧分别都是单调的。换言之，当 x_0 是$f(x)$在 $a \leqslant x \leqslant b$ 区域内的唯一极小点时，$f(x)$在该区间内为单峰的充分必要条件是对任意两点x_1和 x_2，若 $x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2$，则有$f(x_0) \leqslant f(x_1) \leqslant f(x_2)$；并且在$x_0 \geqslant x_1 \geqslant x_2$时也相应有$f(x_0) \geqslant f(x_1) \geqslant f(x_2)$。

单峰函数包括连续、非连续和离散三种情况，见图1-11。

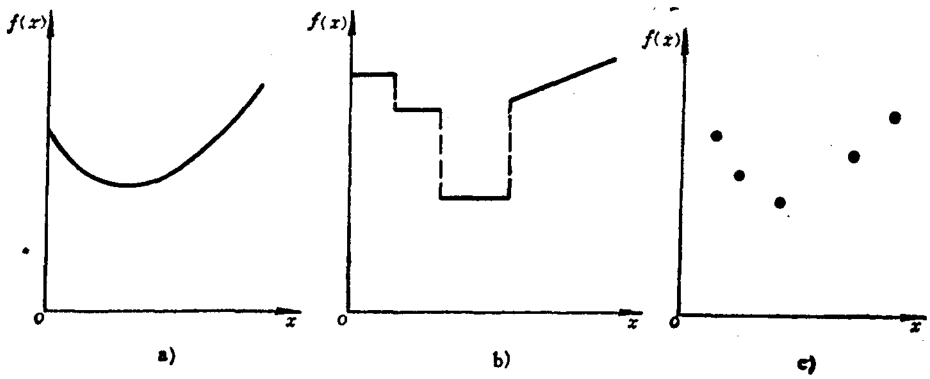

图1-11　单峰函数的各种情况

a）连续　b）非连续　c）离散

单峰是函数在优化问题中极重要的性质，因为单峰函数的局部最优即总体最优。但是，从单峰函数的定义出发，难以得到检验函数是否是单峰的简易判据。通常改用检验函数的凸性或凹性，其条件比单峰函数更为严格，但较易用其性质来判别。

定义： 在闭区间$[a, b]$上有定义的函数$f(x)$是凸函数的充分必要条件，见图1-12，对于区间中的任意两点 x_1、x_2 以及任意 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$，下列不等式都成立：

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \qquad (1\text{-}2)$$

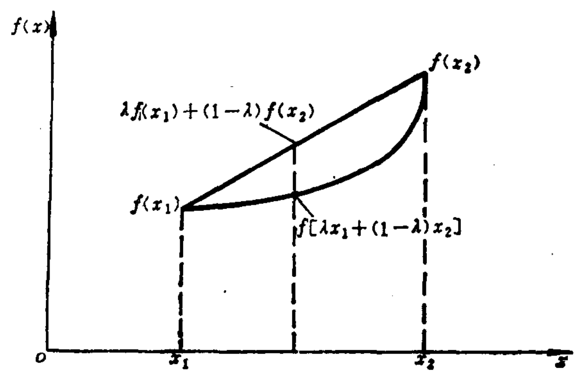

图1-12　凸函数的定义

凸函数具有下列性质：

① 曲线上任意两点连线（弦）完全落在曲线的上方或者和曲线重合。

② $f(x)$的斜率或一阶导数随 x 增长而递增，或者至少不递减。

③ 在区间内任意 x 点，$f(x)$的二阶导数非负。

④ 在区间内任意点处函数$f(x)$的线性近似总低于函数值（见图1-13），即

$$\tilde{f}(x, x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \leqslant f(x) \qquad (1\text{-}3)$$

定理：设$f(x)$是开区间（a，b）中的凸函数，假若在区间内存在着驻点x^0（即$f'(x^0)=0$的点），则x^0为$f(x)$在（a，b）区间内的总体极小点x^*。

证明：$f(x)$是开区间（a，b）中的凸函数，由式(1-3)可知，对此区间内的任意点x都有

$$f(x)\geqslant\tilde{f}(x,x^0)=f(x^0)+f'(x^0)(x-x^0)$$

已知 $f'(x^0)=0$，所以对（a，b）区间内任意一点x都有$f(x)\geqslant f(x^0)$，即x^0是总体极小点x^*。

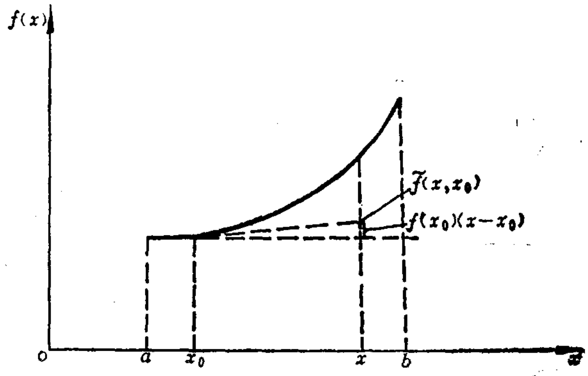

图1-13 凸函数的线性近似低于函数本身

定义：在闭区间［a，b］上，函数$f(x)$是凹函数（见图1-14）的充分必要条件是，对区间内的任意两点x_1和x_2，如下不等式都成立：

$$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\geqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2) \tag{1-4}$$

其中 $0\leqslant\lambda\leqslant1$。

例1-7 $f(x)=x^3$(见图1-15)在$x\geqslant0$时是凸函数，而在$x\leqslant0$时是凹函数。

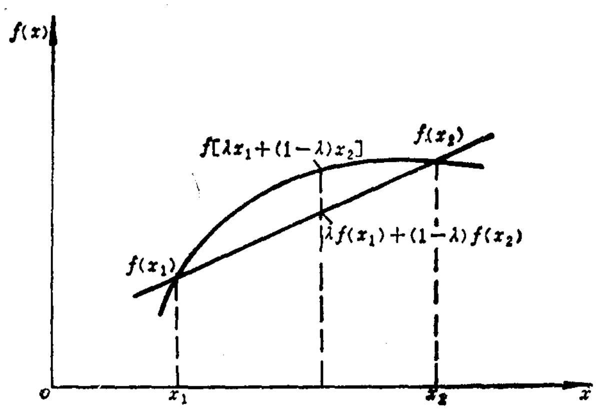

图1-14 凹函数的定义

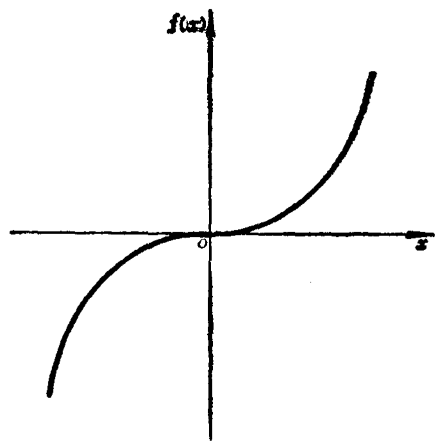

图1-15 函数$f(x)=x^3$

引理：

① 线性函数$f(x)=ax+b$既是凸函数又是凹函数。

② 若在闭区间［a，b］内$f(x)$是凹函数，则$-f(x)$在同一区间内是凸函数，反之亦然。

第四节 单变量函数最优的判别方法

假定$f(x)$是一个变量x的函数，在开区间$x\in(a,b)$时有定义，而$f(x)$在整个区间内n阶可导，若x^*是区间内的点，根据台劳级数定理可以写出由x^*点到(x^*+e)点函数$f(x)$的展开式如下：

$$f(x^*+\varepsilon)-f(x^*)=\varepsilon\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x^*}+\frac{\varepsilon^2}{2!}\left.\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x^*}+\cdots$$
$$+\frac{\varepsilon^n}{n!}\left.\frac{\mathrm{d}^nf}{\mathrm{d}x^n}\right|_{x=x^*}+0_{n+1}(\varepsilon) \qquad (1\text{-}5)$$

其中 $0_{n+1}(\varepsilon)$是ε的$n+1$阶及更高阶无穷小量。若x^*是f在(a,b)域内的局部极小点，则从定义出发必然存在一个变量x的“ε”邻域，任何与x^*距离小于ε的x都有$f(x)\geqslant f(x^*)$。式（1-5）右侧在ε足够小时，第一项起主要作用。由于ε可任意选正值或负值，因此只有$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x^*}=0$才能保证此项非负。又因$\varepsilon^2$总为非负，只要$\left.\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x^*}\geqslant 0$第二项即非负。

若要证明x^*是$f(x)$在(a,b)域中的局部极大点，则上述不等号反向。要求式(1-5)右侧各项非正。

定理：假定函数$f(x)$在开区间(a,b)内二次可导，x^*点是$f(x)$的局部极小点（或极大点）的必要条件是：

① 一阶必要条件 $$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x^*}=0 \qquad (1\text{-}6)$$

② 二阶必要条件除式(1-6)外，还有

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x^*}\geqslant 0\text{（或}\leqslant 0\text{）} \qquad (1\text{-}7)$$

上述定理称之为必要条件，一旦这两个条件中任何一个不满足，x^*就不是局部极小（或极大）点。另一方面，若这两个条件都满足，也不能保证x^*是局部极小（或极大）点。

再看前面的例1-7，$f(x)=x^3$在原点$x=0$处既满足局部极小的必要条件又满足局部极大的必要条件，但函数在$x=0$处达不到极小或极大。

定义：满足$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x^*}=0$的$x^*$点是驻点，但并非局部最优（极小或极大）点者为拐点。

例1-7中$x=0$是$f(x)=x^3$的拐点。

为了进一步区分驻点是极值点还是拐点，需要推导求极值的充分条件。

定理：假定在点x^*处的一阶导数为零，以阶数为序，第一个非零高阶导数的阶次为n，则：

① 若n是奇数，则x^*是拐点。

② 若n是偶数，则x^*是局部最优点，再则：

a）若导数为正，则x^*是局部最小点。

b）若导数为负，则x^*是局部最大点。

证明：函数$f(x)$的台劳级数展开式中，第一个非零的高阶导数为n阶，如式(1-8)所示，

$$f(x^*+\varepsilon)-f(x^*)=\frac{\varepsilon^n}{n!}\left.\frac{\mathrm{d}^nf}{\mathrm{d}x^n}\right|_{x=x^*}+0_{n+1}(\varepsilon) \qquad (1\text{-}8)$$

若n为奇数，不妨先考虑$\left.\frac{\mathrm{d}^nf}{\mathrm{d}x^n}\right|_{x=x^*}>0$的情况，式(1-8)右侧在$\varepsilon>0$时为正，而在$\varepsilon<0$时为负。这说明$f(x^*+\varepsilon)-f(x^*)$的正负，取决于$\varepsilon$的符号，函数在$x^*$点既非极大也非极小，所以$x^*$是拐点。

若n为偶数，ε^n项非负。对任何足够小的ε，$f(x^*+\varepsilon)-f(x^*)$的正负取决于式(1-8)

右侧第一项。因此，若$\left.\frac{d^n f}{dx^n}\right|_{x=x^*}$为正，则$f(x^*+\varepsilon)-f(x)>0$，即$x^*$为局部极小点；若$\left.\frac{d^n f}{dx^n}\right|_{x^*}$为负，则$f(x^*+\varepsilon)-f(x)<0$，$x^*$为局部极大点。

再看例1-7。函数$f(x)=x^3$在$x=0$处$\frac{df}{dx}=0$，第一个非零高阶导数的阶次$n=3$是奇数，因而$x=0$是$f(x)=x^3$的拐点。

评论：上述讨论中，先决条件是函数可导，即函数的连续的一阶导数存在。倘若函数并非在所有点可导，那么“无约束函数最优点是驻点”这个必要条件未必成立。

例1-8 分段线性函数$f(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant 2 \\ 4-x, & x\geqslant 2, \end{cases}$见图1-16，该函数在各点都是连续的，但在$x=2$点不可导，而函数却在$x=2$点处达到最大值。这点按照定义并非驻点。

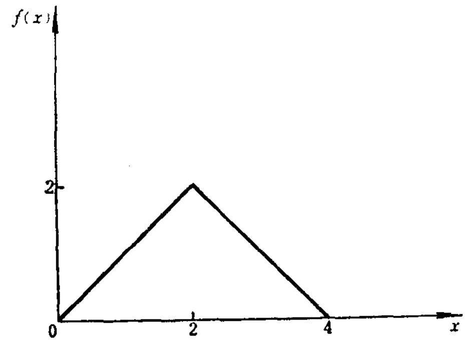

图1-16 分段线性函数

以上讨论的是无约束单变量函数的极值求法。当函数约束在某一闭区间$[a,b]$内，边界点a、b也可能是局部极值点。此时总体极值点的算法如下：

① 设$\frac{df}{dx}=0$，解出所有驻点。

② 驻点、奇异点（不连续或不可导等）及边界点都可能出现局部极值。

③ 计算②中各点的函数值，从中找到总体极大或极小值$f(x^*)$及其所在点x^*。

第五节 多变量函数最优的判别方法

定义：对于多变量域（集合）$\boldsymbol{S}$中任意两点$\boldsymbol{x}_1$和$\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{S}$，若都有$\lambda\boldsymbol{x}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{S}$，则$\boldsymbol{S}$是凸域（集），其中$0\leqslant\lambda\leqslant1$。

换言之，凸域中任意两点连线全部落在域内。

在多变量情况下，变量由标量扩展为矢量$\boldsymbol{x}=[x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$是$n$维矢量。而目标函数仍为标量，即多变量函数$f(\boldsymbol{x})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。

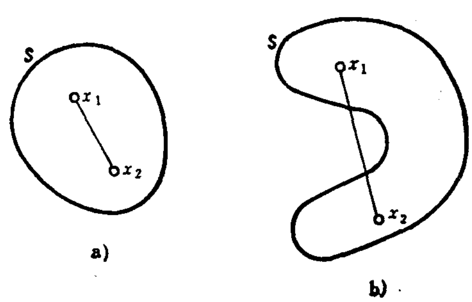

图 1-17

a）凸域 b）非凸域

多变量函数$f(\boldsymbol{x})$在某点$\boldsymbol{x}^*$附近进行台劳级数展开：

$$f(\boldsymbol{x}^*+\Delta\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}^*)+\nabla f(\boldsymbol{x}^*)\Delta\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}^*)\Delta\boldsymbol{x}+0(\|\Delta\boldsymbol{x}\|^2) \qquad (1\text{-}9)$$

其中$0(\|\Delta\boldsymbol{x}\|^2)$在$\|\Delta\boldsymbol{x}\|$足够小时为高阶无穷小，可以忽略。

若$f(\boldsymbol{x}^*)$极小，必须有$f(\boldsymbol{x}^*+\Delta\boldsymbol{x})\geqslant f(\boldsymbol{x}^*)$。微增量$\Delta\boldsymbol{x}$可能$>0$，也可能$<0$。式(1-9)中，一阶微增量项起主要作用，所以只有当$\nabla f(\boldsymbol{x}^*)=0$时才能满足上述不等式，此为$f(\boldsymbol{x}^*)$极小的一阶必要条件。在此基础上，二阶微增量项$\Delta\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}^*)\Delta\boldsymbol{x}>0$或$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}^*)$正定，是$f(\boldsymbol{x}^*)$严格局部极小的二阶充分条件。

若$\Delta\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}^*)\Delta\boldsymbol{x}\geqslant 0$，即$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}^*)$半正定，是$f(\boldsymbol{x}^*)$极小的二阶必要条件。换言之，若$\Delta\boldsymbol{x}^T\cdot\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}^*)\cdot\Delta\boldsymbol{x}<0$，则$\boldsymbol{x}^*$一定不是极小点。

定理：极值的一阶必要条件：

设$\boldsymbol{R}$是n维空间E^n中的某个域，$f(\boldsymbol{x})$在域上有定义，$\boldsymbol{x}^*$是$\boldsymbol{R}$域内的点，若$f(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x}^*$处可导，而且在该点达到极值，则必有

$$\left.\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*}=0 \tag{1-10}$$

其中一阶偏导数$\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}=\left[\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2},\ \cdots,\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right]$

亦即梯度　$\nabla f(\boldsymbol{x}^*)=0$

满足式（1-10）的点称为驻点。在域内部的极值点必为驻点，但驻点不一定是极值点。

定理：极值点的充分条件

设$\boldsymbol{R}$是n维空间E^n中的某个域，$f(\boldsymbol{x})$在域上有定义，$\boldsymbol{x}^*$是$\boldsymbol{R}$域内的点，若$f(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x}^*$处满足式(1-10)，且对任何非零向量$\boldsymbol{z}$都有

$$\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{H}\boldsymbol{z}>0 \tag{1-11}$$

则$\boldsymbol{x}^*$是$f(\boldsymbol{x})$的严格局部极小点。

其中$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$是一个函数$f(\boldsymbol{x})$对矢量变量$\boldsymbol{x}$的二阶偏导数$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$，称为海赛(Hessian)矩阵，式(1-11)表明矩阵$\boldsymbol{H}$正定。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\left[\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1},\ \frac{\partial f}{\partial x_2},\ \cdots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\right] \\
&= \begin{bmatrix}
\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) & \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\cdots\cdots & \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \\
\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) & \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\cdots\cdots & \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) & \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\cdots\cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)
\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}
\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2 \partial x_1}\cdots\cdots & \frac{\partial^2 (f\boldsymbol{x})}{\partial x_n \partial x_1} \\
\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2^2}\cdots\cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n \partial x_2} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2 \partial x_n}\cdots\cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n^2}
\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

定理：极值点的二阶必要条件：

在上述定理中，若海赛矩阵半正定，则为极小点的必要条件。

和单变量函数相仿，判别多变量函数$f(x)$为凸函数也有如下定理。

定理：多变量凸函数的一阶条件：

设定义在n维空间E^n中某开集R上的函数$f(x)$具有连续一阶导数，则$f(x)$为R上的凸函数的充分必要条件是，对任意两点x_1、$x_2 \in R$，恒有

$$f(x_2) \geqslant f(x_1) + \nabla f(x_1)(x_2 - x_1) \tag{1-12}$$

定理：多变量凸函数的二阶条件：

设定义在n维空间中某开集R上的函数$f(x)$具有连续二阶导数，则$f(x)$为R上的凸函数的充分必要条件是，$f(x)$的海赛矩阵$H(x)$在R上半正定。

定理：凸函数极值充分条件：

设定义在n维空间E^n中某开集R上的凸函数$f(x)$具有一阶导数，若在某一点x^*处$f(x^*) = 0$，则x^*是f在R中的总体最小值。

第二章　线　性　规　划

线性规划是指一类优化问题，其目标函数和约束方程（或不等式）均为线性。

线性规划广泛用于解决军事、经济、工业及社会问题，原因如下：

① 大量的优化问题都可以抽象成线性规划问题并具有合理的精度。

② 解决线性规划问题有高效率的手段和方法。

③ 在线性规划模型中，数据变化（如灵敏度分析等）易于处理。

正因为如此，人们对线性规划研究始终给以极大的关注，至今仍有突破性进展。在应用线性规划方面，已有相当的经验，并能供应很大规模的商品化软件包。

线性规划问题的目标函数$f(x)$是x的线性函数。现以单变量函数$f(x)$为例（见图2-1)作如下说明：

① 若$f(x)$没有上、下界，则$f(x)$没有极大或极小值。

② 若$f(x)$有上界及下界，则$f(x)$的极大值为上界，而$f(x)$的极小值为下界。

③ 若x的约束条件是$a\leqslant x\leqslant b$，则$f(x)$的极大值、极小值都在边界上，分别为$f(b)$和$f(a)$。

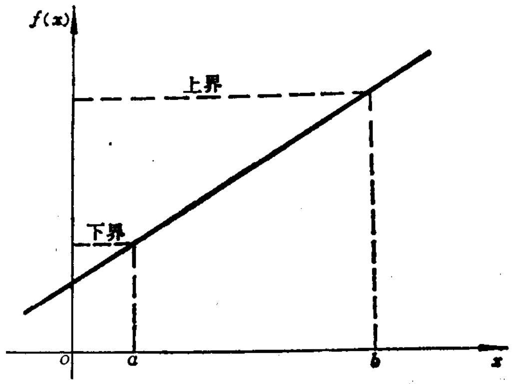

图2-1　有界线性函数

推而广之，在多变量函数情况下，线性规划问题表示为：

$$\begin{aligned} &\mathrm{Min}\, f(x)=cx \\ &\mathrm{Sub.to}\quad Ax=b \\ &x\geqslant 0 \end{aligned} \tag{2-1}$$

其中x、c分别是n维的列和行矢量；b为m维列矢量；而A是$m\times n$矩阵。所有满足约束条件的解称为可行解。约束方程的解中非零元素的数目不大于约束方程数m时，称之为基本解。因为约束均为线性，可行域为多边形或多面体，所以基本可行解对应于可行域的顶点。线性函数的极值一定在边界上，因而只须在基本可行解中进行搜索（特殊情况下可为整个边界)。

第一节　建模及图解法

为了说明线性规划问题的建模及图解法，先看一看两个典型例题。

例2-1　饲料配比问题：饲料由三种原饲料混合而成，每种原饲料的营养成分及单价见表2-1。混合饲料中必须包含：营养A$\geqslant$0.04，营养B$\geqslant$0.02及营养C$\geqslant$0.07。

问：三种原饲料按什么比例混合成本最低？

答：设x_1为第一种原饲料含量比例；