高中数学

龙门专题

不等式

（修订版）

傅荣强　主编

$$\frac{ab+cd}{2} \geqslant \sqrt{ab \cdot cd} > 0$$

$$\frac{ac+bd}{2} \geqslant \sqrt{ac \cdot bd} > 0$$

$$\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{4} \geqslant abcd$$

龍門書局

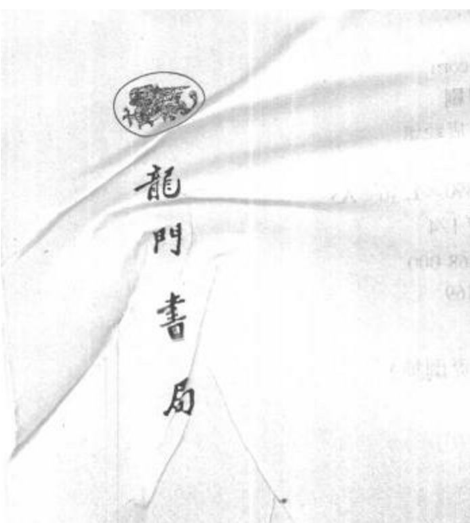
龙门专题

不等式

（修订版）

主　编　傅荣强

本册主编　傅荣强　朱　宏　刘殿云　倪晓红



（修订版）

不 等 式

傅荣强 主编

责任编辑 王 敏 乌 云

龍門書局 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

化工出版社印刷厂印刷

科学出版社总发行 各地书店经销

*

2001年11月修 订 版 开本：890×1240 A5

2002年8月第六次印刷 印张：7 1/4

印数：120 001—150 000 字数：268 000

ISBN 7-80160-133-5/G·169

定 价：8.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

参考书几乎是每一位学生在学习过程中必不可少的。如何发挥一本参考书的长效作用,使学生阅读后,能更透彻、迅速地明晰重点、难点,在掌握基本的解题思路和方法的基础上,举一反三、触类旁通,这是教参编者和读者共同关心的问题。这套《龙门专题》,就是龙门书局本着以上原则组织编写的。它包括数学、物理、化学、生物四个学科共计55种,其中初中数学12种,高中数学12种,初中物理5种,高中物理7种,初中化学4种,高中化学10种,高中生物5种。

本套书在栏目设置上,主要体现了循序渐进的特点。每本书内容分为两篇——"基础篇"和"综合应用篇"(高中为"3+X"综合应用篇)。"基础篇"中的每节又分为"知识点精析与应用"、"视野拓展"两个栏目。其中**"知识点精析与应用"**着眼于把基础知识讲透、讲细,帮助学生捋清知识脉络,牢固掌握知识点,为将成绩提高到一个新的层次奠定扎实的基础。**"视野拓展"**则是在牢固掌握基础知识的前提下,为使学生成绩"更上一层楼"而准备的。需要强调的是,这部分虽然名为"拓展",但仍然立足于教材本身,主要针对教材中因受篇幅所限言之不详,但却是高(中)考必考内容的知识点(这类知识点,虽然不一定都很难,但却一直是学生在考试中最易丢分的内容),另外还包括了一些不易掌握、失分率较高的内容。纵观近年来高(中)考形势,综合题与应用题越来越多,试行"3+X"高考模式以后,这一趋势更加明显。"综合应用篇"正是为顺应这种形势而设,旨在提高学生的综合能力与应用能力,使学生面对纷繁多样的试题,能够随机应变,胸有成竹。

古人云:授人以鱼,只供一饭之需;授人以渔,则一生受用无穷。这也是我们编写这套书的宗旨。作为龙门书局最新推出的《龙门专题》,有以下几个特点:

1. 以"专"为先　本套书共计55种,你尽可以根据自己的需要从

中选择最实用、最可获益的几种。因为每一种都是对某一个专题由浅入深、由表及里的诠释，读过一本后，可以说对这个专题的知识就能够完全把握了。

2．*讲解细致完备* 由于本套书是就某一专题进行集中、全面的剖析，对知识点的讲解自然更细致。一些问题及例题、习题后的特殊点评标识，能使学生对本专题的知识掌握起来难度更小，更易于理解和记忆。

3．*省时增效* 由于“专题”内容集中，每一本书字数相对较少，学生可以有针对性地选择，以实现在较短时间里对某一整块知识学透、练透的愿望。

4．*局限性小* 与教材“同步”与“不同步”相结合。“同步”是指教材中涉及的知识点本套书都涉及，并分别自成一册；“不同步”是指本套书不一定完全按教材的章节顺序编排，而是把一个知识块作为一个体系来加以归纳。如归纳高中立体几何中的知识为四个方面、六个问题，即“点、线、面、体”和“平行、垂直、成角、距离、面积、体积”。让学生真正掌握各个知识点间的相互联系，从而自然地连点成线，从“专题”中体味“万变不离其宗”的含义，以减小其随教材变动的局限性。

5．*主次分明* 每种书的前面都列出了本部分内容近几年在高考中所占分数的比例，使学生能够根据自己的情况，权衡轻重，提高效率。

本套书的另一特点是充分体现“减负”的精神。“减负”的根本目的在于培养新一代有知识又有能力的复合型人才，它是实施素质教育的重要环节。就各科教学而言，只有提高教学质量，提高效率，才能真正达到减轻学生负担的目的。而本套书中每本书重点突出，讲、练到位，对于提高学生对某一专题学习的相对效率，大有裨益。这也是本书刻意追求的重点。

鉴于本书立意的新颖，编写难度很大，又受作者水平所限，书中难免有疏漏之处，敬请不吝指正。

编　者

2001年11月1日

编委会（高中数学）

（修订版）

总策划　龙门书局

主编　傅荣强

编委　王家志　傅荣福　常青　王敏

朱岩　刘贞彦　王文彦

执行编委

目　录

第一篇 基础篇

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的学科，简说研究“数”和“形”的学科.代数是它的侧重研究运算方法的一个分支.不等式是代数的一个节点，它的本质是研究“数量关系”中的“不等关系”，落脚点是符号“>，<，≠”.

不等式研究的基本问题有两大类：

(1)不等式的证明——证明不等式成立的过程；

(2)不等式的解法——求不等式的解集的过程.

证明不等式成立，其理论依据是“不等式的性质，函数的单调性，基本不等式”，主要方法是“比较法，综合法，分析法”.

解不等式，思维模式应当确立在“不等式的同解原理”上，重点抓住“型”字.

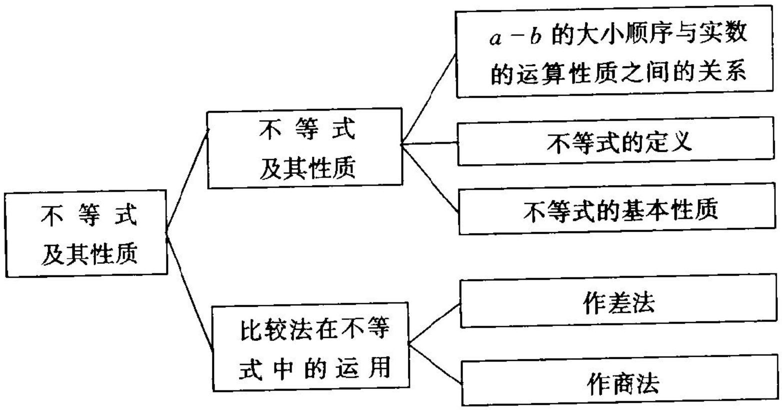
解答不等式问题，最常用的数学思想是等价转化思想和分类讨论思想.

本书知识框图

- 不等式
  - 不等式及其性质
    - 不等式及其性质
    - 比较法在不等式中的运用
  - 不等式的证明
    - 基本不等式
    - 不等式的证明方法
  - 不等式的解法
    - 有理不等式的解法
    - 无理不等式的解法
    - 指数不等式、对数不等式的解法
    - 含有绝对值的不等式
  - 不等式的应用
    - 不等式的应用 1（理论应用）
    - 不等式的应用 2（实际应用）

第一讲　不等式及其性质

本讲知识框图



1.1　不等式及其性质

重点难点归纳

重点　1. 实数的大小顺序与实数的运算性质之间的关系.

2. 不等式的 8 条基本性质.

难点　对不等式的 8 条基本性质的正确运用.

本节需掌握的知识点　不等式的 8 条基本性质.

知识点精析与应用

【知识梳理】

1. 记号 $\mathbf{R}^+$ 的约定

本书数次使用“正实数集”. 为了叙述方便，本书约定：$\mathbf{R}^+=\{$正实数$\}$，后面不再重述.

2. $a-b$ 的大小顺序(实数的顺序性)与实数的运算性质之间的关系

(1)设 $a,b\in\mathbf{R}$,则:

①$a-b>0\Leftrightarrow a>b$;
②$a-b=0\Leftrightarrow a=b$;
③$a-b<0\Leftrightarrow a<b$.

(Ⅰ)在数轴上,两个不同的点 A 与 B 分别表示两个不同的实数 a 与 b,右边的点表示的数比左边的点表示的数大.
(Ⅱ)实数减法可以在数轴上表示.

(2)设 $a,b\in\mathbf{R}^+$,则:

①$\frac{a}{b}>1\Leftrightarrow a>b$;

②$\frac{a}{b}=1\Leftrightarrow a=b$;

③$\frac{a}{b}<1\Leftrightarrow a<b$.

3. 不等式的概念

(1)不等式的定义:用不等号($<,>,\leqslant,\geqslant,\neq$)表示不等关系的式子叫做不等式.用"$<$"或"$>$"号连结的不等式,叫做严格不等式;用"$\leqslant$"或"$\geqslant$"号连结的不等式,叫做非严格不等式.

(2)同向、异向不等式:$f(x)>0$ 与 $g(x)>0$ 叫做同向不等式;$f(x)>0$ 与 $g(x)<0$ 叫做异向不等式.

(3)不等式的解集:使 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$)成立的 x 的集合,叫做 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$)的解集.

(4)同解不等式:若 $f(x)>0$ 与 $g(x)>0$(或 $g(x)<0$)的解集相等,则 $f(x)>0$ 与 $g(x)>0$(或 $g(x)<0$)叫做同解不等式.

(5)证明不等式:证明不等式成立的过程叫做证明不等式.

(6)解不等式:求不等式的解集的过程叫做解不等式.

按照这个定义,解不等式得到的结果是一个集合,表示形式:集合或区间!

4. 不等式的基本性质

(1)$a>b\Leftrightarrow b<a$(对称性).

(2)$a>b,b>c\Rightarrow a>c$(传递性).

(3)$a>b\Rightarrow a+c>b+c$(可加性).

(4)$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$.

(5)$a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$;$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$(可乘性).

(6)$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$.

(7)$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n>0$($n\in\mathbf{Z}$,且 $n>1$).

(8)$a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}>0$($n\in\mathbf{Z}$,且 $n>1$).

4

【知识点精析】

1.学习不等式的基本性质,对表达不等式性质的各不等式,要注意"箭头"是单向的还是双向的,也就是说每条性质是否具有可逆性.

2.关于性质2,要正确处理带等号的情况.由 $a>b,b\geqslant c$,或 $a\geqslant b,b>c$ 均可推得出 $a>c$;而由 $a\geqslant b,b\geqslant c$ 不一定确切地推得 $a>c$ 或 $a=c$ 之一,可能是 $a>c$,也可能是 $a=c$.应当这样理解,有了 $a\geqslant b,b\geqslant c$,可能有 $a>c$,也可能有 $a=c$,只有当 $a=b$,且 $b=c$ 时才会有 $a=c$.

如,当 $\alpha\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 时,肯定有 $1\geqslant\sin\alpha$,且 $\sin\alpha\geqslant\cos\alpha$.但是,两个等号成立的条件分别是 $\alpha=\frac{\pi}{2}$,$\alpha=\frac{\pi}{4}$,这就是说两个等号不可能同时成立,只有 $1>\cos\alpha$,不可能有 $1=\cos\alpha$.

3.运用不等式的8条基本性质解答不等式问题,要注意不等式成立的条件,否则将会出现一些错误.如,性质(7)"$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n>0(n\in\mathbf{Z},n>1)$"成立的条件是"$n$ 是大于1的整数,$a>b>0$",假如去掉"$b>0$"这个条件,取 $a=3,b=-4$,$n=2$,那么就会出现"$3^2>(-4)^2$"即"$9>16$"的错误结论,反例不胜枚举.

【解题方法指导】

[例1] 比较 $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3$ 与 $2-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3$ 的大小.

解 $\because\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3-\left[2-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3\right]$ 作差,被比较的两个数的差.

$$\left.\begin{aligned}&=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3-2\\&=\left[\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)\right]\left[\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^2\right.\\&\quad\left.-\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^2\right]-2\\&=2\left(2+\frac{4}{a^2}-1+\frac{2}{a^2}\right)-2=2\left(1+\frac{6}{a^2}\right)-2\end{aligned}\right\}$$

变形,变到与0可以比较大小的位置.

$=\frac{12}{a^2}>0$, 判号,与0比较,是正?是负?还是零?

$\therefore\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3>2-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3$. 定论,被比较的两个数谁大,谁小!

点评 解答本题的依据是:$a-b>0\Leftrightarrow a>b$.解题步骤是:作差,变形,判号,定论.

[例 2]　比较 x^2+3 与 $3x$ 的大小，其中 $x\in\mathbf{R}$.

解　$\because (x^2+3)-3x$　作差

$$\left.\begin{aligned}&=\left[x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]-\left(\frac{3}{2}\right)^2+3\\&=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\end{aligned}\right\}\text{变形}$$

$\geqslant\frac{3}{4}>0$,

判号."$\frac{3}{4}>0$"这一步是在"$\geqslant$"的基础上加强了一步.因为判号是以 0 为标准的!

$\therefore\ x^2+3>3x$.　定论

[例 3]　若 $a,b\in\mathbf{R}^+$，比较 $\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ 与 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 的大小.

解　$\because a,b\in\mathbf{R}^+$,

$$\therefore\left[\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right]-(\sqrt{a}+\sqrt{b})=\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

$$=\frac{a-b}{\sqrt{b}}+\frac{b-a}{\sqrt{a}}=(a-b)\left(\frac{1}{\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

$$=\frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}$$

$$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}}$$

$\geqslant 0$,

由 $a,b\in\mathbf{R}^+$，得分母 $\sqrt{ab}>0$;

分子 $\left.\begin{aligned}\sqrt{a}+\sqrt{b}>0\\(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0\end{aligned}\right\}\Rightarrow$

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$.

你知道"="什么时候成立吗?

$$\therefore\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

[例 4]　比较 x^6+1 与 x^4+x^2 的大小，其中 $x\in\mathbf{R}$.

解　$x^6+1-(x^4+x^2)=x^6-x^4-x^2+1=x^4(x^2-1)-(x^2-1)$ $=(x^2-1)(x^4-1)=(x^2-1)^2(x^2+1)$.

当 $x=\pm1$ 时，$x^6+1=x^4+x^2$;

当 $x\neq\pm1$ 时，$x^6+1>x^4+x^2$.

点评　本题与例 3 比较，等号"="成立的条件有些区别：例 3 中"="成立，只要 a、b 具备"$a,b\in\mathbf{R}^+,a=b$"这一条件；而本题中"="成立，指出了 x 的具体值，即"$x=\pm1$".

[例 5]　已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，且 $b<c$，比较 ab 与 $ac+bc$ 的大小.

解　$ab-(ac+bc)=a(b-c)-bc$,

$\because b<c,\therefore b-c<0$，又 $a>0,\therefore a(b-c)<0$,

$\because b>0,c>0,\therefore bc>0,-bc<0$,

$\therefore a(b-c)-bc<0$，$\therefore ab<ac+bc$.

点评 本题与例1～例4不同的是：例1～例4中，被比较的两个数不受条件限制，而本题中被比较的两个数 ab 与 $ac+bc$ 受条件"$b<c$"的限制.

[例6] 已知 $x>0, x\neq1, m>n>0$，比较 $x^m+\frac{1}{x^m}$ 与 $x^n+\frac{1}{x^n}$ 的大小.

分析 本题对 x 分类讨论，即讨论 $0<x<1$ 和 $x>1$ 两种情况.

解 $x^m+\frac{1}{x^m}-\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)=x^m-x^n+\frac{1}{x^m}-\frac{1}{x^n}=x^m-x^n-\frac{x^m-x^n}{x^{m+n}}$

分类讨论：$0<x<1$；$x>1$ $=(x^m-x^n)\left(1-\frac{1}{x^{m+n}}\right)$.

当 $0<x<1$ 时，由 $m>n>0$ 知，$x^m<x^n$ 且 $x^{m+n}<1$，则有 $1-\frac{1}{x^{m+n}}<0$，所以 $(x^m-x^n)\left(1-\frac{1}{x^{m+n}}\right)>0$；

当 $x>1$ 时，由 $m>n>0$ 知，$x^m>x^n$ 且 $x^{m+n}>1$，则有 $1-\frac{1}{x^{m+n}}>0$，所以 $(x^m-x^n)\left(1-\frac{1}{x^{m+n}}\right)>0$.

综上，$x^m+\frac{1}{x^m}-\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)>0$，

即 $x^m+\frac{1}{x^m}>x^n+\frac{1}{x^n}$.

不等式的研究中，分类讨论思想极为重要，从头开始，用心体会！

点评 **解答本题所用数学思想是分类讨论思想，解答含有参数的不等式问题，一般都需对参数的取值进行分类讨论.**

[例7] 比较 16^{18} 与 18^{16} 的大小.

分析 本题通过两个数的商与1比较确定两个数的大小.

解 $\because \frac{16^{18}}{18^{16}}=\frac{2^{72}}{2^{16}\cdot3^{32}}=\frac{2^{56}}{3^{32}}=\left(\frac{2^7}{3^4}\right)^8=\left(\frac{128}{81}\right)^8>1$，

方法渗透

$\therefore 16^{18}>18^{16}$.

点评 解答本题的依据是：若 $a>0, b>0, \frac{a}{b}>1$，则 $a>b$. 当 $a<0, b<0$ 时，比较 a 与 b 的大小，可先比较 $-a$ 与 $-b$ 的大小，然后再确定 a 与 b 的大小.

【基础训练题】

一、选择题

1. 若 $f(x)=3x^2-x+1$，$g(x)=2x^2+x-1$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小关系是 ( )

A. $f(x)>g(x)$　　B. $f(x)=g(x)$

C. $f(x)<g(x)$　　D. 随 x 值变化而变化

2. 若 $a\neq2$ 或 $b\neq-1$，则 $M=a^2+b^2-4a+2b$ 的值与 -5 的大小关系是 ( )

A. $M>-5$ B. $M<-5$ C. $M=-5$ D. 不能确定

3. 若 $a>b,c>d$，则下列不等关系中不一定成立的是 ( )

A. $a-d>b-c$ B. $a+d>b+c$

C. $a-c>b-c$ D. $a-c<a-d$

4. 若 $-1<\alpha<\beta<1$，则下列各式中恒成立的是 ( )

A. $-1<\alpha-\beta<1$ B. $-2<\alpha-\beta<-1$

C. $-2<\alpha-\beta<0$ D. $-1<\alpha-\beta<0$

二、填空题

5. 6^8 与 8^6 的大小关系是 6^8 ______ 8^6.

6. 设 $a>5$，则 $\sqrt{a-3}-\sqrt{a-4}$ 与 $\sqrt{a-4}-\sqrt{a-5}$ 的大小关系是______.

7. 当________时，$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}<\sqrt[3]{a-b}$.

8. 若 $0<a<b$，且 $a+b=1$，则将 a、b、$\frac{1}{2}$、$2ab$、a^2+b^2 从小到大排列为________________________________.

三、解答题

9. 比较 a^2-2a 与 $a-3$ 的大小.

10. 比较 $\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ 与 $2\sqrt{n}$ 的大小（$n\in\mathbf{N}^*$）.

【答案与提示】

一、1. A（$f(x)-g(x)=(3x^2-x+1)-(2x^2+x-1)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0$） 2. A（$(a^2+b^2-4a+2b)-(-5)=a^2+b^2-4a+2b+5=(a^2-4a+4)+(b^2+2b+1)=(a-2)^2+(b+1)^2$，$\because a\neq2$ 或 $b\neq-1$，$\therefore(a-2)^2+(b+1)^2>0$.） 3. B（依不等式的性质 $a-d>b-c$，或 $a-c<a-d$ 都成立，$\therefore$A、D 是成立的. C 中以 $a>b$ 为前提，两边同加 $-c$ 也成立.） 4. C（$\because -1<\alpha<1$，$-1<\beta<1$，$\therefore -1<-\beta<1$，$\therefore -2<\alpha-\beta<2$. $\because \alpha<\beta$，$\therefore \alpha-\beta<0$. $\therefore -2<\alpha-\beta<0$.）

二、5. $>$ $\left(\frac{6^8}{8^6}=\frac{2^8\cdot3^8}{2^{18}}=\frac{3^8}{2^{10}}\right.$. 设 $x=\frac{3^8}{2^{10}}$，则 $\lg x=8\lg3-10\lg2=8\times0.4771-10\times0.3010>0$. $\therefore x>1$. $\left.\therefore 6^8>8^6\right)$ 6. $\sqrt{a-3}-\sqrt{a-4}<\sqrt{a-4}-\sqrt{a-5}$（$\because a>5$，只需判断 $\sqrt{a-3}+\sqrt{a-5}$ 与 $2\sqrt{a-4}$ 的大小，即比较 $(\sqrt{a-3}+\sqrt{a-5})^2-(2\sqrt{a-4})^2$ 的大小，即 $a-3+2\sqrt{(a-3)(a-5)}+a-5$ 与 $4(a-$

4)的大小. 只需比较 $2\sqrt{(a-3)(a-5)}$ 与 $2(a-4)$ 的大小，只需判断 $(a-3)(a-5)$ 与 $(a-4)^2$ 的大小，只需判断 $a^2-8a+15$ 与 $a^2-8a+16$ 的大小.）

7. a、b 同号且 $a>b$，或 a、b 异号且 $a<b$（不妨先假设 $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}<\sqrt[3]{a-b}$. 等价变换来分析应具备的条件：原式等价于 $a-3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}-b<a-b \Leftrightarrow -3\sqrt[3]{ab}\cdot(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})<0$，∴应满足条件是 a、b 同号且 $a>b$ 或 a、b 异号且 $a<b$.）

8. $a<2ab<\frac{1}{2}<a^2+b^2<b$ $\left(\text{由 } 0<a<b \text{ 且 } a+b=1 \text{ 可知 } 0<a<\frac{1}{2}, \frac{1}{2}<b<1, a^2+b^2>2ab\right.$. 这样 $a<\frac{1}{2}<b$，$2ab<a^2+b^2$. 它们两组之间什么关系呢？∵ $b=1-a$，$(a^2+b^2)-b=a^2+(1-a)^2-(1-a)=2a^2-a=a(2a-1)$，$0<a<\frac{1}{2}$，∴ $2a-1<0$，$a>0$，∴ $a^2+b^2<b$. 又∵ $2ab-\frac{1}{2}=2a(1-a)-\frac{1}{2}=-2a^2+2a-\frac{1}{2}=-2\left(a^2-a+\frac{1}{4}\right)=-2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2<0$，∴ $2ab<\frac{1}{2}$. $a^2+b^2=a^2+(1-a)^2=2a^2-2a+1=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}$.）

三、9. ∵ $(a^2-2a)-(a-3)=a^2-2a-a+3=a^2-3a+3=\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$，∴ $a^2-2a>a-3$.　　10. ∵ $\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$，

∴ $\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}-2\sqrt{n}=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-2\sqrt{n}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}>0$，

∴ $\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}>2\sqrt{n}$.

视野拓展

1. 区间内的二次函数、二次方程、二次不等式三者关系的深化

一元二次函数、一元二次方程、一元二次不等式的内容、方法和应用贯穿于初、高中数学教学之中，成为中学代数的重要内容和高考考查的重点. 初中阶段在课本明处主要让学生在全体实数上感知三者的整体性态. 高中阶段主要在课本暗处用后继知识不断深化对三者的认识和运用，而在指定区间上研究其局部性质是高中阶段三者深化的主要内容，并且它将随着中学数学教学和各类考试的深入愈显突出.

在处理三者在指定区间上的问题时，应注意突出二次函数在三者中的"统帅"地位，注意研究三者的内在联系，发挥其三位一体、优势互补的作用.

三者在区间上深化的主要结论：

(1)二次函数$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$在$[\alpha,\beta]$内的最小值和最大值

$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$,当$a>0$时,有

$$[f(x)]_{\min}=\begin{cases}f(\alpha) & \left(-\frac{b}{2a}\leqslant\alpha\right),\\ f(-\frac{b}{2a}) & \left(\alpha\leqslant-\frac{b}{2a}\leqslant\beta\right),\\ f(\beta) & \left(-\frac{b}{2a}\geqslant\beta\right).\end{cases}$$

注意($a>0$):
$f(x)$在$(-\infty,-\frac{b}{2a})$上是减函数;
$f(x)$ 在$(-\frac{b}{2a},+\infty)$上是增函数.

$$[f(x)]_{\max}=\begin{cases}f(\beta) & \left(-\frac{b}{2a}\leqslant\frac{\alpha+\beta}{2}\right),\\ f(\alpha) & \left(-\frac{b}{2a}\geqslant\frac{\alpha+\beta}{2}\right).\end{cases}$$

①$\frac{\alpha+\beta}{2}$正好在$[\alpha,\beta]$正中间;
②α和β谁距$\frac{\alpha+\beta}{2}$远?
③不要忘了$a>0$.

同理,可得$a<0$时的结论(略).

(2)二次方程$f(x)=ax^2+bx+c=0(a\neq0)$在$[\alpha,\beta]$上有实根的充要条件

①在区间边界上有根$\Leftrightarrow f(\alpha)f(\beta)=0$.

②在(α,β)内只有一个根$\Leftrightarrow f(\alpha)f(\beta)<0$.

③在(α,β)内有两相等实根$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=b^2-4ac=0,\\ \alpha<-\frac{b}{2a}<\beta.\end{cases}$

④在(α,β)内有两不等实根$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=b^2-4ac>0,\\ af(\alpha)>0,\\ af(\beta)>0,\\ \alpha<-\frac{b}{2a}<\beta.\end{cases}$

⑤在(α,β)内有根$\Leftrightarrow f(\alpha)f(\beta)<0$或$\begin{cases}\Delta=b^2-4ac\geqslant0,\\ af(\alpha)>0,\\ af(\beta)>0,\\ \alpha<-\frac{b}{2a}<\beta.\end{cases}$

下面证明上述各式.①,③显然成立,先证②成立.

$f(\alpha)f(\beta)<0\Leftrightarrow\begin{cases}f(\alpha)>0,\\ f(\beta)<0,\end{cases}$或$\begin{cases}f(\alpha)<0,\\ f(\beta)>0.\end{cases}$

即$\begin{cases}a\alpha^2+b\alpha+c>0,\\ a\beta^2+b\beta+c<0,\end{cases}$或$\begin{cases}a\alpha^2+b\alpha+c<0,\\ a\beta^2+b\beta+c>0.\end{cases}$