现代数学丛书

冯克勤 著

分圆函数域

CYCLOTOMIC FUNCTION FIELDS

FENG KEQIN

上海科学技术出版社

·现 代 数 学 丛 书·

分 圆 函 数 域

冯克勤 著

上海科学技术出版社

责任编辑　赵序明

·现代数学丛书·
分圆函数域
冯克勤　著
上海科学技术出版社出版、发行
（上海瑞金二路450号）
新华书店上海发行所经销　　上海商务印刷厂印刷
开本 787×1092　小 1/16　印张 14.25　插页 4　字数 182 000
1997年7月第1版　1997年7月第1次印刷
印数 1—1 200
ISBN 7-5323-3949-1/O·200
定价：30.00元

内 容 提 要

本书系统介绍近20年来发展的分圆函数域理论.整理了Carlitz、冯克勤、Gekeler、D. Goss、D. Hayes、M. Rosen和Thakur等学者在这一领域的研究成果.主要内容有:分圆函数域的基本性质、分圆单位、欧拉系、类数整除性和函数域上的分析学(Mahler定理的模拟、P-adic Gamma函数、高斯和、分布与测度).本书也可看作是进一步理解一般函数域上的Carlitz模理论和Drinfeld模理论的入门书.

本书供数学研究工作者;高等学校数学专业的教师、研究生、高年级学生学习参考.

Modern Mathematics Series

CYCLOTOMIC FUNCTION FIELDS

Feng Keqin

Shanghai Scientific & Technical Publishers

Cyclotomic function fields

Feng Keqin

Abstract

The purpose of this book is to introduce the cyclotomic function field theory developmented in last two decades, and to collected systematically the research contributions of Carlitz, Keqin Feng, Gekeler, D. Goss, D. Hayes, M. Rosen, Thakur etc. in this branch of number theory. The main contents are: basic properties of cyclotomic function fields, cyclotomic units, Euler system, divisibility of class numbers and analysis on function fields (analogy of the Mahler's theorem, P-adic Gamma function, Gauss sum, distribution and measure). The book can also be viewed as an introduction for further understanding of the Carlitz module theory on general function fields and the Drinfeld module theory.

出版说明

从60年代起，由华罗庚教授任主编的《现代数学丛书》编辑委员会曾组织编著，并由我社出版了多部具有很高水平的数学学术专著，有几部专著并已在国外出了外文版，受到国内外数学界和广大读者的高度重视，获得了很高的评价。原编委会中华罗庚、关肇直、吴新谋三位教授虽已先后逝世，但他们为本《丛书》所作出的贡献迄今仍为人们所敬仰、怀念。由于某些客观原因，《现代数学丛书》的出版工作曾一度停顿。

为了适应现代数学的迅速发展，更好地反映我国数学家近几年的优秀研究成果，必须大力加强《现代数学丛书》的规划、编辑、出版工作.充实编委会的力量。考虑到不少编委年事已高，经向原编委会中大部分同志及数学界有关专家广泛征求意见后，于1990年对编委会作了调整，补充了一些著名的中年数学家和学科带头人，建立了新的编委会，并进一步明确了本丛书的宗旨。

《现代数学丛书》新的编辑委员会由苏步青教授任名誉主编、谷超豪教授任主编，18位著名数学家任委员。编委会负责推荐（或审定）选题和作者，主持书稿的审核等工作。

《现代数学丛书》的宗旨是：向国内外介绍我国比较成熟的、对学科发展方向有引导作用的、国内第一流水平的数学研究成果，反映我国数学研究的特色和优势，扩大我国数学研究成果的影响，促进学科的发展和国内外的学术交流。

为了实现上述宗旨，本丛书将陆续组织出版在基础数学、应用数学和计算数学方面处于学科发展前沿、有创见且具有系统完整

研究成果的现代数学学术专著。

为出版好《现代数学丛书》，我们热切地期望着数学界各位专家的大力支持和悉心指导，并欢迎广大读者提出宝贵的建议和意见。

上海科学技术出版社

前　言

数域的研究起源于数论(不定方程的整数解),单变量函数域的研究起源于几何(代数曲线)。在本世纪初,Hensel 建立了赋值理论之后,这两种域的研究形成了统一的手段(整体域理论)。经典代数数论和代数曲线算术理论相交织,成为现代算术代数几何的一个源头。

如果特别地看一下分圆理论发展的历史,更可体会到数域和函数域相互启发和促进的生动情景。经典的分圆数域理论是在上世纪后半叶由 Kummer 和 Hilbert 给出的。近代分圆数域理论的标志之一是 Iwasawa 于 1959 年给出的分圆 $\boldsymbol{Z}_p$ 扩张以及一般 $\boldsymbol{Z}_p$ 扩张的类数公式。这个公式的建立受到了(有限域上单变量)函数域的 Weil 定理的启发:数域的 $\boldsymbol{Z}_p$ 扩张类比于函数域的常数域无限扩张。不过,前者比后者复杂,内容也更加丰富和深刻,这方面可见 Washington[57]或 Lang S[45]的书。对于许多数论问题,函数域情形比数域情形容易解决,其中一个重要的原因是:函数域上有 Weil 定理。而对于数域情形,相应的黎曼猜想没有解决。但是情况也不完全如此。例如说,早在上世纪末就证明了:有理数域 $\boldsymbol{Q}$ 的最大阿贝尔扩域是所有分圆数域 $\boldsymbol{Q}(\zeta_n)$ 的合成 $\left(\zeta_n=e^{\frac{2\pi i}{n}},n\geqslant 3\right)$ (Kronecker-Weber 定理). 对于函数域,类似的问题是:对于有限域 $\boldsymbol{F}_q$ 上的有理函数域 $k=\boldsymbol{F}_q(T)$,如何具体构作出 k 的最大阿贝尔扩域? 这个问题一直到 1974 年才由 Hayes D[39]解决. 在 30 年代,Carlitz 和他的一些学生对于一些古典的

数论问题，研究了在有理函数域$k=\boldsymbol{F}_q(T)$和多项式环$R=\boldsymbol{F}_q[T]$上的类似问题(k和R分别是$\boldsymbol{Q}$和整数环$\boldsymbol{Z}$的类比)．特别是，Carlitz构作出k的一类有限阿贝尔扩域。我们可以把上述Kronecker-Weber定理说成为：$\boldsymbol{Q}$的最大阿贝尔扩域是将$\boldsymbol{Q}^{ac}$($\boldsymbol{Q}$的代数闭包)的乘法群(作为$\boldsymbol{Z}$-模)的所有torsion点(有限阶元素，即单位根)添加到$\boldsymbol{Q}$上而得到的域。Carlitz的主要贡献是：他给出了k^{ac}($k=\boldsymbol{F}_q(T)$的代数闭包)的一种特别的R-模结构(现在被人们称之为Carlitz模)，并且证明了对于这种R-模k^{ac}的每个torsion元素λ，$k(\lambda)/k$都是(有限)阿贝尔扩张。到了1974年，Hayes利用类域论证明了：Carlitz给出的所有扩域$k(\lambda)$以及k的所有常数域扩张的合成就是k的最大阿贝尔扩域，并且$k(\lambda)$具有分圆数域$\boldsymbol{Q}(\zeta_n)$许多相似的数论性质。简言之，Hilbert古典分圆数域的许多结果在$k(\lambda)$中都有相应的类比(见本书第1章)。综合上述，我们有理由把$k(\lambda)$称作*分圆函数域*．根据Hayes的结果，除了平凡的常数域扩张$k\boldsymbol{F}_{q^n}(n\geqslant 1)$之外，分圆函数域$k(\lambda)$($\lambda$为Carlitz模$k^{ac}$的torsion元素)是构作$k$的最大阿贝尔扩域的基石。因此，从80年代以来，对于分圆函数域的研究引起了数论界的关注。人们最关心的课题是：近代分圆数域理论中的丰富且深刻的结果在分圆函数域中会是怎样的情况？近20年来的研究表明，对于数域的不少结果可以给出移植到函数域上的各种尝试，例如：

建立了分圆函数域的类数解析公式(见文献[35]及本书第1章，这类似于Kummer和Hasse的类数公式)；

引入分圆单位的概念，并计算各种分圆单位群在整个单位群中的指数(见文献[7]、[16]、[36]及本书第2章，这相当于Sinnott[51]等人的结果)；

Bernoulli数在$k=\boldsymbol{F}_q(T)$中的两种模拟并用来研究分圆函数域类数整除性(见文献[4]、[10]、[14]、[21]、[24]、[26]、[19]、[20]、[48]及本书第4章，相当于Kummer结果两种不同的移植方式)；

分圆函数域上的欧拉系并用于研究类群和分圆单位的关系

(见文献[15]及本书第3章,是 Rubin[50]的模拟);

zeta 函数一些特殊值的超越理论(于靖得出了比数域情形较圆满的完整结果). 等等.

另一方面,还有大量问题在分圆函数域中没有解决,其原因往往是由于 k 和 $\boldsymbol{Q}$ 有不同的特征,而特征为素数的域 k 比特征为零的情形会带来很大困难,所以需要有新的思想。例如说,Goss[22]、[25]构作了与 Hasse-Weil zeta 函数完全不同的新型 zeta 函数,Goss 和 Thakur[28]、[54]继 Carlitz 之后继续深入系统地研究了函数域上各种类型的 Γ-函数, Thakur[55] 用 Carlitz 模的方式给出函数域上的一种高斯和,它们在不同程度上起着古典 zeta 函数,Γ-函数以及高斯和在分圆数域研究中的作用。最近,人们也正在探索函数域上新的分析学工具(见文献[29]~[31]),期望新的工具对函数域的研究起着更大的作用。

分圆数域的近代理论(特别是 Iwasawa$\boldsymbol{Z}_p$ 扩张理论和 Iwasawa 主猜想)已经成为高维几何对象算术性质的重要研究课题。类似地,分圆函数域的研究目前也已扩展到更一般情形(秩≥2的情形),这应当首先归功于 Drinfeld[9],他在70年代中期建立了函数域上的椭圆模结构(现已被称为 Drinfeld 模),并用这种方法证明了函数域上局部 Langlands 猜想的二维情形。秩为1的 Drinfeld 模就是 Carlitz 模,所以 Drinfeld 模理论是分圆函数域理论高秩的推广。我们知道,$\boldsymbol{C}$ 中的 $\boldsymbol{Z}$-格只有秩为1和秩为2的情形,所以目前只对有理数域 $\boldsymbol{Q}$ 和虚二次域可以完全明显地构作出最大阿贝尔扩域。但是对于任意的函数域 K($k=\boldsymbol{F}_q(T)$的任意有限扩域)和它的整元环 O_k,K^{ac} 中可以有许多种任意秩的 O_k-格. 因此,Drinfeld 模理论比数域情形要丰富得多。这也是目前人们致力于研究 Drinfeld 模的一个原因。

本书向大家介绍分圆函数域理论,即 $\boldsymbol{F}_q(T)$上秩为1的 Drinfeld 模(即 Carlitz 模)的基本数论结果,目的是总结近20年来散见于文献中的研究成果(包括作者和其他中国学者的工作). 熟悉近代分圆数域理论(例如读过 Washington[57]和 Lang[45]的书)的读

者，可以体会到分圆函数域理论和数域情形的异同，从而可以启发出来分圆函数域的许多研究课题。进而，本书也可作为进一步了解任意函数域上任意秩的 Drinfeld 模的入门书（关于一般 Drinfeld 模理论可参见文献[8]、[9]、[17]、[40]和[41]）.

本书第1章介绍分圆函数域最基本的知识（相当于 Hilbert 对分圆数域的工作）；第2章讲述分圆单位，这是 Galovich、Rosen、冯克勤、程露、印林生等人工作的总结（数域情形可见文献[45]和[57]）；第3章讲述分圆函数域的欧拉系（Euler System），这是冯克勤和徐飞将 Kolyvagin 和 Rubin 的工作向函数域的移植，用来研究类群和分圆单位的联系；第4章为类数整除性，总结了 Goss、Gekeler、冯克勤、高文云等人的工作，是模拟 Kummer 理论的各种尝试，并探讨函数域情形出现的新现象；第5章在函数域上发展分析学的工具，包括 Mahler 定理的模拟、Γ-函数、高斯和、积分理论（分布与测度），是 Goss、Thakur 等人工作的总结。这些理论目前仍处在发展阶段。最后是两个附录（高次互反律的“分圆”证明和分圆函数域的正规整基），它们在内容上不能归于前五章中，而有自身的意义。

作者从1985年起为研究生举办过多次关于分圆函数域和 Drinfeld 模的讨论班，并且与他们一起从事这方面的研究工作。本书就是这些讨论班中的材料以及研究工作中的一部分材料的总结。作者感谢参加讨论班的中国科技大学历届研究生，他们和我曾进行过许多有益的讨论和共同从事研究工作。其中特别要感谢徐飞博士，他为本书写了第3章的初稿。我希望这本书能促使更多的同行对于分圆函数域以及一般的 Drinfeld 模理论产生兴趣，并且去试图研究其中一些重要的课题。

最后，作者感谢数学天元基金提供的资助。

冯克勤

1995年7月于中国科学技术大学

常用符号

$\boldsymbol{F}_q$	q 元有限域
p	q 的素因子
$k=\boldsymbol{F}_q(T)$	常数域为 $\boldsymbol{F}_q$ 的有理函数域
$R=\boldsymbol{F}_q[T]$	$\boldsymbol{F}_q$ 上多项式环
R_1	R 中首1多项式全体
k^{ac}	k 的代数闭包
Λ_M	Carlitz R-模 k^{ac} 中的 M-torsion 子模
$K=k(\Lambda_M)$	分圆函数域
$K^+=k(\Lambda_M)^+$	K 的最大"实"子域
O_K, O_K^+	K 和 K^+的整元环
U_K, U_K^+	环 O_K 和 O_K^+ 的单位群
$C(K), C^0(K), C(O_K)$	函数域 K 的除子类群,零次除子类群和理想类群
$h(K), h(O_K)$	K 的(零次)除子类数和理想类数
$R(O_K)$	K 的 regulator
χ	R 上的 Dirichlet 特征
χ^*	与 χ 相结合的本原特征
F_χ	χ 的导子(conductor)
$Z_K(U)$	函数域 K 的(Hasse-Weil)zeta 函数
$g(K)$	函数域 K 的亏格

$C_y(K^+)$	Kummer-Hilbert 分圆单位系
$C_y(\mathscr{D},K^+)$	Levesque 分圆单位系
C	Sinnott 分圆单位群
S^-	Stickelberger 理想
$\zeta_{(\infty)}(s)$	Goss zeta 函数
$\beta_i(T)$	Bernoulli-Goss 多项式
$e(z)$	指数函数
B_m	Bernoulli-Carlitz"数"
$[i]=T^{q^i}-T$	
$D_i=[i][i-1]^q\cdots[1]^{q^{i-1}}$	
$L_i=[i][i-1]\cdots[1]$	
$\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}=\dfrac{D_i}{D_k L_{i-k}^{q^k}}$	
Γ_j	Gamma 函数
$\Gamma_p(z)$	P-adic Gamma 函数
g_j	高斯和
$s_i(k)=\sum\limits_{\substack{A\in R_1 \\ \deg A=i}} A^k$	幂和

目　录