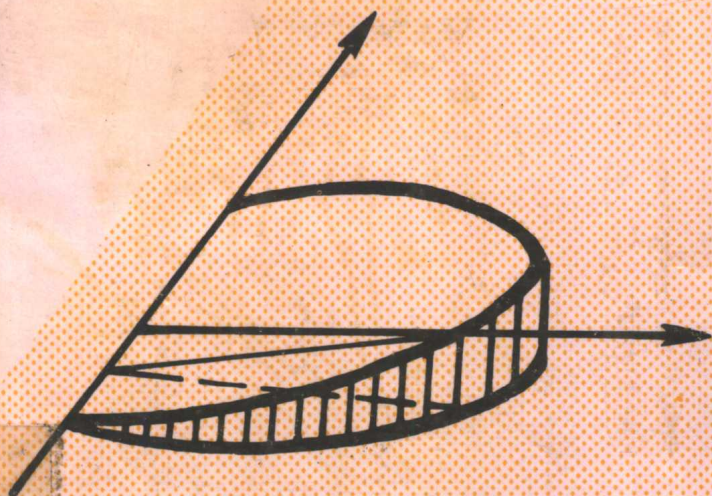


大专教学同步参考书

上册

高等数学 解题方法指导

汪荷仙 编著



成都科技大学出版社

947344

013

013
3142
1

3142

1.72.5

高等数学解题方法指导

——大专教学同步参考书

成都科技大学出版社

(川) 新登字015号

责任编辑 梁式梅

封面设计 光 光

(书名) 高等数学解题方法指导

——大专教学同步参考书

汪荷仙 编著

成都科技大学出版社出版发行

(通讯处: 成都科技大学391信箱、邮编610065)

四川教育学院印刷厂印刷

开本: 787×1092毫米 1/32 印张: 21

1992年5月第1版 1992年5月第1次印刷

字数: 455千字 印数: 1—5000

ISBN7—5616—0415—7/0.39

定价: 8.60元

前 言

一

《高等数学解题方法指导》(下简称《指导》),由笔者在四川大学长期执教高等数学所使用和搜集的丰富资料,经修订、整理、提炼而成。它的内容和章、节次序,与高等教育出版社出版、四川大学数学系高等数学教研室编写的,综合大学和师范院校物理类适用的《高等数学》第二版(下称《教材》)相一致。是该《教材》的配套辅导资料。

由于综合大学和师范院校物理类的高等数学,与理、工、工院校的力学、计算机科学技术、机械设计与制造等类型的专业,在硕士招生考试中,按教委的通知精神,都划规数学(一)、数学(二);加之笔者在教学过程中,大量参阅了工院校流行的教材、讲义和教学资料,因此,《指导》实际上也是上述数学(一)、(二)的配套辅导资料。

二

本书的框架结构,基本上是按《教材》的章、节顺序编排的。每章划分为若干节,每节内安排了如下的四个部分:

I. 内容提要。是对该节主要内容进行归纳、整理、提炼而成。便于读者提纲挈领,掌握有关主要概念、定理、方法、公式等。

II. 解题方法分类指导与范例。在这一部分中,(1)对与该节内容相关的习题的解题方法、步骤和技巧,较系

统、全面、简洁地进行了分类、归纳和阐述；（2）按上述分类，分别精选例题，开掘、剖析和揭示解题思路，研讨解题过程，力图把基本理论、基本方法、解题技巧等多方面的教学要求，寓于这些范例之中。因此，这里不仅有介绍基本思路、基本方法的计算题或证明题，而且有基本概念的讨论题，似是而非的追问题，初学者不易理解或易于出错的澄清题，有一题多解的开拓思路题，也有较灵活的综合题。不少范例，在给出解题过程之前，作了审题时如何思考或下手的详尽分析，指明解题的正确思路和易犯错误之处及其出错原因。解完之后，又提出了新问题，借以推动读者进一步思考。上述（1）、（2）两项内容是结合起来编写的。（3）综合题。有一些题的解法与本节内容直接相关，而且有关的解题方法和技巧比较重要，但又或较多牵涉前面章节的知识，或综合性、技巧性，难度较强，不便直接划归上述的某一类，就放到这里进行研讨。可见并非每一部分都有必要安排综合题。

Ⅱ. 课堂练习题及其说明。这一部分的练习题及其解法的有关说明，供教师准备习题课时选用或参考。题目侧重于在解题过程中，较多需要教师及时引导，帮助纠偏，进行归纳、小结的类型。因此，对于自学者来说，这部分题目自然也是适合他们选用的练习题。

Ⅳ. 补充题。鉴于《教材》中的习题，类型和难度都嫌不足，这部分题就是为满足教学的实际需要而补充的。补充题中，大部分是为多数同学而准备的；另外少量较难的题，则为学有余力的同学所安排，题号上标以•号以示区别。补充题的目的在于为读者加深和扩充所学知识，锻炼较强的解

题能力，开阔思路和视野，准备硕士招生考试提供一组良好的练习题。

最后，每章末，附上数量不等的参考题。它们主要选自与本章内容有关的各院、校和研究所历年硕士生入学试题。

三

高等数学，历来是大专院校和中专许多专业的重要基础课，教学对象非常广泛。高等数学中的知识和方法、技巧丰富多彩，及早掌握它们，将使有关专业的学生，在其一生的学习和工作实践中受益无穷。著名的数学家和教育家乔治·波利亚（George Polya）曾说过：“一位好的数学教师或学生应努力保持解题的好胃口。”切身经验也告诉我们，要想深入掌握高等数学，最好的办法莫过于经常动手去解题。可见解题能力的培养锻炼，在学好高等数学中的重要地位。

然而在高等数学的教学中，困扰着师生、迫切需要解决的一个基本问题正是：初学者，深感拿到一个题不知如何思考、如何下手解题，不善于把学过的知识灵活运用于解题。学过的人苦于难题不好对付，解题方法理不出头绪，学习不易深入。长期以来，在教学实践中，解决这一棘手问题的通常办法是“三从一大”（即从难、从严、从考试“实战”出发；大“运动量”）的“题海战术”。由于这个办法事倍功半，压得人喘不过气，以至不少青年望而生畏，数学学习难于坚持始终，被迫中途却步。

在高等数学的教学上，固然不存在“附耳过来，如此如此”就能传授其“诀窍”的捷径。不通过刻苦攻读是学不好

的。然而“四化”建设要求我们，涉及如此众多对象的高等数学教学，不能不讲求效益。讲究方法，尽力避免走弯路，并不意味着是对那种在学习上图轻松，怕艰苦的危险倾向作让步。作为“过来人”的教师，则在帮助学生更快地入门，引导读者高效益地进行时间和精力“投资”方面，有着不可推卸的责任。

另一方面，当前，人类正走向研究自身思维规律的时代，思维科学日新月异地发展，已经为高等数学教学改革的探索，创造了一定的条件。改进解题教学这个问题，近年来也已引起了我国不少学者和教师的关注，并且取得了可喜的进展。笔者长期从事高等数学教学，怀着极大的兴趣加入这个行列，以尽自己的绵薄之力。

《指导》通过对高等数学的大量习题（包括一些有名的习题集）和硕士招生试题的“题海”，进行反复筛选，仔细分类，分阶段组合，努力深入开掘剖析解题过程，力图揭示其解题思路。目的是通过这样的“开沟引路”，帮助读者避开“题海战术”的弯路，而以较少的时间和精力，有效地进行审题的思考方法和解题基本技能的训练，把牢固掌握高等数学的基础知识、基本理论与学会比较系统、完整的解题方法有机地结合起来。

《指导》中的例题、习题和解法，大部分是笔者在长期教学实践中进行如上探索所使用、积累和兄弟院校的成功之作。在此，笔者对所查阅、引用并从中得到教益、启示的宝贵资料的作者们深表谢意，并将在卷末的文献目录中一一予以列举。

我国高等院校和科研单位近十年来的硕士招生试题，是

《指导》筛选例题和习题的主要来源之一。原因之一，是以便借此机会从一个侧面推动高等数学教学资料 and 经验的交流，帮助读者管窥各校的教学情况和要求。更为重要的是这个宝贵的题库（其中有一部分，就是选自各种著名的习题集）非常值得重视。因为它是在科学的教育思想和教委制定的教学大纲指导下，我国广大数学教师的经验、智慧和心血凝聚的产物。它不仅在我国的高等教育发展上有史料的保存价值，而且对当前的教学，对广大学生学好高等数学，以及硕士招生前的指导温课迎考，无疑都具有相当重要的实际意义。这些考题并非都是难题，但它们共同的突出特点是：体现课程要求比较准确，题目灵活，类型多样。很有利于学生掌握三基（基础知识、基本理论、基本技能），开阔眼界，开拓思路，锻炼思维。

对于这些考题，《指导》不停留于当前流行的各种题解的编排处理方式，而是进行归类整理，把它们分别纳入《教材》体系的有关章节，点明用有关原理解答试题的方法，使考题求解与教材内容有机结合，融为一体。这样安排，既有利于学生进一步明确每一章节的学习方向，切实掌握重点、难点，扩大视野，启迪思维，开发智力，培养能力，激发兴趣，推进学习的深、广度，变被动学习为主动掌握；又能破除对硕士招生考题的神秘感，变盲目猜题为胸中有数，变考前突击为“平战结合”，两者相得益彰，相互促进，从而更好地掌握学习规律和节奏，巩固所学知识，提高学习成效，从容迎考应试。

《指导》所精选的题目，内容广泛，且基本上包含了高等数学中的各种题型。它们既有相当的典型性、综合性，又

有一定的难度和技巧，既顾及到初学者和自学者的需要，又考虑了在校生对加深和补充课堂知识的要求，所以基本题和疑难题兼而有之。我们就是以这些有代表性的题目作素材展开解题方法研讨的。同时便于读者了解硕士招生试题的全貌，掌握平时学习考试与硕士招生考试不同层次要求之间的联系与差别，自我对照检查学习状况，我们选择了各专业硕士招生全国统一试题中的一部分作为附录。

为编好《指导》，笔者虽然尽了一定的努力，终因才疏学浅，深感力不从心，缺点、错误在所难免，热望专家和读者多多批评指正。

（作者委托联系人：本书责任编辑梁式梅，成都科技大学出版社，
邮编：610065）

笔 者

1989年8月10日于四川大学数学系

目 次

第〇章 导读——改革解题训练	(1)
§ 0-1 波利亚式的学生	(1)
§ 0-2 数学创造的心智活动规律	(1)
§ 0-3 努力克服传统教学方法中的弊端	(4)
§ 0-4 怎样解题	(5)
§ 0-5 对怎样使用《指导》的建议	(9)
§ 0-6 几个常用数学符号的意义	(12)
第一章 函数与极限	(13)
§ 1-1 函数	(13)
I 内容提要	(13)
(1) 函数的定义	(13)
(2) 函数可能具有的几种重要几何特性	(14)
(3) 反函数的定义	(15)
(4) 复合函数的定义	(15)
(5) 初等函数	(15)
(6) 非初等函数	(15)
II 解题方法分类指导与范例	(16)
(1) 确定函数的定义域和值域	(16)
(2) 函数符号的运用	(22)
(3) 按定义证明函数的几何特性	(27)
(4) 求已知函数的反函数	(32)
(5) 函数的作图(制曲线)法	(33)

(6)	综合题	(38)
III	课堂练习题及其说明	(48)
IV	补充题	(60)
§ 1-2	数列的极限	(63)
I	内容提要	(63)
(1)	数列极限的定义	(63)
(2)	收敛数列的基本性质	(63)
(3)	数列极限存在的判别法	(63)
(4)	数列极限的四则运算法则	(64)
II	解题方法分类指导与范例	(64)
(1)	根据定义验证极限	(64)
(2)	应用极限运算法则求极限	(69)
(3)	应用数列极限存在的判别法, 证明或计算数 列的极限	(74)
(4)	应用重要极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ 求极限	(77)
(5)	求通项由递推关系式给出的数列的极限	(79)
(6)	综合题	(83)
III	课堂练习题及其说明	(89)
IV	补充题	(104)
§ 1-3	函数的极限	(106)
I	内容提要	(106)
(1)	函数极限的定义	(106)
(2)	函数极限的性质	(106)
(3)	函数极限存在的判别法	(108)
(4)	函数极限的四则运算法则	(109)
(5)	两个重要极限	(109)
II	解题方法分类指导与范例	(109)
(1)	根据定义验证函数的极限	(109)

(2)	应用函数极限存在的判别法则求极限	(112)
(3)	应用极限的四则运算法则求极限	(113)
(4)	应用两个重要极限求极限	(116)
(5)	应用变量代换方法求极限	(118)
(6)	综合题	(119)
III	课堂练习题及其说明	(128)
IV	补充题	(137)
§ 1-4	无穷小量的比较	(140)
I	内容提要	(140)
(1)	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = A$	(140)
(2)	无穷小量代换定理	(140)
(3)	当 $x \rightarrow 0$ 时, 有 $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $e^x - 1 \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$, $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x$	(141)
(4)	高阶无穷小量	(141)
(5)	K阶无穷小量	(141)
(6)	符号: $O(\beta)$, $o(\beta)$	(141)
II	解题方法分类指导与范例	(141)
(1)	证明在同一极限过程中的两个无穷小量是等价, 同阶, 或一个较另一个是高阶的无穷小量	(141)
(2)	在同一极限过程中的几个无穷小量, 取定一个 作为比较的标准, 问, 其它无穷小量是它的几 阶无穷小量?	(143)
(3)	应用等价无穷小量代换定理求极限	(145)
III	课堂练习题及其说明	(146)
IV	补充题	(149)
§ 1-5	连续函数	(150)
I	内容提要	(150)

(1)	连续函数的定义	(150)
(2)	间断点	(151)
(3)	连续函数的运算	(151)
(4)	初等函数在它们的定义域上是连续的	(151)
(5)	函数一致连续的定义	(151)
(6)	在闭区间上连续函数的重要性质	(152)
II	解题方法分类指导与范例	(152)
(1)	根据定义证明函数的连续性和一致连续性	(152)
(2)	函数连续性的研究	(153)
(3)	在闭区间上连续函数性质的应用	(154)
(4)	应用函数的连续性求极限	(156)
(5)	综合题	(159)
III	课堂练习题及其说明	(165)
IV	补充题	(168)
§ 1-6	第一章参考题	(170)
第二章	微分学	(174)
§ 2-1	导数及其运算	(174)
I	内容提要	(174)
(1)	导数的定义	(174)
(2)	导数的几何意义	(174)
(3)	函数在一点处可导与连续的关系	(175)
(4)	求导数的方法	(175)
(5)	高阶导数及其算法	(177)
II	解题方法分类指导与范例	(178)
(1)	函数的导数概念	(178)
(2)	求(计算)导数的方法	(183)
(3)	综合题	(194)
III	课堂练习题及其说明	(201)
IV	补充题	(206)

§ 2-2 微分及其应用	(210)
I 内容提要	(210)
(1) 微分的定义	(210)
(2) 可微与可导的关系	(211)
(3) 微分的几何意义	(211)
(4) 微分的基本公式和运算法则	(211)
(5) 微分形式的不变性	(212)
(6) 高阶微分	(212)
(7) 微分的应用	(213)
II 解题方法分类指导与范例	(214)
(1) 求函数在给定点处的增量和微分	(214)
(2) 求函数的微分	(214)
(3) 求高阶微分	(217)
(4) 利用微分作近似计算	(217)
III 课堂练习题及其说明	(220)
IV 补充题	(223)
§ 2-3 中值定理	(224)
I 内容提要	(224)
(1) 罗尔定理	(224)
(2) 拉格朗日中值定理	(224)
(3) 柯西中值定理	(224)
II 解题方法分类指导与范例	(225)
(1) 验证函数在给定区间上满足中值定理的条件 和结论	(225)
(2) 运用中值定理判断方程实根的个数以及实根 所在的区间(根的分离)	(227)
(3) 运用中值定理证明不等式	(229)
(4) 运用中值定理进行推理证明	(230)
(5) 综合题	(233)

III	课堂练习题及其说明	(239)
IV	补充题	(244)
§ 2-4	未定型极限、泰勒 (Taylor) 公式	(242)
I	内容提要	(242)
(1)	求未定型的极限 (罗必塔法则)	(242)
(2)	泰勒公式	(243)
II	解题方法分类指导与范例	(245)
(1)	求未定型的极限 (罗必塔法则)	(245)
(2)	泰勒公式	(256)
III	课堂练习题及其说明	(272)
IV	补充题	(276)
§ 2-5	导数的应用	(277)
I	内容提要	(278)
(1)	函数的增减性与极值	(278)
(2)	函数在区间上的最大值和最小值	(278)
(3)	曲线的凹凸与拐点	(279)
(4)	曲线的渐近线	(279)
II	解题方法分类指导与范例	(280)
(1)	讨论函数的单调增减性和极值	(280)
(2)	最大、最小值问题	(284)
(3)	求函数图形的拐点	(289)
(4)	作函数的图形	(292)
(5)	证明不等式	(294)
(6)	综合题	(297)
III	课堂练习题及其说明	(302)
IV	补充题	(306)
§ 2-6	第二章参考题	(308)
第三章	不定积分	(314)
§ 3-1	不定积分的概念与计算方法	(314)

I	内容提要	(314)
(1)	原函数与不定积分的概念	(314)
(2)	基本积分公式	(314)
(3)	不定积分的基本性质	(315)
(4)	基本积分法	(316)
II	解题方法分类指导与范例	(317)
(1)	直接积分法	(318)
(2)	换元积分法	(320)
(3)	分部积分法	(334)
(4)	综合题	(345)
III	课堂练习题及其说明	(367)
IV	补充题	(375)
§ 3-2	几类特殊初等函数的积分法	(380)
I	内容提要	(380)
(1)	有理函数的积分法	(380)
(2)	三角函数有理式的积分法	(382)
(3)	简单无理函数的积分法	(384)
II	解题方法分类指导与范例	(386)
(1)	有理函数的积分	(386)
(2)	三角函数有理式的积分	(392)
(3)	简单无理函数的积分	(399)
(4)	综合题	(406)
III	课堂练习题及其说明	(447)
IV	补充题	(460)
§ 3-3	第三章参考题	(464)

第四章 微分方程初步..... (469)

§ 4-1 微分方程的基本概念、一阶微分方程..... (469)

I 内容提要..... (469)

(1) 微分方程的基本概念..... (469)

(2) 一阶微分方程..... (470)

II 解题方法分类指导与范例..... (472)

(1) 可分离变量的微分方程的解法..... (472)

(2) 一阶线性方程的解法..... (478)

(3) 综合题..... (487)

III 课堂练习题及其说明..... (495)

IV 补充题..... (499)

§ 4-2 二阶微分方程..... (501)

I 内容提要..... (501)

(1) 二阶微分方程的概念..... (501)

(2) 三类可降阶的二阶微分方程..... (501)

(3) 二阶线性微分方程的基本概念..... (502)

II 解题方法分类指导与范例..... (503)

(1) 可降阶的二阶微分方程的解法..... (503)

(2) 二阶常系数线性齐次微分方程的解法..... (507)

(3) 二阶常系数线性非齐次微分方程的求解
步骤..... (514)

III 课堂练习题及其说明..... (524)

IV 补充题..... (530)

§ 4-3 第四章参考题..... (532)

第五章 定积分..... (536)

§ 5-1 定积分的概念与性质..... (536)

I 内容提要..... (536)