中 等 专 业 学 校

工科专业试用教材数学第四册

教 学 参 考 书

北京市中等专业学校数学教学参考书编写组编

人 民 教 育 出 版 社

中等专业学校

工科专业试用教材数学第四册

教学参考书

[illegible]

人民教育出版社

中 等 专 业 学 校
工科专业试用教材数学第四册
教 学 参 考 书
北京市中等专业学校数学教学参考书编写组编
*
人民教育出版社 出版
新华书店上海发行所发行
浙江天台印刷厂印装
*
开本 787×1092 1/32 印张 10 10/16 字数 220,000
1980年8月第1版 1982年2月第3次印刷
印数 40.001—55.000

书号 13012·0489 定价 0.78 元

编者的话

本书是根据工科专业通用的《中等专业学校数学教学大纲(试行草案)》(以下简称大纲)及《中专数学第四册》教材(以下简称教材)编写的．可供中专、普通高中数学教师教学参考．

本书按照教材的章目，共分六章．它的主要内容有：各章(教材)教学的目的要求；教学时数的大体安排；在系统地分析教材内容的基础上，提出教材的重点、难点、教学的关键、教学中应该注意的问题及一些教法建议；对典型的，疑难的习题作了较详细的解答；为了教师阅读方便，在有些章后还设有附录，介绍与教材有密切联系的某些内容．本书是在教材经过试用之后，针对大多数中专学校尚未使用教材的实际情况而编写的．在编写过程中，力求文字通俗易懂，内容联系教学实际，以便于教师更好地试用教材．

本书是由北京市高教局组织的编写组集体编写的．北京机械学校朱铭道主编，参加编写的有(以姓氏笔划为序)北京无线电学校丁文江、北京市交通学校关光利、北京化工学校苏学同、北京电力学校张齐金、北京长途电信学校高益昌、北京机械学校富国栋．由北京工业学院孙树本教授主审，参加审稿的还有王忠信、王维锦、余锡华、罗崇蹇、索润普、徐迪兹．在审稿中，他们提出了很多宝贵意见，孙树本教授对我们的帮助尤大，对此，我们表示衷心的感谢．

由于我们水平有限，[illegible]促，书中

一定存在着不少缺点和错误，欢迎读者批评指正。

编　　者

1980.7.

目　　录

第二十章　排列　组合
二项式定理

排列和组合在许多实际问题中有着广泛的应用．它是二项式定理的预备知识，也是学习概率、统计及高等代数等数学学科的必备基础．数学归纳法是数学推理中的一个重要的证明方法．二项式定理在实际运算和以后的数学学习中都是常用的基础知识．这三部分内容既有联系，又有相对的独立性．教材把它们汇成一章．

Ⅰ．目的要求

1．使学生正确理解排列、组合这两个基本概念，熟练掌握排列种数、组合种数的计算公式，掌握组合种数的两个性质；

2．使学生正确理解乘法、加法原理，能运用这两条原理分析排列、组合的应用题；

3．使学生了解数学归纳法的基本思想，并能运用它论证较简单的命题；

4．使学生掌握二项式定理以及展开式的四个性质，并能用它们计算和证明一些问题；

5．通过本章内容的教学，加深学生对由具体到抽象，由特殊到一般的认识规律的认识，提高分析问题和解决问题的能力．

II. 学时安排

本章教学时数约需 16 学时，大体安排如下：

§20-1	排列	3 学时
§20-2	组合	3 学时
习题课		2 学时
§20-3	数学归纳法	2 学时
§20-4	二项式定理	2 学时
习题课		2 学时
总结复习或测验		2 学时

III. 教材分析与教法研究

本章教材从简单的实例出发，首先抽象出分析、计算排列、组合问题的基本法则——两条原理. 接着，教材又通过实例，概括、抽象出排列的定义，并用乘法原理归纳出排列种数的计算公式. 然后，用适量的例题巩固了概念和计算. 教材在阐述组合概念时，强调了排列与组合的区别及内在联系，并由此导出组合种数的计算公式和组合种数的两个性质. 在讲清归纳推理思路的基础上引入了数学归纳法，并运用数学归纳法及组合的知识推证了二项式定理，讨论了二项展开式的四个性质及其应用.

本章教材的重点是排列与组合的概念、种数公式及其应用.

本章教材的难点是：(1)识别、解决较复杂的排列与组合的应用题；(2)了解数学归纳法的实质，运用数学归纳法论证

较复杂的命题.

- 使学生正确理解排列、组合的概念，运用两条原理来分析、计算排列、组合的应用题，了解数学归纳法的实质是本章教学的关键.

以下分排列与组合，数学归纳法，二项式定理这三个单元，对教材作一些分析，并提出教学中应注意的问题及教法上的建议，供参考.

一、排列与组合

本单元的主要任务是介绍两个原理，建立排列、组合的概念，推导排列、组合种数公式，并运用它们解决一些问题.

1．两个原理

关于两个原理，应注意：

(i) 两个原理中的"一件事"也可理解为"一个事件"，这样理解有助于同第二十一章概率初步中的"事件"概念一致起来．下面我们在叙述中也把它们理解为同义词.

(ii) 乘法原理和加法原理有着本质的差别．乘法原理的本质是"依次完成这 k 个步骤，此事才能完成".因此引用乘法原理时，总是先把一个事件分解成 k 个步骤(即 k 个较简单的事件)来分析、计算．由于每一步之间的关系是依次的关系，所以方法总数是乘积的结果．加法原理的实质是"任选一种方法，此事即能完成"．对完成该事件来说，选了一种方法，就不能再选其它方法，所以这 k 类方法是互相排斥的(也称为互斥的或互不相容的)，而且每一类中各个方法又是不同的，所以方法总数是相加的结果.

在本章附录中，我们用集合的观点、方法解释两个原理，

以便教师进一步领会它们的实质，沟通它们与概率论中的乘法、加法之间的内在联系.

2．排列的概念

教材通过例3，4抽象出排列的定义．教材在分析、解决例3，4时有两点值得我们注意：(i)紧扣乘法原理；(ii)把例子中的各种结果列成“树”图．应当指出，在排列概念的教学中，运用“树”图不仅能帮助学生无重复，无遗漏地列出所有的排列，而且对突出“顺序”有好处．为了让学生掌握“树”图，可在例4后再举一例．例如，从分别写有数字1，2，3，4的四张卡片中，每次取出三张，可以排成多少个不同的三位数？

教师在分析排列的定义时，要向学生指出：

(i) 定义中的n个元素是不同的，即可以分辨的．不尽相异元素的排列问题不属于本书讨论的范围.

(ii) 不同元素构成的排列，显然是不同的排列；但元素相同顺序不同仍是不同的排列．因此，相同的排列必须具备元素、顺序都相同.

(iii) 排列定义中“元素”、“顺序”是关键．对每个具体问题来说，“元素”、“顺序”是有明确含义的．“顺序”又是个难点．教学中，要通过具体例子讲清“顺序”．例如，从三个数a，b，c中，取出两个相加；相减；相乘；相除．显然，相加、相乘无“顺序”，而相减、相除有“顺序”.

(iv) 如何完成“从n个不同的元素中，每次取出m个($m\leqslant n$)，按照一定的顺序排列”呢？通常有下面两种方法：一种是先取后排，即一次取出(m个)元素，然后对取出的元素按顺序进行排列；另一种是取一个排一个，即把从n个不同的元

素中每次取出 m 个的排列分 m 步完成.

上述两种方法在教材中都得到了应用. 用第一种方法可推出组合种数与排列种数之间的关系式; 用第二种方法及乘法原理可推出排列种数的计算公式.

3. 排列种数的计算公式

在实际应用中，不但要知道某一问题的各种不同的具体排列，而且更主要的是要计算不同排列的种数. 排列种数当然可以由具体的排列逐一得到，但在 n, m 较大时就会遇到困难. 因此，有必要推导计算排列种数的公式.

教材运用直观的填空法(也叫占位法)得到了排列种数的计算公式: $A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$. 这是一种不完全归纳法，不是公式的证明. 公式的证明可用数学归纳法. 教师应当注意，填空法不但在这里有用，而且在解决排列应用题时也可以帮助我们分析问题.

应当强调指出，排列，不同的具体排列，排列种数这三者有着本质的差别，但又有一定的联系.

从 3 个元素 a, b, c 中每次取出 2 个元素的排列是指“从 3 个元素 a, b, c 中，每次取出 2 个，按照一定的顺序摆成一排”这件事. 所以我们说，排列是一个事件，而不是数.

所有不同的排法 ab, ac, ba, ca, bc, cb 就是不同的具体排列. 它们是上述事件的各种结果，可以构成一个集合: $\{ab, ac, ba, ca, bc, cb\}$. 每一种排法是这个集合里的一个元素. 所以，元素的个数就是排列的种数 $A_3^2=6$. 也就是说，排列种数是一个数，它反映了“排列”这一个事件一共有多少种结果.

排列种数公式的特点是：m个因子相乘，最大的数为n，最小的数为$n-m+1$.

学生容易把文字形式的种数表达式写错，特别是最后一个因子.

教材的例6(1)是计算排列种数的另一个公式．例6(2)的证明中用到了

$$n!=n\cdot(n-1)!$$

即
$$P_n=nP_{n-1}$$

这是一种递推关系式．在证明题中（如习题20-1的第3题）经常用到的递推关系还有：

$$A_n^m=nA_{n-1}^{m-1},\quad A_n^m=(n-m+1)A_n^{m-1}$$

等.

排列的应用题对初学者来说是个难点．它难在：(i)如何把一个具体问题抽象成排列问题．学生往往搞不清具体问题中元素是什么，顺序指的又是什么，以至于解题时无从下手．(ii)要计算排列种数，就需要作比较仔细地分析、综合才能无重复、无遗漏地得到结果.

要突破抽象、分析这两个难关，就需要教师在课堂教学中做到：

(i) 要着重分析题意．讲清实际问题中，每个具体排列的实际含义，指出"元素"、"顺序"的实际意义，并找出限制条件.

(ii) 要紧扣两个原理来分析、计算．首先要把所讨论的"排列"（即事件）分解成若干个较简单的类或步骤（即较简单的事件），计算每一类或每一步的方法种数，然后再运用加法

原理、乘法原理加以综合.

(iii) 充分运用直观工具，如“树”图、填空法、文氏图等，以便把排列、不同排列之间的关系以及不同排列种数这三者的关系直观地反映出来.

例如，教材§20-1例9的解一，若用填空法可以这样分析：本题中元素就是六个数字 0，1，3，5，7，9. 从这六个元素中选出三个去填三个空位(见图1)，每个空位填一个. 限制条件是左面第一个空位不能填入零. 显然，每一种符合限制条件的填法就可以得到一个没有重复数字的三位数. 现在，分三步进行. 从1，3，5，7，9这五个元素中任选一个填入第一个空位，共有5种填法；第二个空位只能从余下的5个元素(包括零)中，任选一个填上，共有5种填法；第三个空位只能从余下的4个元素中，任选一个填上，共4种填法. 直接由乘法原理，得填法的总数为

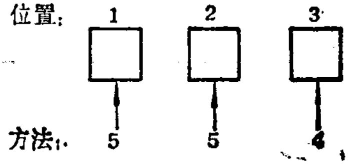

图 1

$$5\times5\times4=100(\text{个})$$

即适合题意的三位数有100个.

对于§20-1例9，教材给出了三种解法，按解法的思路来分可分为直接法和间接法两种.

所谓直接法就是根据题目的要求和条件，从正面直接去求出所有符合限制条件的排法总数. 例如，例9的解一、解三都是直接法.

间接法(也称排除法)是先不考虑“限制条件”，求出排法总数；然后，把这些排法分为两类，有符合条件的和不符合条

件的(显然，它们是互斥的)；再求出不符合条件的排列种数，根据加法原理，得

$$\begin{matrix}\text{符合条件的}\\ \text{排列种数}\end{matrix}=\begin{matrix}\text{不加“限制条件”}\\ \text{的排列种数}\end{matrix}-\begin{matrix}\text{不符合条件}\\ \text{的排列种数}\end{matrix}$$

例如，例 9 的解二是间接法.

在解排列的应用题时，有时用间接法更简便. 为了说明间接法的实质，便于教师同第二十一章概率初步中的事件、逆事件作对比，下面我们采用集合论中的文氏图来描述(不必向学生介绍).

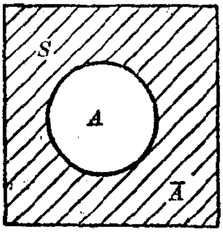

图 2

设 S 为某个问题中所研究的排列，据上所述，它是一个事件；A 表示该问题中符合“限制条件”的排列，$\overline{A}$ 表示不符合“限制条件”的排列. 由于 S 中的任一具体的排列不是属于 A，就是属于 $\overline{A}$，并且 A 与 $\overline{A}$ 互斥. 所以 S，A，$\overline{A}$ 三者的关系可用图 2 来描述. 图中的方块表示 S，圆内的图形表示 A，而阴影部分表示 $\overline{A}$.

又设 $\mu(S)$ 表示排列 S 的种数，$\mu(A)$，$\mu(\overline{A})$ 分别表示排列 A，$\overline{A}$ 的种数，则由加法原理，得

$$\mu(S)=\mu(A)+\mu(\overline{A})$$

即

$$\mu(A)=\mu(S)-\mu(\overline{A})$$

若把图 2 中各图形的面积描述为相应的排列种数，那末上述两式的这种关系在图中也是很明显的.

从集合、图示的角度来理解，直接法是直接求出 A 的元素个数(即 A 的面积). 而间接法是先求出 S，$\overline{A}$ 的元素个数

(即 S, $\overline{A}$ 的面积)，然后计算它们的差得到 A 的元素个数(即 A 的面积).

例 某天的课程表要排入政治、语文、数学、物理、美术、体育六门课. 若第一节不排体育，第六节不排数学，问共有多少种排法?

解一 本题是排列问题. 限制条件是"第一节不排体育，第六节不排数学". 用直接法解，可把符合条件的排列分为下列互斥的四类:

第一类: 数学、体育既不排在第一节也不排在第六节. 可分两步来排: 先把数学、体育排在第二至第五的某两节中，共有 A_4^2 种排法; 再把余下的四门课程排在其余的四节内，共有 P_4 种排法. 根据乘法原理，第一类排法共有 $A_4^2 \cdot P_4$ 种排法.

第二类: 数学排在第一节，但体育不排在第六节. 也可分两步来排: 先把体育排在第 2 至第 5 的某一节中，共有 A_4^1 种排法; 再把余下的四门课排在其余四节内，共 P_4 种. 根据乘法原理，第二类排法共有 $A_4^1 \cdot P_4$ 种排法.

第三类: 体育排在第六节，但数学不排在第一节. 共 $A_4^1 P_4$ 种排法.

第四类: 数学排在第一节，且体育排在第六节. 共 P_4 种排法.

根据加法原理，适合题意的排法，共有

$$A_4^2 P_4 + A_4^1 P_4 + A_4^1 P_4 + P_4 = 504(\text{种})$$

解二 用间接法. 如不考虑限制条件，则有 P_6 种排课方法. 不符合条件的排法，有下面两类:

第一类: 数学排在第六节. 共有 P_5 种排法.

第二类：体育课排在第一节．共有 P_5 种排法．

但要注意，第一类与第二类不是互斥的．当数学排在第六节，且体育排在第一节的每一种排法（共 P_4 种）是第一、第二两类的公共部分．因此，如果从两类种数的和中减去重复计算的 P_4，则不符合条件的排法共有

$$P_5+P_5-P_4(种)$$

根据加法原理，符合条件的排法为

$$P_6-(P_5+P_5-P_4)=21P_4=504(种)$$

对比解一、解二可以看出，对本题来说，用间接法较简单．为了避免遗漏和重复计算可采用图示法．

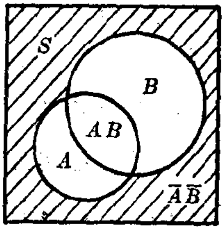

图 3

在图 3 中，我们设

S：“六门课的排列”（即排课表）；

A：“数学排在第六节”；

B：“体育排在第一节”；

则

$$\mu(S)=P_6,\quad \mu(A)=P_5,\quad \mu(B)=P_5$$

并且

$\bar{A}$：“数学不排在第六节”；

$\bar{B}$：“体育不排在第一节”；

AB：“数学排在第六节，并且体育排在第一节”；

$A\cup B$：“数学排在第六节，或体育排在第一节”；

$\bar{A}\bar{B}$：“数学不排在第六节，并且体育不排在第一节”．

由于 $\mu(AB)=P_4$，所以，由图 3 可得

$$\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)-\mu(AB)=P_5+P_5-P_4$$