

ZHISHIYINGJIS JI DELILENJIYI

陈宗基 编 著

自适应技术的 理论及应用

——控制、滤波、预报

北京航空航天大学出版社

自适应技术的理论及应用

——控制、滤波、预报

陈宗基 编著

北京航空航天大学出版社

内 容 题 要

本书介绍自适应控制、自适应预报、自适应滤波的理论与应用。内容包括：模型参考自适应控制的理论基础；模型参考自适应控制系统；在线参数估计；自校正控制系统以及自适应滤波与预报。本书叙述方式由浅入深，既介绍基本理论、基本方法、基本方案，又介绍该领域较深、较新的前沿研究结果，还介绍自适应控制、预报与滤波技术在实际中的成功应用。

本书可以作为理工科高等院校控制理论专业、控制工程专业、信息工程专业和系统工程专业高年级学生或研究生教材。对于从事各类控制系统设计、制造和运行维护的工程技术人员也是一本好的参考书。

责任编辑 樊 毅

自适应技术的理论及应用

——控制、滤波、预报

ZHISHIYING JISHU DE LILUN JI YINGYONG

陈宗基 编 著

北京航空航天大学出版社出版 新华书店总店科技发行所发行

通县觅子店印刷厂印装

全国新华书店经销

787×1092 1/16 印张：13.25 字数：339千字

1991年5月第1版 1991年5月第一次印刷 印数：1500册

ISBN 7-81012-225-8/TP·040 定价：3.50 元

前 言

本书系统性地介绍自适应控制、自适应滤波和自适应预报。

自适应技术，包括自适应控制、滤波和预报技术，在最近十年中得到了突飞猛进的发展，并且正在吸引更多的人参与这些技术的理论研究和实际应用。1988年，美国“控制理论未来方向”专门研究小组报告中指出，自适应控制（以及自适应滤波和预报），对那些在工作范围内展现参数有极大变化的应用场合是必须的。并且预言，概念上的进展和计算机软硬件技术的进展将进一步促进自适应技术的发展。因此，学习这门重要的课程，对于未来将担当我国现代化建设重担的高等院校学生，尤其是控制理论专业、控制工程专业、信息工程专业和系统工程专业的高年级学生和研究生是必要的。

本书内容包括：自适应技术概述；模型参考自适应控制的理论基础；模型参考自适应控制系统；在线参数估计；自校正控制系统以及自适应滤波与预报。本书既介绍基本理论、基本方法和基本方案，又介绍该领域较深、较新的前沿结果，还介绍自适应技术在实际中的成功应用。

通过本书的学习，读者应了解自适应技术的有关定义和分类；了解自适应技术在不同发展阶段的理论成果和应用成果；掌握自适应技术的基本理论、基本方法和基本方案；并在此基础上开展自适应技术尚未解决的理论问题研究和工程应用研究。

本书是在北京航空航天大学教材的基础上编写的，该教材自1984年以来，历年都被作为北京航空航天大学和中国科学院研究生院的教材，在授课过程中，许多教师和学生为进一步完善本书提出了宝贵意见，在此向他们表示由衷的感谢。

目 录

第一章 绪 论

第二章 模型参考自适应控制系统的理论基础

§2.1 李雅普诺夫稳定性理论	(6)
§2.2 正动态系统	(15)
§2.3 超稳定性理论	(18)
§2.4 波波夫积分不等式求解方法	(21)
习题	(26)

第三章 模型参考自适应控制系统

§3.1 M.I.T调节规律	(27)
§3.2 李雅普诺夫稳定性设计方法	(32)
§3.3 仅利用对象输入、输出测量值的模型参考自适应控制系统	(36)
§3.4 超稳定性设计方法	(48)
§3.5 离散时域模型参考自适应控制系统	(52)
§3.6 模型参考自适应控制方案的鲁棒性分析	(58)
§3.7 具有强鲁棒性的模型参考自适应方案	(67)
§3.8 模型参考自适应控制方案的应用实例	(76)
习题	(83)

第四章 在线参数估计

§4.1 系统辨识的一般概念	(84)
§4.2 离散系统的数学模型	(86)
§4.3 确定性系统参数估计	(87)
§4.4 随机性系统参数估计	(94)
习题	(119)

第五章 自校正控制系统

§5.1 自校正控制系统的设计原则	(120)
§5.2 最小方差自校正控制器	(122)
§5.3 极点配置自校正控制器	(139)
§5.4 自校正控制系统的特殊问题	(147)
§5.5 谨慎控制器	(155)
§5.6 输出跟踪自适应控制方案	(158)
§5.7 自校正控制方案的应用实例	(165)
习题	(169)

第六章 自适应滤波和预报

§6.1 最优滤波和预报	(170)
§6.2 自适应滤波和预报	(184)
习题	(198)
参考文献	(199)

第一章 绪 论

自适应技术包括自适应控制技术、自适应滤波技术和自适应预报技术。

在控制器、滤波器和预报器的整个设计过程和实现过程中的不确定性是普遍存在的，可以用图1.1来说明其普遍性。

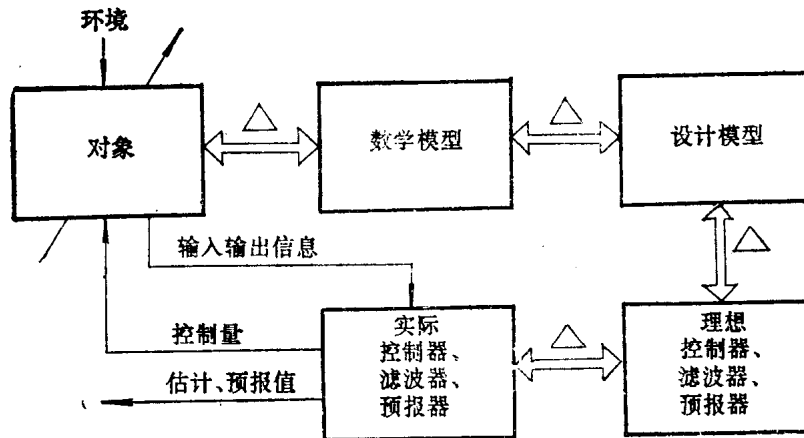


图 1.1 控制器、滤波器和预报器的设计和实现过程中的不确定性

这些不确定性是：

(1) 由于建模方法、实验手段和经费的限制，人们不可能得到与实际对象完全一致的数学模型。即，对象与数学模型之间总是存在着差别。

(2) 根据设计和制造的要求，必须对数学模型进行线性化处理 and 降阶简化，以便得到较为简单，易于设计的设计模型。即，数学模型与设计模型之间也总存在差别。

(3) 根据要求，采用某些方法，在大型计算机或其它介质上开展设计工作，得到理想控制器、理想滤波器或理想预报器。由于设计过程中采用某些工程近似处理和设计介质的限制，往往这些理想控制器、滤波器和预报器所达到的技术要求与设计要求有差别。

(4) 理想控制器、理想滤波器和理想预报器通过软件、硬件的实现，得到实际控制器、实际滤波器和实际预报器。但由于计算机有限字长的限制，元器件的误差，理想控制器和实际控制器之间、理想滤波器和实际滤波器之间，以及理想预报器与实际预报器之间总是存在着差别。

(5) 对象动态特性随工作环境的变化而变化。如飞机随高度的变化，船舶随水域深度的变化，它们的动态特性会发生较大幅度的变化。

(6) 对象动态特性在运行过程中，自身也会发生变化。如导弹、航天飞机由于燃料的消耗，其重量和重心会发生变化。

由以上分析可见，在控制器、滤波器和预报器的设计和实现过程中，不确定性是普遍存在的。

当不确定性较小时，我们可以采用常规的方法来设计控制器、滤波器和预报器。这些方

法就是我们在其他课程所学习的对已知对象模型的控制器设计、滤波器设计和预报器设计方法。但是，当不确定性较严重时，以上这些常规的设计方法所导致的控制器、滤波器和预报器在实际应用中将远远不能满足技术要求，有时还会导致系统失稳、失效等事故。因此，我们必须有一种新的设计技术，来解决应用在不确定性严重的场合的控制器、滤波器和预报器的设计问题。这种新的技术就是自适应技术。

1. 自适应技术的定义和三要素

在自适应技术的发展过程中，不同的学者在不同阶段，提出了不同的定义。若罗列这些众说纷云的定义，势必造成读者概念上的混乱。为此，本书只介绍当今国内外在自适应技术领域获得普遍认可的、揭示本质的定义。

韦氏字典指出，自适应是改变自身，使其行为适合于新的或者已经改变了的环境。

采用自适应技术的系统称为自适应系统。我们对自适应系统作如下定义。

自适应系统能在线地、实时地了解对象，根据不断丰富的对象信息，通过对一个可调环节的调整，使系统的性能达到技术要求或最优。由上述定义可见，自适应系统有三大要素：一是在线地、实时地了解对象；二是有一个可调环节；三是能使系统性能达到技术要求或最优。

在自适应控制系统中，在线地、实时地了解对象是通过测量和对象动态特性有关的输入输出量，或直接估计对象参数来达到的。自适应控制系统中总是存在一个可调控制器。使输出误差趋于零，或使某性能指标最优的要求，是通过可调控制器的设计准则来保证的。

在自适应滤波系统和自适应预报系统中，也是通过直接估计信号模型的参数，或测量某些与信号强相关的信号来在线地、实时地了解对象。在这些系统中，都有一个可调滤波器，该可调滤波器的设计准则保证这些系统达到最小估计误差或最小预报误差。

用上述的三要素，我们可以分析哪些系统是自适应系统，哪些系统不是自适应系统。

2. 自适应控制系统

自适应控制系统可以分为模型参考自适应控制系统和自校正控制系统。

模型参考自适应控制系统的典型结构如图1.2所示。其中参考模型的输出反映了设计者对被控对象输出的要求，调节机构根据某种设计准则来调节可调控制器的参数，使参考模型的输出和对象的输出之误差趋于零。或者说，该被控对象、调节机构和控制器所组成的复合系统将渐近地逼近参考模型。

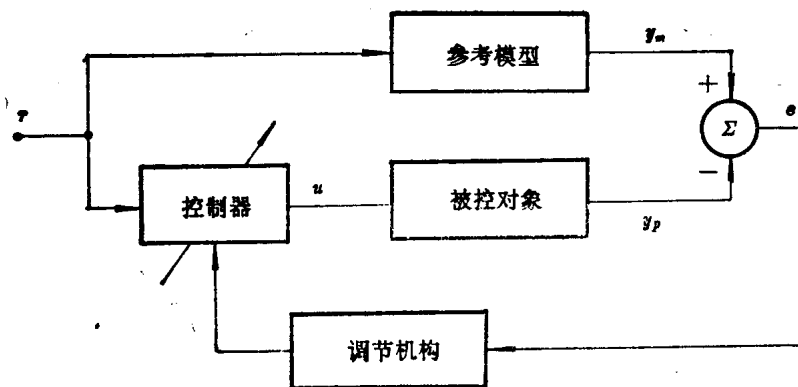


图 1.2 模型参考自适应控制系统

在模型参考自适应控制系统中,对未知被控对象在线的、实时的了解,是通过测量对象输出,并与参考模型输出相比较而间接获得的。有效控制量是由可调控制器产生的。如何调节控制器,即调节机构的设计准则保证了技术要求——使输出误差趋于零。

模型参考自适应控制系统又可以根据调节机构的不同设计准则来分类。一类是以威泰克(H.P. Whitaker)为代表的梯度法参数调节规律,它的设计准则是使性能指标 $\int_{t_0}^t e^2(\tau) d\tau$

最小,这里, $e(\tau)$ 代表参考模型和对象的输出误差。第二类是以派克斯(P.C. Parks)、乃伦局(K.S. Narendra)和莫诺泼立(R.V. Monopoli)为代表的以李雅普诺夫稳定性为设计准则的方案。第三类是以兰道(I.D. Landau)为代表的,以波波夫超稳定性为设计准则的方案。

模型参考自适应系统也可以根据参考模型和被控对象之间的连结方式的不同而分为串联式,并联式或串并联式。其基本方式是并联式,如图1.2所示。

自校正控制系统的典型结构如图1.3所示。参数估计器利用对象的输入输出量的测量值所提供的信息,迭代地估计对象参数,设计计算器根据选定的设计准则和获得的参数估计值,来计算控制器参数,从而获得有效的控制作用。

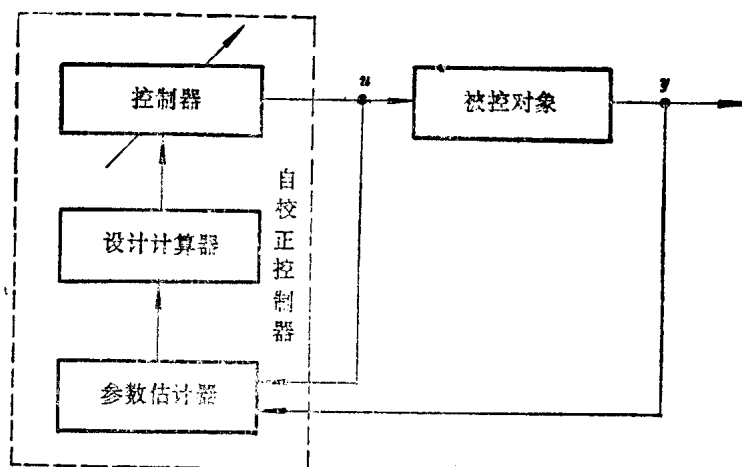


图 1.3 自校正控制系统

在自校正控制系统中,自适应系统的三大要素也是很明显的,对被控对象的了解是由估计对象模型的参数而获得的,可调控制器综合出有效的控制量,设计计算器的算法具体反映了性能指标的最优化要求。

我们可以采用许多方法对一个系统进行参数估计,诸如:最小二乘法,随机逼近法和伪线性递推算法等。我们又可以采用不同的设计手段对一个“已知”的对象进行设计,如最小方差控制与极点配置等。因此,根据参数估计和控制律设计方法的不同,可以派生出结构各异的多种自校正控制方案。为了分类的方便,目前多数学者按控制律设计方法的不同来进行分类,于是自校正控制系统可以分为极点配置和最小方差控制两大类。

由于自适应控制系统在本质上是非线性时变系统,分析研究较困难,还没有形成系统的理论,并且某些理论问题尚未彻底解决。因此,它还基本上局限于控制理论工作者的研究范围,和实际控制工程技术人员有较大的脱节。但由于计算机软硬件技术的迅速发展、某些理

论问题的突破，以及某些应用的成功开拓，使越来越多的工程技术人员对自适应控制方案发生了浓厚的兴趣。本节将简单介绍自适应控制方案的应用实例，以便使读者对其用途有一个大概的了解。本节涉及的某些实例，还要在第三章和第五章中详细介绍。

在NASA的24时光学跟踪望远镜中，吉尔巴特和温斯顿 (Gilbart and Winston) 利用模型参考自适应控制方案，把卫星跟踪精度提高了5倍以上。博里森和西丁 (Borrison and Syding) 在200千瓦的矿石粉碎机中采用自校正控制方案，把产量提高了10%。在年产13万吨的造纸机中，塞格拉尔和赫德奎斯特 (Cegrall and Hedquist) 利用自校正控制方案使纸的质量提高，成本却大幅度下降。杜蒙和比朗格 (Dumont and Belanger) 在工业二氧化钛窑上采用自校正控制方案，使稳态性能改善10%，动态性能也有改进。卡尔斯特拉姆等 (Kallström et al) 在35.5万吨的油轮上采用自校正控制方案，使速度提高1%，阿默翁根 (Amerongen) 在一艘远洋测量船上采用模型参考自适应方案，使平均速度也有提高。

3. 自适应滤波和预报系统

自适应滤波系统和自适应预报系统的结构原理可用图1.4表示。参数估计器利用系统的输入输出信息来估计信号模型的参数值；设计计算器根据选定的设计准则和获得的参数估计值，来计算滤波器的参数，从而获得最优估计值或最优预报值。

在自适应滤波或自适应预报系统中，自适应系统的三大要素也是很明显的。对未知的信

号模型的了解，是通过在线地、实时地估计信号模型参数而达到的，可调滤波器综合出最优滤波值或最优预报值，设计计算器的算法具体反映了使估计误差或预报误差最小。

我们可以根据参数估计的方法不同，设计计算器的算法各异，以及不同的用途，对自适应预报和滤波系统进行分类。一般把自适应滤波分为自适应信号重构和自适应噪声抑制，把自适应预报分为基于状态空间模型的广义卡尔曼状态估计和基于ARMA模型的最优预报。

自适应滤波和预报的应用可以分为四类：自适应状态估计、自适应信号重构、自适应噪声抑制和自适应预报。它们被成功地应用于天线系统、声纳系统、回声消除、噪声抑制、语言处理、预报等工程问题。在第六章，我们将详细介绍某些应用实例。

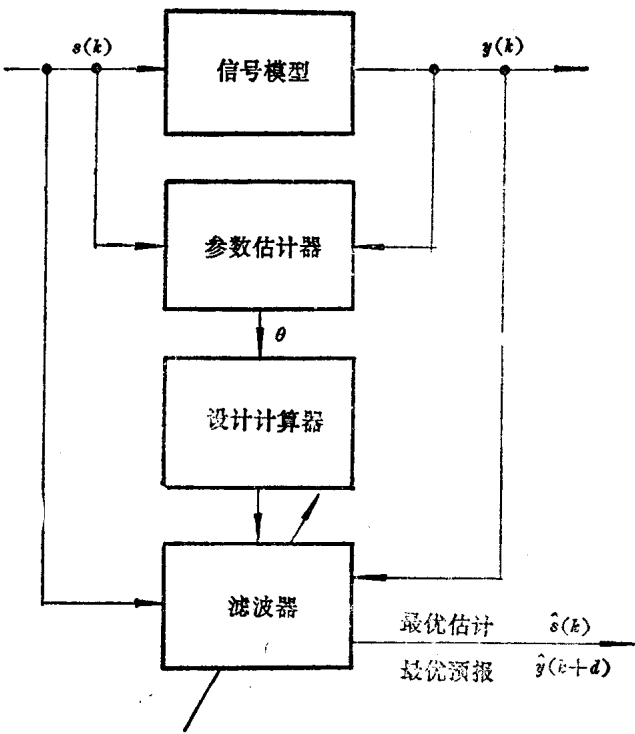


图 1.4 自适应滤波或自适应预报系统结构

章，我们将详细介绍某些应用实例。

第二章 模型参考自适应控制系统的理论基础

我们将从模型参考自适应控制系统的发展过程来了解什么是它的理论基础:

(1) 1960年, 由麻省理工学院的威泰克等提出的“MIT”调节规律, 其基本原理是调节控制器参数, 使得性能指标 $\int e^2 dt$ 最小, 其中 e 是被控对象和理想模型之间的输出误差。这类控制律的致命弱点是不能保证系统的稳定性。

(2) 1966年, 派克斯提出了利用李雅普诺夫函数来决定控制器的参数调节规律的新方法, 其基本原理是构造一个准李雅普诺夫函数 $V(e, \phi)$, 选择参数调节律 $\dot{\phi}$, 使得 $\dot{V}(e, \phi) \leq 0$, 从而保证系统的李雅普诺夫稳定性。然而这种设计方法需要系统的全状态向量, 或者对 n 阶系统而言, 需要系统输出量的 1 到 $(n-1)$ 次微分信号, 这就限制了这种方法的实际应用。

(3) 1974年, 莫诺泼立利用广义误差信号的概念来构造自适应控制系统。在设计中, 利用了李雅普诺夫稳定性理论和正动态系统的特性, 不仅能保证系统的稳定性, 而且不需要输出量的微分信号。但是, 莫斯 (A.S.Morse) 提出反例, 指出莫诺泼立的稳定性证明只对相对阶为一的对象有效。相对阶的定义是传递函数分母和分子阶数之差。

(4) 1980年, 有一系列文章发表, 这标志着, 只利用输入输出信号的测量值, 基本解决了具有全局稳定性的模型参考自适应控制系统设计方法和稳定性证明, 其代表人物为乃伦局, 哥德温 (G.C.Goodwin) 和莫斯。在他们的设计方法中, 都利用了李雅普诺夫稳定性理论和正动态系统的特性。

和这主流研究平行发展的另一学派, 是以兰道为代表的以超稳定性理论为基础的设计方法。在设计中, 求解波波夫不等式, 获得参数调节规律; 设计补偿器, 以满足前馈环节的正实性, 从而使系统超稳定。这种设计方法可使设计过程规范化, 在选择参数调节规律时, 也有更大的灵活性。

以上各种设计方法的稳定性证明是在一系列假设条件下进行的, 它们是:

- a. 对象阶数的上界和相对阶已知;
- b. 对象参数未知, 但时不变;
- c. 对象是最小相位系统;
- d. 对象无外干扰, 无测量噪声。

然而, 在实际控制工程问题中, 以上假设往往不能满足, 因此应了解以上各类自适应控制系统对设计假设和实际环境之间的差异的适应能力, 即进行现存的自适应控制方案的鲁棒性分析。

(5) 1980~1985, 利用稳定性理论、摄动理论、小增益分析和平均值分析方法, 对现存的模型参考自适应控制方案进行鲁棒性分析。其代表人物是: 安德森 (B.D.O.Anderson), 诺斯 (C.E.Rohrs), 可克多维奇 (P.V.Kokotovic), 陈宗基等。鲁棒性分析的基本结论是, 现存的模型参考自适应方案对外界干扰, 测量噪声, 慢时变参数以及相对阶同的建模误差有一定的鲁棒性, 对相对阶异的建模误差没有鲁棒性。

(6) 1985~至今, 利用稳定性理论、死区非线性、受限控制、奇异摄动、递阶控制等方法, 研究对外界干扰和建模误差有更强鲁棒性的自适应控制新方案, 或称为鲁棒自适应控制方案。其代表人物为, 乃伦局, 哥德温, 安德荪, 可克多维奇, 陈宗基。

由以上发展过程的介绍可见, 模型参考自适应控制系统的最基本的理论基础是:

- a. 李雅普诺夫稳定性理论;
- b. 正动态系统理论;
- c. 超稳定性理论;
- d. 波波夫积分不等式的求解方法。

§2.1 李雅普诺夫稳定性理论

李雅普诺夫稳定性的分析方法是一种能判别一般线性或非线性, 时变或定常系统稳定性的重要方法。李雅普诺夫稳定性分析方法分为李雅普诺夫第一法及第二法。前者通过获得系统微分方程的显解, 来分析系统的稳定性。由于解微分方程的过程繁锁, 某些非线性微分方程还得不到显解, 所以李雅普诺夫第一法是不便使用的。第二法不需要得到微分方程的显解, 就可以分析系统的稳定性, 因此这种方法得到了广泛的应用。

李雅普诺夫第二法的基本概念是: 若系统内部的总能量随时间的增加而减少, 则该系统迟早要达到静止状态。李雅普诺夫还引出了一个虚构的能量函数, 称为李雅普诺夫函数, 若该函数沿着该系统的轨迹, 随时间的增加而减少, 则该系统必定稳定。

§2.1.1 基本定义

研究用向量微分方程描述的一个自由动态系统的稳定性:

$$\dot{x} = f(x, t) \quad -\infty < t < \infty \quad (2.1)$$

这里 x 是 n 维向量。假设方程满足解的存在性和唯一性条件, 其解为 $\phi(t; x_0, t_0)$ 。对于系统(2.1), 若存在一状态 x_0 , 对所有 t 总有:

$$f(x_0, t) = 0$$

那么该自由动态系统的状态称为平衡状态。

定义2.1 一自由动态系统的平衡状态 x_0 称为稳定的(s.), 如果对每一个实数 $\varepsilon > 0$, 存在一实数

$\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, 对于 $\|x_0 - x_0\| \leq \delta$, 恒有

$$\|\phi(t; x_0, t_0) - x_0\| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$$

这里, 应注意到稳定性是平衡状态邻域的动态特性。

定义2.2 在定义2.1中, 若 δ 和 t_0 无关, 那么平衡状态 x_0 是一致稳定的(u.s.)。

这里, 应注意到稳定和一致稳定的差别, 下面我们用一个例子来说明这一点。

例2.1 试判断如下系统的稳定性:

$$\dot{x} = (4t \sin t - 2t)x, \quad x(t_0) = x_0$$

解 该系统的解析解为:

$$x(t; x_0, t_0) = x_0 \exp(4 \sin t - 4t \cos t - t^2 - 4 \sin t_0 + 4t_0 \cos t_0)$$

对上述解析解进行分析, 可以发现该系统的平衡点 $x_0 = 0$ 是稳定的, 但不是一致稳定的, 即

定义2.1中的 δ 是 t_0 的函数。

定义2.3 一自由动态系统的平衡状态 x_e 称为渐近稳定的(a.s.), 如果

(1) x_e 是稳定的;

(2) 对于任意给定的 t_0 和实数 $\mu > 0$, 总存在 $r(t_0) > 0$ 和 $T(\mu, x_0, t_0) > 0$, 对于 $\|x_0 - x_e\| \leq r(t_0)$, 恒有

$$\|\phi(t; x_0, t_0) - x_e\| \leq \mu \quad \forall t \geq t_0 + T$$

这里, 应注意渐近稳定也是平衡状态 x_e 邻域的动态特性, 且条件(2)并不隐含条件(1)。

下面举一个例子来说明条件(2)并不隐含条件(1)。

例2.2 试判断如下极坐标系统的稳定性:

$$\begin{cases} \dot{r} = [\dot{g}(\theta, t)/g(\theta, t)]r, & 0 \leq r < \infty \\ \dot{\theta} = 0 & 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

其中
$$g(\theta, t) = \frac{\sin^2 \theta}{\sin^4 \theta + (1 - t \sin^2 \theta)^2} + \frac{1}{1 + t^2}$$

解 该系统的解析解为:

$$\begin{cases} r(t; r_0, \theta_0, t_0) = [g(\theta_0, t)/g(\theta_0, t_0)]r_0 \\ \theta(t; r_0, \theta_0, t_0) = \theta_0 \end{cases}$$

由解析解, 不难分析有如下极限存在:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(\theta_0, t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t; r_0, \theta_0, t_0) = 0$$

可见系统满足条件(2), 系统轨迹收敛到平衡点 $r_e = 0, \theta_e = \theta_0$ 。

当 $t = \sin^{-2} \theta_0$ 时, 如下不等式成立:

$$g(\theta_0, t) = \sin^{-2} \theta_0 + \frac{\sin^2 \theta_0}{1 + \sin^2 \theta_0} \geq \sin^{-2} \theta_0$$

$$r(t; r_0, \theta_0, t_0) \geq [\sin^{-2} \theta_0 / g(\theta_0, t_0)]r_0$$

当选择 $\theta_0 = \pm \pi$ 时, 上述不等式表明 $r \rightarrow \infty$ 。即定义2.3中的条件(1)并不满足。

本例表明定义2.3的条件(2)并不隐含条件(1)。

定义2.4 在定义2.3中, 若 x_e 是一致稳定的, 且 r 和 T 与 x_0, t_0 无关, 那么平衡状态 x_e 是一致渐近稳定的(u.a.s.)。

定义2.5 一自由动态系统的平衡状态 x_e 被称为全局渐近稳定的(g.a.s.), 如果

(1) x_e 是稳定的;

(2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t; x_0, t_0) - x_e\| = 0, \quad \forall x_0 \in R^n$ 。

若以上条件在 $x_0 \in \Omega$ 域内成立, 那么该平衡状态 x_e 在域 Ω 内渐近稳定。

定义2.6 一自由动态系统的平衡状态 x_e 被称为全局一致渐近稳定的(g.u.a.s.), 如果

(1) x_e 是一致稳定的;

(2) 该系统是一致有界的, 即给定任意 $r > 0$, 存在 $B(r)$, 对于 $\|x_0 - x_e\| \leq r$, 恒有

$$\|\phi(t; x_0, t_0) - x_c\| \leq B(r), \quad \forall t \geq t_0;$$

(3) 给定任意 $r > 0$, $\mu > 0$, 存在 $T(\mu, r)$, 对于 $\|x_0 - x_c\| \leq r$, 恒有

$$\|\phi(t; x_0, t_0) - x_c\| \leq \mu, \quad \forall t \geq t_0 + T$$

这里, 应注意条件(1)是具有邻域性质的, 而条件(2)却具有全局性质; 条件(3)并不隐含条件(1)和(2)。

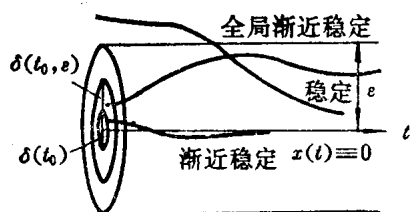


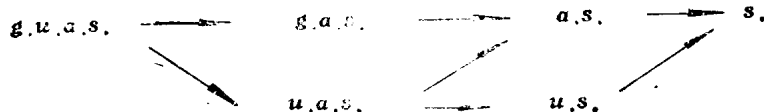
图 2.1 稳定性的不同定义

利用例2.1所给的系统, 不难分析该系统具有渐近收敛性, 即满足条件(3), 但不具有一致稳定性和一致有界性, 即不满足条件(1)和条件(2)。

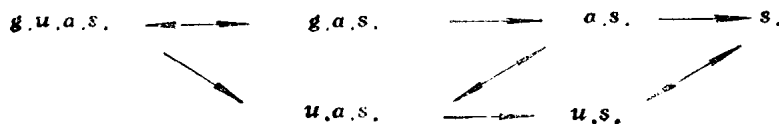
稳定、渐近稳定、全局渐近稳定之间的差别如图2.1所示。

上述的各类稳定性定义之间的关系可用图2.2来表示。当所研究的动态系统为 $\dot{x} = f(x)$

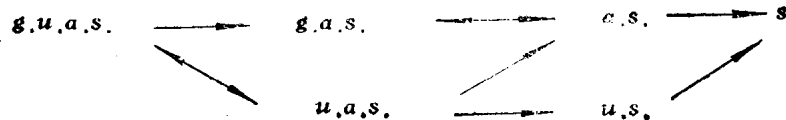
$$\dot{x} = f(x, t)$$



$$\dot{x} = f(x)$$



$$\dot{x} = A(t)x$$



$$\dot{x} = Ax$$

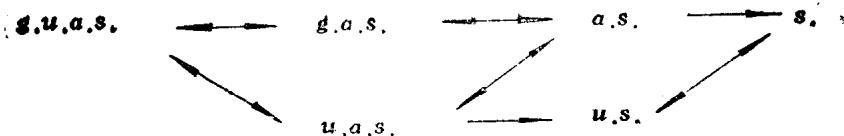


图 2.2 各类稳定性定义之间的关系

时, 上述各类定义没有一致和非一致的区别。当所研究的动态系统为 $\dot{x} = A(t)x$ 时, 上述各类定义没有全局和非全局的区别。当所研究的动态系统为 $\dot{x} = Ax$ 时, 上述各类定义总是一致和全局的。

§ 2.1.2 基本定理

定理2.1 考虑连续时域内的一个自由动态系统

$$\dot{x} = f(x, t); \quad f(0, t) = 0, \quad \forall t \quad (2.2)$$

如果存在一个对 x 和 t 有连续一阶偏导数的标量函数 $V(x, t)$, 有 $V(0, t) = 0$; 存在连续非减标量函数 $\alpha(\cdot)$ 、 $\gamma(\cdot)$ 和 $\beta(\cdot)$, 有 $\alpha(0) = 0$ 、 $\gamma(0) = 0$ 和 $\beta(0) = 0$; 且对 $x \neq 0$, 有

(1) $V(x, t)$ 正定, 即有

$$0 < \alpha(\|x\|) \leq V(x, t) \quad (2.3)$$

(2) 沿着系统(2.2) 轨迹的 $\dot{V}(x, t)$ 负定, 即有

$$\dot{V}(x, t) \leq -\gamma(\|x\|) < 0 \quad (2.4)$$

(3) $V(x, t) \leq \beta(\|x\|)$, $\forall t$ (2.5)

(4) $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \alpha(\|x\|) = \infty$ (2.6)

那么平衡状态 $x_0 = 0$ 是全局一致渐近稳定的, 而 $V(x, t)$ 称为系统(2.2)的李雅普诺夫函数。

证明

(1) 首先证明一致稳定性。

对于任意 $\varepsilon > 0$, 由于 β 是连续非减的函数, 且有 $\beta(0) = 0$, 总能选择 $\delta(\varepsilon) > 0$, 使得 $\beta(\delta) < \alpha(\varepsilon)$ 。以上叙述可用图2.3表示。

那么, 对于 $\|x_0\| < \delta$ 和任意 t_0 , 利用条件(1)、(2)和(3), 对任意 $t > t_0$, 都有

$$\begin{aligned} \alpha(\varepsilon) &> \beta(\delta) \geq V(x_0, t) \\ &\geq V(\phi(t; x_0, t_0), t) \\ &\geq \alpha(\|\phi(t; x_0, t_0)\|) \end{aligned}$$

由于 $\alpha(\cdot)$ 是非减的正标量函数, 上式隐含着

$$\|\phi(t; x_0, t_0)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0, \quad \|x_0\| \leq \delta$$

由于 t_0 是任意的, 由定义可断定 $x_0 = 0$ 是一致稳定平衡点。

(2) 再来证明一致渐近稳定性。

由上述证明, 对于任意正常数 c_1 , 选择 $r > 0$, 满足 $\beta(r) < \alpha(c_1)$, 对于任意 $\|x_0\| < r$, 有

$$\|\phi(t; x_0, t_0)\| \leq c_1, \quad \forall t_0, t \geq t_0$$

现在选择一正常数 μ , 有 $\|x_0\| \geq \mu$, 找一个 $v(\mu) > 0$, 使得 $\beta(v) < \alpha(\mu)$ 。如上

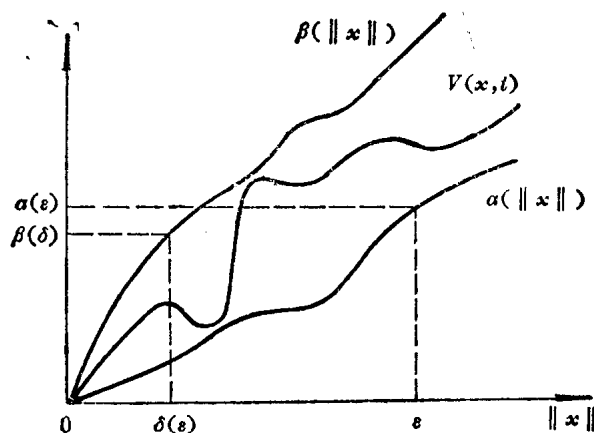


图 2.3 选择 $\beta(\delta) < \alpha(\varepsilon)$ 的示意图

选择可用图2.4表示。

在区间 $\nu(\mu) \leq \|x_0\| \leq c_1$ 中, $\nu(\|x\|)$ 的最小值定义为 $c_2(\mu, x) > 0$, 再定义

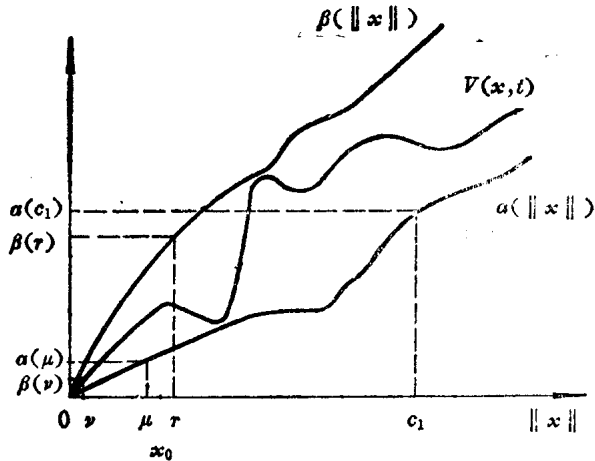


图 2.4 选择 $\beta(\nu) < \alpha(\mu)$ 的示意图

$$T(\mu, r) = \frac{\beta(r)}{c_2(\mu, r)} > 0.$$

假设在时间间隔 $t_0 \leq t \leq t_1 = t_0 + T$ 中, 恒有 $\|\phi(t; x_0, t_0)\| > \nu$, 条件 (1), (2) 和 (3) 可引出如下矛盾的结论:

$$\begin{aligned} 0 &< \alpha(\nu) \leq V(\phi(t_1; x_0, t_0), t_1) \leq V(x_0, t_0) - c_2(\nu, t_1 - t_0) \\ &\leq \beta(r) - Tc_2 = 0 \end{aligned}$$

以上矛盾结论表明, 在区间 $[t_0, t_1]$ 中, 必存在 t_2 , 使得

$$\|x(t_2)\| = \|\phi(t_2, x_0, t_0)\| = \nu$$

于是 $\alpha(\|\phi(t; x_2, t_2)\|) \leq V(\phi(t; x_2, t_2), t)$

$$\leq V(x_2, t_2) \leq \beta(\nu) < \alpha(\mu), \quad \forall t \geq t_2$$

上述不等式隐含着

$$\|\phi(t; x_2, t_2)\| < \mu, \quad \forall t \geq t_0 + T$$

由定义可断定 $x_e = 0$ 是一致渐近稳定平衡点。

(3) 最后证明全局一致渐近稳定性。

对于任意 r , 存在一常数 $c_1(r)$, 使得 $\beta(r) < \alpha(c_1)$, 由条件 (4), 当 $c_1 \rightarrow \infty$ 时, 有 $r \rightarrow \infty$. 而以上一致渐近稳定性是在 $\|x_0\| < r$ 域内证明的, 所以该平衡点是全局一致渐近稳定的。证毕。

从以上定理的证明可见, 条件 (1) 和 (2) 保证平衡点的渐近稳定性; 条件 (3) 保证平衡点的一致性; 条件 (4) 保证平衡点的全局性。于是可得如下推论。

推论一 在定理2.1中, 若条件 1~3 同时满足, 则 $x_e = 0$ 是一致渐近稳定的平衡点。

推论二 在定理2.1中, 若条件 1 和 2 同时满足, 则 $x_e = 0$ 是渐近稳定的平衡点。

推论三 在定理2.1中, 若条件 1 和 3 同时满足, 而条件 2 改为 $\dot{V}(x, t) \leq 0$, 则 $x_e = 0$ 是一致稳定的平衡点。

推论四 在定理2.1中, 若条件 (1) 满足, 而条件 (2) 改为 $\dot{V}(x, t) \leq 0$, 则 $x_e = 0$ 是稳定的平衡点。

推论五 在定理2.1中, 若条件 (1) 和 (3) 同时满足, 而条件 (2) 改为 $\dot{V}(x, t) \leq 0$, 且对系统的非零解有 $\dot{V}(x, t) \neq 0$, 则 $x_e = 0$ 是一致渐近稳定的平衡点。

这里, 应注意在得出稳定性结论之前, 把 $V(x, t)$ 称为李雅普诺夫函数, 当得出稳定性结论之后, $V(x, t)$ 方能称为李雅普诺夫函数。

例2.3 试分析如下系统的稳定性:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_2 - 3x_1 + 4x_1x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_1^2 \end{cases}$$

解 由 $\dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = 0$, 解得系统的平衡点为 $x_1 = 0$ 和 $x_2 = 0$ 。

构造一个准李雅普诺夫函数

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2$$

令 $\alpha(\|x\|) = x_1^2 + x_2^2,$

$$\beta(\|x\|) = 4(x_1^2 + x_2^2),$$

则有:

$$0 < \alpha(\|x\|) \leq V(x_1, x_2)$$

$$V(x_1, x_2) \leq \beta(\|x\|), \forall t$$

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \alpha(\|x\|) = \infty$$

即定理2.1的条件(1)、(3)、(4)均满足。

沿系统轨迹, 求 $\dot{V}(x_1, x_2)$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= 2x_1\dot{x}_1 + 8x_2\dot{x}_2 \\ &= 2x_1(-4x_2 - 3x_1 + 4x_1x_2) + 8x_2(x_1 - x_1^2) \\ &= -6x_1^2 \leq 0 \end{aligned}$$

对于非零轨迹 $x_1 = 0, x_2 \neq 0$, 上述系统的 $x_1 \neq 0$, 即有 $\dot{V} \neq 0$ 。由定理2.1及推论五, 系统是全局一致渐近稳定的。 $V(x_1, x_2)$ 是系统的李雅普诺夫函数。

定理2.2 若系统(2.2)满足李普希茨条件, 且 $x_s = 0$ 是全局一致渐近稳定的平衡状态, 那么, 存在对 x 和 t 无穷次可微的、满足定理2.1各条件的李雅普诺夫函数。

因此, 满足定理2.1各条件的李雅普诺夫函数的存在, 是全局一致渐近稳定性的充分必要条件。

对于线性时变系统, 可得到一系列更为明确的结论。

定理2.3 考虑在连续时域内的一线性动态系统:

$$\dot{x} = F(t)x + D(t)u(t)$$

其中, $[F(t), D(t)]$ 一致完全可控; $\|F(t)\| \leq c_1 < \infty, \forall t \geq t_0; 0 < c_2 < \|D(t)\| \leq c_3 < \infty, \forall t \geq t_0$ 。则如下命题等价:

A. 对于有界控制量

$$\|u(t)\| \leq c_4 < \infty, \forall t \geq t_0,$$

有

$$\|x(t)\| \leq c_5 < \infty, \forall t \geq t_0;$$

B. $\int_{t_0}^t \|\Phi(t, \tau)\| d\tau \leq c_6 < \infty, \forall t \geq t_0$

$\Phi(t, \tau)$ 为转移矩阵;

C. $x_s = 0$ 是一致渐近稳定平衡状态;

D. 存在正常数 $c_7 < \infty, c_8 < \infty$, 有

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq c_7 e^{-c_8(t-t_0)}, \forall t \geq t_0;$$

E. 给定任意对 t 连续的正定矩阵 $Q(t)$, 使其满足

$$0 < c_9 I \leq Q(t) \leq c_{10} I < \infty, \forall t \geq t_0$$

则标量函数

$$V(x, t) = \int_t^\infty \|\Phi(\tau, t)x(t)\|_{Q(\tau)}^2 d\tau = \|x\|_{P(t)}^2$$

不仅存在,而且是满足定理2.1各条件的该动态系统的李雅普诺夫函数,在其沿自由运动轨迹上对时间的导数为:

$$\dot{V}(x, t) = -\|x\|_{\infty}^q$$

证明 (1) $A \Rightarrow B$

a. 由

$$\|\Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)D(\tau)u(\tau)d\tau\| \leq c_0 < \infty,$$

可得

$$\left\| \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)D(\tau)u(\tau)d\tau \right\| \leq c'_0 < \infty$$

令

$$u(\tau) = \begin{cases} [0, \dots, 0, \text{Sgn}[\Phi(t, \tau)D(\tau)]_{ij}, 0, \dots, 0]^T, & t_0 \leq \tau < t \\ 0^T, & \tau \geq t \end{cases}$$

可得

$$c'_{ij} \geq \int_{t_0}^t |[\Phi(t, \tau)D(\tau)]_{ij}| d\tau$$

对于不同的*i*和*j*, 选择相应的*u*(τ), 上式均应成立. 对所有的*i*和*j*, 对上式两边求和可得

$$\begin{aligned} c_0 &\triangleq \sum_{i,j=1}^n c'_{ij} \geq \sum_{i,j=1}^n \int_{t_0}^t |[\Phi(t, \tau)D(\tau)]_{ij}| d\tau \\ &= \int_{t_0}^t \|\Phi(t, \tau)D(\tau)\| d\tau \end{aligned}$$

b. 由 $\|F(t)\| \leq c_1 < \infty, \forall t \geq t_0$, 可得

$$\|\Phi(t, s)\| \leq \exp[c_1(t-s)], \forall t, s,$$

则有

$$\begin{aligned} \|D^T(\tau)\Phi^T(s, \tau)\| &\leq \|D^T(\tau)\| \|\Phi^T(s, \tau)\| \\ &\leq c_2 \exp[c_1(s-\tau)] \leq c_2 \exp(c_1\sigma), \forall s, \tau, s-\sigma \leq \tau \leq s \end{aligned}$$

c. 由一致完全可控条件, 有

$$W_0(s-\sigma, s) \triangleq \int_{s-\sigma}^s \Phi(s, \tau)D(\tau)D^T(\tau)\Phi^T(s, \tau)d\tau \geq \alpha(\sigma)I > 0$$

即有

$$\|W_0^{-1}(s-\sigma, s)\| \leq \|\alpha(\sigma)^{-1}I\| = \sqrt{n}\alpha(\sigma)^{-1}$$

d. 由以上结论可得

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^t \|\Phi(t, s)\| ds \\ &= \int_{t_0}^t \|\Phi(t, s)W_0(s-\sigma, s)W_0^{-1}(s-\sigma, s)\| ds \\ &\leq \sqrt{n}\alpha(\sigma)^{-1} \int_{t_0}^t \|\Phi(t, s)\| \int_{s-\sigma}^s \|\Phi(s, \tau)D(\tau)D^T(\tau)\Phi^T(s, \tau)\| d\tau ds \\ &= \sqrt{n}\alpha(\sigma)^{-1} c_2 \exp(c_1\sigma) \int_{t_0}^t \int_{s-\sigma}^s \|\Phi(t, \tau)D(\tau)\| d\tau ds \\ &\leq \sqrt{n}\alpha(\sigma)^{-1} c_2 \exp(c_1\sigma) \int_{s-\sigma}^t \int_{t_0+s-\sigma}^{t+s-\sigma} \|\Phi(t, \tau)D(\tau)\| d\tau dx \end{aligned}$$