

S

依据新大纲与最新考试精神



酷龙书系

2003 双色大课堂

高考数学必备

创新设计



- 考试热点扫描
- 名师匠心独运
- 诊疗高考盲点
- 高考跟踪测试
- 名师精编
- 一目了然

吉林教育出版社



酷龙书系



2003 双色大课堂

huangsedaketang

高考数学必备

程俊华 殷山木 主编

创新
设计



吉林教育出版社

(吉)新登字 02 号

主 编:程俊华 殷山木
副主编:邝 山 北 环 张迎春

双色大课堂高考必备创新设计·数学

责任编辑:王世斌

封面设计:木头羊工作室

出版:吉林教育出版社 880×1230 毫米 32 开本 9.875 印张 354 千字
2003 年 1 月修订版 2003 年 1 月第 1 次印刷
发行:吉林教育出版社 本次印数:20000 册 定价:14.80 元
印刷:山东滨州教育印刷厂 ISBN 7-5383-3239-1/G·2899

编者的话

谛听世纪钟声,紧跟时代步伐,我们迎来了教育改革的又一个春天。在此新旧交替之际,为了能让您在金秋季节如愿收获,我们特推出

《双色大课堂—高考必备数学》,相信它能帮您圆梦!

该书本着“**以虔诚之心奉献教育,用高品之文博得读者**”的原则,汇集全国一线名师,在精析高考动态的前提下,精心编撰而成。

该书分为以下几个版块:

■ 考试热点扫描: 本部分紧紧围绕高考考点和热点,层层推进,使学生复习时省时省力,事半功倍。

■ 名师匠心独运: 本部分依据 1999—2002 年高考考点和热点,在“考试热点扫描”的基础上,扼重点、破疑点、测考点,帮学生更上一层楼。

■ 诊疗高考盲点: 针对近年高考考生容易出现的错误,通过对典型例题进行精讲精析,避免考生出错。

■ 高考跟踪测试: 针对高考考点和热点设置强化习题,使学生能学以致用,举一反三。

该书的主要特点可以概括为“**新一好一强**”:

■ 体例新: 双色插入,开卷一目了然,使学生阅读和思维同步。

■ 启迪性好: 打破学生旧的做题思路,融入新的思维理念,并能巧妙地引导学生去领悟、归纳和概括知识。

■ 实用性强: 回归数学教学实际,强调新思维、新技能的培养,提高学以致用的能力。

《双色大课堂—高考必备数学》紧跟最新教材,依据最新大纲,掌握高考动态,把握时代脉搏,让您在自学、自习时,有和上课时一样的感觉。

《双色大课堂》帮您迈入知识的殿堂!

编 者

目 录

第一篇 函数、方程、不等式

- 【考试热点扫描】
- 【名师匠心独运】
- 【诊疗高考盲点】
- 【高考跟踪测试】

第二篇 三角函数与复数

- 【考试热点扫描】
- 【名师匠心独运】
- 【诊疗高考盲点】
- 【高考跟踪测试】

第三篇 数列、极限、数学归纳法

【考试热点扫描】	23
【名师匠心独运】	23
【诊疗高考盲点】	23
【高考跟踪测试】	23

第四篇 排列、组合、二项式定理

【考试热点扫描】

【名师匠心独运】

【诊疗高考盲点】

【高考跟踪测试】

第五篇 立体几何

【考试热点扫描】

【名师匠心独运】

【诊疗高考盲点】

【高考跟踪测试】

第六篇 解析几何

【考试热点扫描】

【名师匠心独运】

【诊疗高考盲点】

【高考跟踪测试】

模拟试题

2003 年高考模拟试题(一)

2003 年高考模拟试题(二)

参考答案

第一篇 函数、方程、不等式

▲考试热点扫描

函数、方程、不等式是历届高考考试的热点,约占试卷总分的 30%. 主要考查内容有:求函数的解析式、函数的性质、解方程、解不等式以及利用函数与方程的思想求最值等. 从近几年试卷分析来看,有逐年上升趋势,复习时应给以足够重视.

▲名师匠心独运

例 1 (1999 年·全国)

如图 1-1 所示, I 是全集, M, P, S 是 I 的 3 个子集, 则阴影部分所表示的集合是()

- A. $(M \cap P) \cap S$ B. $(M \cap P) \cup S$
C. $(M \cap P) \cap S$ D. $(M \cap P) \cup S$

→精解 阴影部分包含于 S , 从而排除 A, B, 再运用集合运算、定义, 计算选择项 C, D 的结果, 易选 C.

→评析 本题是考查集合的运算. 集合是用文氏图具体直观地给出, 属基础性考题, 难度不大, 只要概念清楚、细心即能解决.

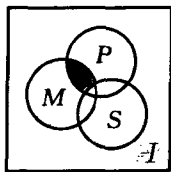


图 1-1

例 2 (1999 年·全国)

已知映射 $f: A \rightarrow B$, 其中, 集合 $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$, 集合 B 中的元素都是 A 中元素在映射 f 下的象, 且对任意的 $a \in A$, B 中和它对应的元素是

→精解 原不等式等价于 $(x-1)(x-3) > 0$ 可得 $x < 1$ 或 $x > 3$ 故选 C.

→评析 本小题考查分式不等式的基本解法. 通常转化为整式不等式, 但要注意转化时的等价.

例 5 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都是单调函数, 有如下四个命题:

①若 $f(x)$ 单调递增, $g(x)$ 单调递增, 则 $f(x) - g(x)$ 单调递增;

②若 $f(x)$ 单调递增, $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x) - g(x)$ 单调递增;

③若 $f(x)$ 单调递减, $g(x)$ 单调递增, 则 $f(x) - g(x)$ 单调递减;

④若 $f(x)$ 单调递减, $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x) - g(x)$ 单调递减.

其中, 正确的命题是 ()

A. ①③

B. ①④

C. ②③

D. ②④

→精解 取 $f(x) = x, g(x) = 2x$, 则 $f(x) - g(x) = -x$ 为单调递减, 即①的判断错; 另取 $f(x) = -x, g(x) = -2x$ 则 $f(x) - g(x) = x$ 为单调递增, 即④的判断错; 故选 C.

→评析 本题考查函数的基本性质, 用特殊值法. 由选择答案可知正确判断有且只有两个, 故可用特殊值法.

例 6 (2000 年·全国)

若 $a > b > 1, P = \sqrt{\lg a \cdot \lg b}, Q = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b), R = \lg\left(\frac{a+b}{2}\right)$, 则 ()

A. $R < P < Q$

B. $P < Q < R$

C. $Q < P < R$

D. $P < R < Q$

→精解 特值法. 取 $a = 100, b = 10$, 满足 $a > b > 1$, 则

$$P = \sqrt{\lg a \lg b} = \sqrt{\lg 100 \lg 10} = \sqrt{2},$$

$$Q = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b) = \frac{1}{2}(\lg 100 + \lg 10) = \frac{3}{2},$$

$$R = \lg\left(\frac{a+b}{2}\right) = \lg \frac{110}{2} = \lg 5 + \lg 11$$

$$> \lg \sqrt{10} + \lg 10 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2},$$

而 $2 < \frac{3}{2}$, 从而可知, $R > Q > P$. 故选 B.

⇒评析 本小题考查平均值不等式、对数函数的单调性. 该题还可利用下列直接解法:

由题意, $a > b > 1$, 则 $\lg a > \lg b > 0$,

∴ $\frac{\lg a + \lg b}{2} > \lg a \lg b$, 即 $Q > P$.

又由 $a > b > 1$, 得 $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$, 则 $\lg(\frac{a+b}{2}) > \lg \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b)$,

∴ $R > Q$. ∴ $R > Q > P$.

例 7 (2001 年·全国)

函数 $y = 2^{-x} + 1 (x > 0)$ 的反函数是()

A. $y = \log_2 \frac{1}{x-1}, x \in (1, 2)$

B. $y = -\log_2 \frac{1}{x-1}, x \in (1, 2)$

C. $y = \log_2 \frac{1}{x-1}, x \in (1, 2]$

D. $y = -\log_2 \frac{1}{x-1}, x \in (1, 2]$

⇒精解 解法一 由 $y = 2^{-x} + 1$ 得, $2^{-x} = y - 1$, 两边取以 2 为底的对数可得 $x = \log_2(y - 1)$, 从而得反函数为 $y = \log_2 \frac{1}{x-1}$. 另外原函数的值域为 $y \in (1, 2)$.

故反函数的定义域为 $x \in (1, 2)$, 故选 A.

解法二 由函数和反函数的定义域和值域的关系. 用特殊值法. 当 $x = 0$ 时 $y = 2$ 不存在, 否定 C, D, 而 B 的形式错误, 故选 A.

⇒评析 本题考查反函数的求法, 借助于函数及反函数的性质, 利用特殊值解选择题是常用解法, 利用求反函数的步骤求解时, 要注意通过原函数的值域求反函数的定义域.

例 8 (2000 年·北京、安徽春季)

设全集 $I = \{a, b, c, d, e\}$, 集合 $M = \{a, c, d\}$, $N = \{b, d, e\}$, 那么 $M \cap N$ 是()

A. $\emptyset$

B. $\{d\}$

C. $\{a, c\}$

D. $\{b, e\}$

⇒精解 由已知 $M=\{b,e\}$, $N=\{a,c\}$, 故 $M \cap N = \emptyset$, 选 A.

⇒评析 本题考查集合的运算, 题比较容易, 解答时必须细心.

例 9 (2000 年·北京、安徽春季)

函数 $y=\lg|x|$ ()

A. 是偶函数, 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增

B. 是偶函数, 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减

C. 是奇函数, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增

D. 是奇函数, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减

⇒精解 由 $\lg|-x|=\lg|x|$ 知函数是偶函数, 又 $\lg|-100|>\lg|-10|$ 知函数在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 故选 B.

⇒评析 本题考查函数的性质, 选择题在函数的单调性的判断方面, 常利用特殊值处理.

例 10 (1999 年·上海)

设集合 $A=\{x||x-a|<2\}$, $B=\{x|\frac{2x-1}{x+2}<1\}$. 若 $A \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围.

⇒精解 由 $|x-a|<2$, 得 $a-2<x<a+2$.

∴ $A=\{x|a-2<x<a+2\}$.

由 $\frac{2x-1}{x+2}<1$, 得 $\frac{x-3}{x+2}<0$,

即 $-2<x<3$.

∴ $B=\{x|-2<x<3\}$.

∵ $A \subseteq B$,

∴ $\begin{cases} a-2 \geq -2, \\ a+2 \leq 3. \end{cases}$ 于是有 $0 \leq a \leq 1$.

⇒评析 本题考查集合知识与绝对值不等式、分式不等式的解法. 首先将集合 A、B 具体化为区间形式, 然后根据子集定义确定区间端点值的大小排序, 从而构造出不等式. 总体难度不大, 属基础性考题.

(1999年·广东)

解方程 $3\lg x - 2 - 3\lg x + 4 = 0$.

设 $3\lg x - 2 = y$,

则 $3\lg x = 2 + y^2$.

原方程可化为 $y - (2 + y^2) + 4 = 0$

即 $y^2 - y - 2 = 0$.

解得 $y = -1, y = 2$.

因为 $3\lg x - 2 \geq 0$, 所以将 $y = -1$ 舍去.

由 $3\lg x - 2 = 2$, 得 $\lg x = 2$.

$\therefore x = 100$.

经检验, $x = 100$ 为原方程的解.

本题主要考查无理方程和对数方程的求解. 突破口较宽, 绝大多数考生都能动手解答. 该题来源很贴近课本, 将对数渗进无理方程, 少数学生没有换元就平方, 运算量大; 有的还没有验根.

(2000年·全国)

设函数 $f(x) = x^2 + 1 - ax$, 其中 $a > 0$. (1) 解不等式 $f(x) \leq 1$. (2) 求 a 的取值范围, 使函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调函数.

(1) 不等式 $f(x) \leq 1$,

即 $x^2 + 1 \leq 1 + ax$.

由此得 $1 \leq 1 + ax$, 即 $ax \geq 0$, 其中常数 $a > 0$.

所以, 原不等式等价于 $\begin{matrix} x^2 + 1 \leq (1 + ax)^2, \\ x \geq 0. \end{matrix}$

即 $x \geq 0$,

$(a^2 - 1)x + 2a \geq 0$.

所以, 当 $0 < a < 1$ 时, 所给不等式的解集为 $\{x | 0 \leq x \leq \frac{2a}{1-a^2}\}$;

当 $a \geq 1$ 时, 所给不等式的解集为 $\{x | x \geq 0\}$.

(2) 在区间 $[0, +\infty)$ 上任取 x_1, x_2 使 $x_1 < x_2$.

$$\begin{aligned}
 f(x_1) - f(x_2) &= x_1^2 + 1 - x_2^2 + 1 - a(x_1 - x_2) \\
 &= \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + 1 + x_2^2 + 1} - a(x_1 - x_2) \\
 &= (x_1 - x_2) \left(\frac{x_1 + x_2}{x_1^2 + 1 + x_2^2 + 1} - a \right),
 \end{aligned}$$

(I) 当 $a \geq 1$ 时, 因为 $\frac{x_1 + x_2}{x_1^2 + 1 + x_2^2 + 1} < 1$,
 $\frac{x_1 + x_2}{x_1^2 + 1 + x_2^2 + 1} - a < 0$,

又 $x_1 - x_2 < 0$,

$\therefore f(x_1) - f(x_2) > 0$ 即 $f(x_1) > f(x_2)$

所以, 当 $a \geq 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调递减函数.

(II) 当 $0 < a < 1$ 时, 在区间 $[0, +\infty)$ 上存在两点 $x_1 = 0, x_2 = \frac{2a}{1-a^2}$, 满足

$f(x_1) = 1, f(x_2) = 1$, 即 $f(x_1) = f(x_2)$.

所以当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上不是单调函数.

综上, 当且仅当 $a \geq 1$ 时, 函数 $f(x)$ 为区间 $[0, +\infty)$ 上的单调函数.

本题主要考查不等式的解法、函数的单调性等知识. 作为中档题其得分率并不高, 满分 12 分, 均分为 3.29 分. 因为有些考生在答题时: ①不能准确地理解单调函数的定义中的 x_1, x_2 的任意性; ②对 a 的分类较难. 因此在学习中应注重分类标准的确定.

例 13 (2000 年 · 上海)

已知函数 $f(x) = \frac{x^2 + 2x + a}{x}, x \in [1, +\infty)$, (1) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最小值. (2) 若对任意 $x \in [1, +\infty)$, $f(x) > 0$ 恒成立, 试求实数 a 的取值范围.

⇒ 精解 (1) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = x + \frac{1}{2x} + 2$.

$\therefore f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上为增函数,

$\therefore f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上的最小值为 $f(x) = \frac{7}{2}$.

(2)解法一 在区间 $[1, +\infty)$ 上,

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + a}{x} > 0 \text{ 恒成立} \Leftrightarrow x^2 + 2x + a > 0 \text{ 恒成立}.$$

设 $y = x^2 + 2x + a, x \in [1, +\infty)$.

则 $y = x^2 + 2x + a = (x+1)^2 + a - 1$ 递增,

$\therefore$ 当 $x=1$ 时, $y_{\min} = 3 + a$.

于是当且仅当 $y_{\min} = 3 + a > 0$ 时, 函数 $f(x) > 0$ 恒成立.

故 $a > -3$.

解法二 $f(x) = x + \frac{a}{x} + 2, x \in [1, +\infty)$.

当 $a \geq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的值恒为正;

当 $a < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 递增.

故当 $x=1$ 时, $f(x)_{\min} = 3 + a$.

于是当且仅当 $f(x)_{\min} = 3 + a > 0$ 时, 函数 $f(x) > 0$ 恒成立.

故 $a > -3$.

►评析 本题主要考查函数最值的求法及函数单调性等知识. 对恒成立的问题, 通常可以用求值域法, 即比最小值还要小或比最大值还要大时恒成立.

例 14 (2000 年 · 上海)

某蔬菜基地种植西红柿, 由历年市场行情得知, 从二月一日起的 300 天内, 西红柿市场售价与上市时间的关系用图 1-2 的一条折线表示; 西红柿的种植成本与上市时间的关系, 用图 1-3 的抛物线段表示.

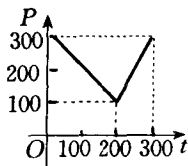


图 1-2

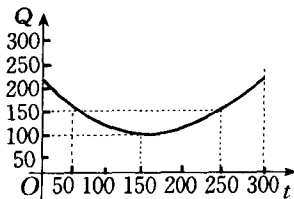


图 1-3

(1) 写出图 1-2 表示的市场售价与时间的函数关系式 $P = f(t)$; 写出图 1-3 表示的种植成本与时间的函数关系式 $Q = g(t)$.

(2) 认定市场售价减去种植成本为纯收益, 问何时上市的西红柿纯收益最大? (注: 市场售价和种植成本的单位: 元/kg, 时间单位: 天)

►精解 (1) 由图 1-2 可得市场售价与时间的函数关系为

$$f(t) = \begin{cases} 300-t, & 0 \leq t \leq 200, \\ 2t-300, & 200 < t \leq 300; \end{cases}$$

由图 1-3 可得种植成本与时间的关系为

$$g(t) = \frac{1}{200}(t-150)^2 + 100, 0 \leq t \leq 300.$$

(2) 设 t 时刻的纯收益为 $h(t)$, 则由题意得 $h(t) = f(t) - g(t)$,

$$\text{即 } h(t) = \begin{cases} -\frac{1}{200}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{175}{2}, & 0 \leq t \leq 200, \\ -\frac{1}{200}t^2 + \frac{7}{2}t - \frac{1025}{2}, & 200 < t \leq 300. \end{cases}$$

当 $0 \leq t \leq 200$ 时, 配方整理得

$$h(t) = -\frac{1}{200}(t-50)^2 + 100,$$

所以, 当 $t=50$ 时, $h(t)$ 取得区间 $[0, 200]$ 上的最大值 100;

当 $200 < t \leq 300$ 时, 配方整理得

$$h(t) = -\frac{1}{200}(t-350)^2 + 100,$$

所以, 当 $t=300$ 时, $h(t)$ 取得区间 $(200, 300]$ 上的最大值 87.5.

综上, 由 $100 > 87.5$ 可知, $h(t)$ 在区间 $[0, 300]$ 上可以取得最大值 100. 此时 $t=50$, 即从二月一日开始的第 50 天时, 上市的西红柿收益最大.

►评析 本题主要考查由函数图象建立函数关系式和求函数最大值的问题以及解决实际问题的能力. 该题作为压轴题, 有较好选拔功能, 难度系数为 0.3. 学生主要问题: ①识图能力差; ②分段函数最值的求法不清楚. 由于新教材对分段函数有了明确的定义, 而且还配有两个例题, 因此, 无疑今后将是考查的重点.

例 15 (1999 年·全国)

解不等式 $\sqrt{3\log_a x} - 2 < 2\log_a x - 1 (0 < a \neq 1)$.

► 精解 解法一 原不等式等价于

$$3\log_a x - 2 \geq 0, \quad ①$$

$$2\log_a x - 1 > 0, \quad ②$$

$$3\log_a x - 2 < (2\log_a x - 1)^2. \quad ③$$

由①, 得 $\log_a x \geq \frac{2}{3}$.

由②, 得 $\log_a x > \frac{1}{2}$.

由③, 得 $\log_a x < \frac{3}{4}$ 或 $\log_a x > 1$.

综上所述, $\frac{2}{3} \leq \log_a x < \frac{3}{4}$ 或 $\log_a x > 1$.

由此得, 当 $a > 1$ 时, 所求的解集是 $\{x | a^{\frac{2}{3}} \leq x < a^{\frac{3}{4}} \text{ 或 } x > a\}$;

当 $0 < a < 1$ 时, 所求的解集是 $\{x | a^{\frac{3}{4}} < x \leq a^{\frac{2}{3}} \text{ 或 } 0 < x < a\}$.

解法二 令 $y = 3\log_a x - 2$, 则 $\log_a x = \frac{1}{3}(y^2 + 2)$, 且 $y \geq 0$.

于是原不等式等价于

$$\begin{aligned} y &\geq 0 \\ 2y^2 - 3y + 1 &> 0 \end{aligned} \Leftrightarrow 0 \leq y < \frac{1}{2} \text{ 或 } y > 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq \log_a x < \frac{3}{4} \text{ 或 } \log_a x > 1.$$

以下同精解.

本题还可以用图象法解. 令 $\log_a x = t$, 则原不等式可化为

$$\sqrt{3t-2} < 2t-1. \quad (*)$$

作曲线 $C: y = \sqrt{3t-2}$, 直线 $l: y = 2t-1$. C 与 l 交于点 $(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}), (1, 1)$. 则

图象不难得出, 不等式 $(*)$ 的解集是 $[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}) \cup (1, +\infty)$, 即 $\frac{2}{3} \leq \log_a x < \frac{3}{4}$ 或 $\log_a x > 1$. 以下同解法一.

► 评析 本题主要考查对数函数的性质, 对数不等式、无理不等式的解法等, 考查分类讨论的思想和运算能力. 解答本题时, 要注意将 $\log_a x$ 当做一个整体 (由换元思想可看成 t) 来解. 否则, 如果将不等式中每一个不等式的解集求出来后, 再取其交集, 则解题过程相当复杂.

例 16 (2000 年·北京、安徽春季)

设函数 $f(x) = |\lg x|$, 若 $0 < a < b$, 且 $f(a) > f(b)$. 证明: $ab < 1$.

→精解 由已知 $f(x) = |\lg x| = \begin{cases} \lg x, & [1, +\infty), \\ -\lg x, & (0, 1). \end{cases}$

$\because 0 < a < b, f(a) > f(b),$

$\therefore a, b$ 不能同时在区间 $[1, +\infty)$ 上.

又由于 $0 < a < b$, 故必有 $a \in (0, 1)$.

若 $b \in (0, 1)$, 有 $ab < 1$.

若 $b \in [1, +\infty)$, 由 $f(a) - f(b) > 0$, 得

$$-\lg a - \lg b > 0,$$

故 $\lg ab < 0$,

$$ab < 1.$$

→评析 本题考查函数的单调性、对数函数的性质、运算能力, 考查分析问题解决问题的能力. 本题如用不等式证明的思想方法处理, 也很简单.

$\because f(a) > f(b), f(x) = |\lg x|, \therefore |\lg a| > |\lg b|.$

$$\begin{aligned} \because |\lg a|^2 - |\lg b|^2 &= \lg^2 a - \lg^2 b \\ &= (\lg a + \lg b)(\lg a - \lg b) \\ &= \lg ab \lg \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

$$\therefore \lg ab \lg \frac{a}{b} > 0.$$

$$\text{又 } 0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \lg \frac{a}{b} < 0,$$

$$\therefore \lg ab < 0, \therefore ab < 1.$$

例 17 (1999 年·全国)

若正数 a, b 满足 $ab = a + b + 3$, 则 ab 的取值范围是_____.

→精解 解法一 依题意得 $ab = a + b + 3 \geq 2\sqrt{ab} + 3$,

当且仅当 $a = b$ 时, 等式成立.

令 $\sqrt{ab} = x$, 则 $x^2 - 2x - 3 \geq 0$, 即 $(x - 3)(x + 1) \geq 0$.

$$\because a, b > 0,$$