

学习经济数学指导 备考硕士研究生指南

经济数学(线性代数)

解题方法技巧归纳

毛纲源

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

华中科技大学出版社

学习经济数学指导 备考硕士研究生指南

经济数学(线性代数) 解题方法技巧归纳

毛纲源

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学(线性代数)解题方法技巧归纳/毛纲源
武汉:华中科技大学出版社, 1998年8月
ISBN 7-5609-1763-1

- I. 经…
- II. 毛…
- III. 经济数学-线性代数-解题方法-教学参考
- IV. O13

经济数学(线性代数)解题方法技巧归纳

毛纲源

责任编辑:李立鹏
责任校对:贺建新

封面设计:梁书亭
责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012

经 销:新华书店湖北发行所

录 排:武汉皇荣文化发展有限责任公司
印 刷:汉川市地税局印刷厂

开本:850×1168 1/32 印张:12.75 字数:323 000
版次:1998年8月第1版 印次:2001年8月第5次印刷 印数:26 001—31 000
ISBN 7-5609-1763-1/O·180 定价:15.00元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 提 要

本书将经济数学(线性代数)的主要内容按问题分类,通过引例,归纳总结各类问题的解题规律、方法和技巧,其中不少是作者多年来积累的教学经验总结.读者阅读此书,必将增强分析问题,解决问题的能力和应试的能力.

本书实例多、类型广、梯度大.例题主要取材于两部分:一部分是人大版《线性代数》(修订本)中的典型习题;另一部分是历届全国硕士研究生入学考试数学试题,其中经济类的数学三、数学四和原数学四、五的考题,绝大部分都已收入.

本书可供本(专)科学生学习经济数学(线性代数)阅读和参考;对于自学者和有志攻读经济学和工商管理(即MBA)硕士学位研究生的青年,本书更是良师益友;对于参加成人教育,自考和文凭考试的读者,也不失为一本有指导价值的很好的参考书;对于从事经济数学(线性代数)教学的教师,亦有一定的参考价值.

前 言

本书作者去年出版“经济数学(微积分)解题方法技巧归纳”受到读者好评.应读者要求,现出版“经济数学(线性代数)解题方法技巧归纳”.“经济数学(概率论与数理统计初步)解题方法技巧归纳”也即将出版,以感谢读者的厚爱.

编写“经济数学(线性代数)解题方法技巧归纳”的目的是为帮助经济类和其他文科类在校学生和自学者学好经济数学(线性代数);为他们备考研究生提供一份复习资料.

本书将经济数学(线性代数)的主要内容按问题分类,通过引例归纳、总结各类问题的解题规律、方法和技巧.它不同于一般的教科书、习题集和题解,自具特色.

本书实例较多,且类型广、梯度大.例题一部分取材于赵树嫄主编、中国人民大学出版社出版的“线性代数”(修订本)中的典型习题[原习题的题号在例序后用表示章序、类序(A类还是B类)、题序和小题序的三个或四个字后加上方括号标志.例如,例3[2A3(2)]表示例3是人大“线性代数”(修订本)第2章A类第3题的第2小题].例题的另一部分取材于历届全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试题,其中原数学试卷四、五及1997,1998两年数学试卷三、四的考题(适用经济类、财政类专业的考生)绝大部分都已收入[例序后用表示年份的5个字后写上数学试卷类别加上方括号标志.例如,例1[1989年4]表示例1是1989年数学试卷4中的考题.]

采用人大“线性代数”中典型习题,是因为该书是目前我国文科类专业使用量最大的一本教材,习题部分比较准确地反映了学习经济数学(线性代数)的基本要求.通过这些例题的学习将有利于促进学生全面掌握经济数学(线性代数)的基础知识、基本理论和基本方法,正确理解该课程的基本内容.

46453/04

需查找人大“线性代数”中习题解答的读者,请参看书末附录.

通过统考试题的研讨,使有志攻读硕士学位的同学“平战结合”,了解考研试题的特点及其逐年发展趋势,从知识上,题型上,方法和技巧上作好应试准备,做到心中有数.这些考题一般并非都是难题,其突出特点是全面、准确地体现教学大纲的要求.不少试题的原型就是“线性代数”中的习题.多做考题,并由此总结、归纳解题规律、方法和技巧,无疑对于启迪思维,开发智力,提高能力及加深经济数学(线性代数)的理解都是大有好处的.

考虑到经济类和其他文科的学生和自学者学习经济数学(线性代数)的困难,编写此书时,在选材、理论推导、文字叙述等诸多方面尽量适应其特点.此外,还在不少例后加写注意部分,以总结解题经验,避免常犯错误.

本书可供全日制大专院校、电大、职大、函大、夜大等广大学生学习经济数学(线性代数)时阅读和参考;对于自学者和有志攻读硕士研究生的青年,本书更是良师益友;对于从事经济数学(线性代数)教学的教师也有一定的参考价值.

鉴于目前有关读物尚缺,适用于理工科学生阅读的线性代数参考读物,文科学生阅读多有不便.作者使用多年来在教学过程中所积累的资料,汇集自1987年至1998年以来原数学试卷四、五和新数学试卷三、四的绝大部分考题和其他试卷的部分考题,编写成这本书,为推进我国高校数学教学改革尽微薄之力.希望它能激起在校和自修的广大同学学习经济数学(线性代数)的兴趣,这是作者最大的心愿.

限于作者水平,书中不当之处在所难免,敬请读者不吝赐教!

毛纲源

1998年2月于武汉工业大学

目 录

第一章 行列式计算	(1)
§ 1.1 如何利用定义计算行列式及其部分项	(1)
§ 1.2 几类直接利用行列式性质计算的行列式	(9)
§ 1.3 如何证明一行列式能被某一整数整除	(23)
§ 1.4 行列式按行(列)展开定理在计算行列式上的应用	(26)
§ 1.5 行列式方程的解法	(36)
§ 1.6 利用已知行列式计算行列式	(42)
§ 1.7 克莱姆法则的应用	(53)
第二章 矩阵	(64)
§ 2.1 如何掌握矩阵乘法的运算法则及其运算规律	(64)
§ 2.2 矩阵可逆及其逆矩阵表示式的同证方法	(76)
§ 2.3 逆矩阵的求法	(81)
§ 2.4 已知矩阵 A (或 B) 如何从含 A 和 (或) B 及 AB 的矩阵方程 中求出矩阵 B (或 A)	(92)
§ 2.5 与矩阵乘积次序相交换有关的命题证法	(95)
§ 2.6 对称矩阵的证法	(97)
§ 2.7 伴随矩阵的几个性质的应用	(100)
§ 2.8 注意区分 $\alpha^T \alpha$ 与 $\alpha \alpha^T$ (α 为向量), 哪是数, 哪是矩阵	(107)
§ 2.9 抽象矩阵的行列式算法	(111)
§ 2.10 常用反证法证明抽象矩阵的行列式等于零或不等于零	(117)
§ 2.11 矩阵分块相乘的条件及常用分块方法	(121)
§ 2.12 分块矩阵求逆法	(131)
§ 2.13 矩阵的秩的求法	(139)
§ 2.14 矩阵的初等变换表成矩阵乘积的简单应用	(146)
第三章 向量组的线性相关性	(152)
§ 3.1 如何正确理解线性相(无)关的定义	(152)

§ 3.2	向量能否表为向量组线性组合的证法	(164)
§ 3.3	线性表出唯一性定理的应用	(172)
§ 3.4	与两向量组所含向量个数有关的线性相关性定理的应用	(177)
§ 3.5	向量组线性无(相)关的证法	(182)
§ 3.6	如何证明用线性无关向量组线性表出的向量组的线性相关性	(195)
§ 3.7	极大线性无关组的求法	(201)
§ 3.8	向量组和矩阵的秩的几个关系式的应用	(209)
第四章	线性方程组	(216)
§ 4.1	基础解系和特解的简便求法	(216)
§ 4.2	基础解系的证法	(225)
§ 4.3	线性方程组解的判定	(230)
§ 4.4	含参数的线性方程组解法	(242)
§ 4.5	向量为线性方程组的解向量的证法	(253)
§ 4.6	A 和 b 未知, 如何求 $AX=b$ 的通解	(259)
§ 4.7	简单矩阵方程的解法	(263)
§ 4.8	已知基础解系, 如何反求一个齐次线性方程组	(269)
§ 4.9	齐次线性方程组有非零解和仅有零解的几点应用	(272)
§ 4.10	与已知矩阵可交换的所有矩阵的求法	(279)
第五章	矩阵的特征值和特征向量	(285)
§ 5.1	特征值的求法和证法	(285)
§ 5.2	用矩阵 A 的特征值计算 $ A $ 及证明 $kE-A$ 的可逆性	(299)
§ 5.3	向量是否是特征向量的证法	(304)
§ 5.4	两矩阵相似的证法	(309)
§ 5.5	方阵高次幂的简便求法	(320)
§ 5.6	$P^{-1}AP=\Lambda$ 中已知两者如何求第三者	(328)
第六章	二次型	(341)
§ 6.1	二次型的矩阵表示	(341)
§ 6.2	标准形化法	(346)

§ 6.3 正定矩阵的证法	(361)
§ 6.4 正交矩阵的证法	(369)
§ 6.5 正交相似变换下的标准形在证题中的简单应用	(373)
§ 6.6 矩阵及其(正交)相似标准形中参数的求法	(378)
习题答案或提示	(381)
附录 (人大版“线性代数”(修订本)部分习题解答查找表)	(397)

第一章 行列式计算

§ 1.1 如何利用定义计算行列式及其部分项

(一) 用定义计算行列式的方法

对于含零元素较多的行列式可用定义计算. 因行列式的项中有一因数为零时, 该项的值为零, 故只须求出所有非零项即可. 如何求出呢? 常用下述两法.

方法一 求出位于不同行、不同列的非零元素乘积的所有项.

当行列式含大量零元素, 尤其是行列式的非零元素乘积项只有一项时, 用此法计算简便.

例 1 用行列式定义计算下列 n 阶行列式:

$$(1)[1A_{11}(1)]^* D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$(2)[1A_{11}(2)] D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

* [1A₁₁(1)]表示该例是人大“线性代数”(修订本)第一章 A 类第 11 题的第 1 小题的习题. 下同.

解 (1)由行列式定义, D_1 的每一非零项由不同行、不同列的 n 个非零元素乘积所组成. 第 1 行的非零元素只有 $a_{1n}=1$, 第 2 行的非零元素只有 $a_{2,n-1}=2, \dots$, 第 $n-1$ 行的非零元素只有 $a_{n-1,2}=n-1$, 第 n 行的非零元素只有 $a_{n1}=n$. 而这 n 个非零元素又在不同的列, 因此 D_1 除去等于零的项外, 只有一项非零项, 即

$$a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}=1\cdot 2\cdot \cdots(n-1)n=n!.$$

这一项的行下标排列为自然排列, 列下标排列为 $n(n-1)\cdots 2\cdot 1$, 其逆序数为 $N[n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1]=n(n-1)/2$. 故

$$D_1=(-1)^{n(n-1)/2}n!.$$

(2)同法可求 D_2 除去等于零的项外, 非零项只有一项, 即

$$a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}=1\cdot 2\cdot \cdots(n-1)n=n!.$$

这一项的行下标为自然排列, 而列下标排列为 $2\cdot 3\cdots(n-1)n\cdot 1$, 其逆序数为 $N[23\cdots(n-1)n1]=(-1)^{n-1}$, 故

$$D_2=(-1)^{n-1}n!.$$

例 2[1A10] 一个 n 阶行列式中等于零的元素的个数如果比 n^2-n 多, 则此行列式等于零.

解 根据行列式定义, 该行列式展开后都是 n 个元素相乘, 而 n 阶行列式共有 n^2 个元素, 若等于零的元素个数大于 n^2-n , 那么不等于零的元素个数就会小于 $n^2-(n^2-n)=n$ 个. 因而该行列式的每项都至少含一个零元素, 所以每项必等于零, 故此行列式等于零.

方法二 求出非零元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的列下标 j_1, j_2, \dots, j_n 的所有 n 元排列, 即可求出行列式的所有非零项.

根据 n 阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n}$$

可知, 非零项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的列下标 j_1, j_2, \dots, j_n 的 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 有多少个, 相应地该行列式就含多少个非零项; 如果一个也没

有,则不含非零项,行列式等于零,这里 $\sum_{j_1 \cdots j_n}$ 表示对数码 $1, 2, \dots, n$ 的所有 n 元排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和.

为求出非零项 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的列下标 j_1, j_2, \dots, j_n 的所有 n 元排列,先由第 1 行的非零元素及其位置,写出 j_1 可能取的数码;再由第 2, 3, \dots, n 行的非零元素及其位置分别写出 j_2, j_3, \dots, j_n 可能取的数码. 在所有可能取的数码中,求出 j_1, j_2, \dots, j_n 的所有 n 元排列.

例 3 用定义计算下列 n 阶行列式

$$(1) D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$(2) \Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 (1) D_n 中第 1 行非零元素为 $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1,n}$. 故 $j_1 = 1, 2, \dots, n-1, n$. 同法可求

$$j_2 = 1, 2, \dots, n-1; \cdots; j_{n-1} = 1, 2; j_n = 1.$$

下求 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 所能取的 n 元排列.

因 $j_n = 1$, 故 $j_{n-1} = 2, j_{n-2} = 3, \dots, j_2 = n-1, j_1 = n$. 即 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 只能取一个 n 元排列 $n(n-1) \cdots 2 \cdot 1$, 于是 D_n 的非零项只有一项, 即

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{N(n(n-1) \cdots 2 \cdot 1)} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n-1,2} a_{n1} \\ &= (-1)^{n(n-1)/2} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n-1,2} a_{n1}. \end{aligned}$$

(2) 同法可求

$$\Delta_n = (-1)^{n(n-1)/2} a_{1n} a_{2, n-1} \cdots a_{n-1, 2} a_{n1}.$$

例 4 用定义计算

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1985 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1986 \end{vmatrix}.$$

解法一 为求 D 的值, 只须求出 D 中所有非零项. 求时应注意 D 为 1986 阶行列式.

D 中第 1 行的非零元素只有 $a_{1, 1985}$. 因而 j_1 只能取 1985, 即 $j_1 = 1985$. 同理 $j_2 = 1984, j_3 = 1983, \cdots, j_{1985} = 1, j_{1986} = 1986$, 于是 $j_1, j_2, \cdots, j_{1985}, j_{1986}$ 在可能取的数码中, $j_1 j_2 \cdots j_{1985} j_{1986}$ 只能组成一个 1986 元排列:

$$1985 \ 1984 \cdots 2 \ 1 \ 1986,$$

故 D 中非零项只有一项, 即

$$D = (-1)^{N(1985 \ 1984 \cdots 2 \ 1 \ 1986)} a_{1, 1985} a_{2, 1984} \cdots a_{1985, 1} a_{1986, 1986}.$$
 因 $N(1985, 1984, \cdots, 2, 1, 1986) = 1984 + 1983 + \cdots + 2 + 1 = 1985 \times 992$ 为偶数, 故

$$D = (-1)^{1985 \times 992} 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 1985 \times 1986 = 1986!.$$

解法二 因 D 中位于不同行、不同列的非零元素只有

$$a_{1, 1985} = 1, a_{2, 1984} = 2, \cdots, a_{1985, 1} = 1985, a_{1986, 1986} = 1986,$$

故 D 中非零项只有一项. 注意到 $1985 \cdot 992$ 为偶数, 得到

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{N(1985 \ 1984 \cdots 2 \ 1 \ 1986)} a_{1, 1985} a_{2, 1984} \cdots a_{1985, 1} a_{1986, 1986} \\ &= (-1)^{1985 \cdot 992} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 1985 \cdot 1986 = 1986! \end{aligned}$$

例 5 [1A25][1991 年 5]* 计算行列式

* 表示该例是 1991 年全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试卷 5 的考题. 下同.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

解法一 为求 Δ_n 的值只须求出 Δ_n 中的所有非零项.

因 Δ_n 中第 1 行的非零元素只有 $a_{11}=a, a_{12}=b$, 故 $j_1=1, 2$. 同理 $j_2=2, 3; \cdots; j_{n-1}=n-1, n; j_n=1, n$.

当 $j_1=1$ 时, 如 $j_2=3$, 则 $j_3=4, j_4=5, j_5=6, \cdots, j_{n-1}=n, j_n=1$. 这时不能组成 n 元排列, 故当 $j_1=1$ 时, 只能 $j_2=2$. 从而 $j_3=3, \cdots, j_n=n$. 由于行下标和列下标的排列都为自然排列, 故 Δ_n 的一项非零项为

$$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a \cdot a \cdots a = a^n.$$

当 $j_1=2$ 时, $j_2=3$, 从而 $j_3=4, \cdots, j_{n-1}=n, j_n=1$. 于是 Δ_n 中另一非零项为

$$(-1)^{N[2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n \cdot 1]} a_{12}a_{23} \cdots a_{n-1n}a_{n1} = (-1)^{n-1} b^n.$$

Δ_n 的非零项只有上述两项, 故

$$\Delta_n = a^n + (-1)^{n-1} b^n.$$

解法二 观察 Δ_n 中位于不同行、不同列的非零元素的乘积只有两项. 一项是主对角线上元素的乘积. 这 n 个元素位于不同行, 不同列, 且其行下标和列下标的排列均为自然排列; 另一项是 n 个 b 相乘. 这 n 个 b 位于 Δ_n 中的不同行, 不同列, 且其行下标排列为自然排列, 而列下标排列为 $2 \ 3 \cdots (n-1) \ n \ 1$, 故

$$\Delta_n = a^n + (-1)^{N[2 \ 3 \cdots (n-1) \ n \ 1]} b^n = a^n + (-1)^{n-1} b^n.$$

解法三 Δ_n 中左上角, 左下角, 右上角, 右下角的 2 阶子式已写出, 按第 1 列展开得到

$$\Delta_n = a \begin{vmatrix} a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} + b(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix}$$

$$= a \cdot a^{n-1} + (-1)^{n+1} b^n = a^n + (-1)^{n+1} b^n.$$

例 6[1A11(3)] 用定义计算下列行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (a_{ij} \neq 0).$$

解 由 D 中第 1 行和第 2 行的非零元素分别得到

$$j_1 = 1, 2, 3, 4, 5; \quad j_2 = 1, 2, 3, 4, 5.$$

其余三行只有两个非零元素,故

$$j_3 = 1, 2; \quad j_4 = 1, 2; \quad j_5 = 1, 2.$$

因 j_1, j_2, j_3, j_4, j_5 在上述可能取得的数码中一个 5 元排列也不能组成,说明 D 中没有非零项,故 $D=0$.

注意 一个 n 阶行列式 D 中如果存在某些非零元素 $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{sj_s} (2 \leq s \leq n)$, 其列下标 j_1, j_2, \dots, j_s 所能取的不同数码个数小于行数 s , 则 $D=0$. 这是因为 D 中非零元素的列下标 $j_1, j_2, \dots, j_s, j_{s+1}, \dots, j_n$ 连一个 n 元排列也不能组成, 即 D 中没有非零项, 从而 $D=0$. 例如, 在 5 阶行列式

$$D_5 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 & 0 \\ a_{51} & 0 & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

中第 1, 4, 5 行的非零元素的列下标取值为 $j_1=1, 3; j_4=1, 3; j_5=1, 3$. 因它们所能取的不同数码只有两个(1 与 3), 其个数小于行数 ($s=3$), 故 $D_5=0$.

(二) 行列式中含特定元素的所有项的求法

一般用行列式的定义求出.

例 7 写出 5 阶行列式 $D_5 = |a_{ij}|_{5 \times 5}$ 中包含 a_{13}, a_{25} 并带正号的所有项.

解 D_5 中包含 a_{13} 及 a_{25} 的所有项数为 5 元排列 $3 \ 5 \ j_3 \ j_4 \ j_5$ 的个数. 因 j_3, j_4, j_5 所取的排列是 1, 2, 4 这三个数码所取的 6 个全排列, 故 $3 \ 5 \ j_3 \ j_4 \ j_5$ 能组成的 5 元排列共有 6 个, 即

$$3 \ 5 \ 1 \ 2 \ 4; 3 \ 5 \ 1 \ 4 \ 2; 3 \ 5 \ 2 \ 1 \ 4;$$

$$3 \ 5 \ 2 \ 4 \ 1; 3 \ 5 \ 4 \ 1 \ 2; 3 \ 5 \ 4 \ 2 \ 1.$$

相应的项分别为

$$(-1)^{N(3 \ 5 \ 1 \ 2 \ 4)} a_{13} a_{25} a_{31} a_{42} a_{54} = -a_{13} a_{25} a_{31} a_{42} a_{54},$$

$$(-1)^{N(3 \ 5 \ 1 \ 4 \ 2)} a_{13} a_{25} a_{31} a_{44} a_{52} = a_{13} a_{25} a_{31} a_{44} a_{52},$$

$$(-1)^{N(3 \ 5 \ 2 \ 1 \ 4)} a_{13} a_{25} a_{32} a_{41} a_{54} = a_{13} a_{25} a_{32} a_{41} a_{54},$$

$$(-1)^{N(3 \ 5 \ 2 \ 4 \ 1)} a_{13} a_{25} a_{32} a_{44} a_{51} = -a_{13} a_{25} a_{32} a_{44} a_{51},$$

$$(-1)^{N(3 \ 5 \ 4 \ 1 \ 2)} a_{13} a_{25} a_{34} a_{41} a_{52} = -a_{13} a_{25} a_{34} a_{42} a_{51},$$

$$(-1)^{N(3 \ 5 \ 4 \ 2 \ 1)} a_{13} a_{25} a_{34} a_{42} a_{51} = a_{13} a_{25} a_{34} a_{42} a_{51},$$

故包含 a_{13}, a_{25} 并带正号的所有项为

$$a_{13} a_{25} a_{31} a_{44} a_{52}, \quad a_{13} a_{25} a_{32} a_{41} a_{54}, \quad a_{13} a_{25} a_{34} a_{42} a_{51}.$$

例 8 试求 $f(x)$ 中 x^4 的系数, 已知

$$f(x) = \begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 & 0 \\ x & 3 & 2x & 11 & 4 \\ -1 & x & 0 & 4 & 3x \\ 2 & 21 & 4 & x & 5 \\ 1 & -7x & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 $f(x)$ 中含 x 为因子的元素有

$$a_{11} = -x, \quad a_{21} = x, \quad a_{23} = 2x, \quad a_{32} = x, \\ a_{35} = 3x, \quad a_{44} = x, \quad a_{52} = -7x.$$

因而,含有 x 为因子的元素 a_{ij} 的列下标只能取

$$j_1 = 1; j_2 = 1, 3; j_3 = 2, 5; j_4 = 4; j_5 = 2.$$

于是,含 x^4 的项中元素 a_{ij} 的列下标只能取 $j_1 = 1, j_2 = 3, j_3 = 2, j_4 = 4$ 与 $j_2 = 1, j_3 = 5, j_4 = 4, j_5 = 2$; 相应的 5 元排列只有 1 3 2 4 5, 3 1 5 4 2, 含 x^4 的相应项为

$$(-1)^{N(1\ 3\ 2\ 4\ 5)} a_{11} a_{23} a_{32} a_{44} a_{55} = 4x^4, \\ (-1)^{N(3\ 1\ 5\ 4\ 2)} a_{13} a_{21} a_{35} a_{44} a_{52} = 21x^4,$$

故 $f(x)$ 中 x^4 的系数为 $21 + 4 = 25$.

例 9 由计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix},$$

证明奇偶排列各半.

证 D 为 n 阶行列式, 展开后共有 $n!$ 个项, 显然每项都是 1. 又因 D 的各行元素相同, 故 $D = 0$, 所以 $n!$ 个项中一半带正项, 一半带负项. 由于正项对应偶排列, 负项对应奇排列, 奇偶排列各半.

习 题 1.1

1. 用定义, 计算下列行列式:

$$(1) D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & d_2 \end{vmatrix}; \quad (2) D_5 = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. 写出 4 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 中所有含 a_{13} 且带负号的项.

3. 求出 $f(x)$ 中 x^4 与 x^3 的系数: