高等学校数学教材

模曲线导引

黎景辉　赵春来　著

北京大学出版社
·北　　京·

图书在版编目(CIP)数据

模曲线导引/黎景辉,赵春来著.—北京:北京大学出版社,2002.4
ISBN 7-301-05483-1

Ⅰ.模… Ⅱ.①黎… ②赵… Ⅲ.模型式 Ⅳ.O156

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 005501 号

书 名:模曲线导引
著作责任者:黎景辉 赵春来 著
责 任 编 辑:邱淑清
标 准 书 号:ISBN 7-301-05483-1/O·0537
出 版 者:北京大学出版社
地 址:北京市海淀区中关村北京大学校内 100871
网 址:http://cbs.pku.edu.cn
电 话:出版部 62754962 发行部 62754140 理科编辑部 62752021
电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn
排 版 者:北京大学印刷厂
印 刷 者:北京大学印刷厂
发 行 者:北京大学出版社
经 销 者:新华书店
890 毫米×1240 毫米 A5 开本 8.125 印张 208 千字
2002 年 4 月第 1 版 2002 年 4 月第 1 次印刷
定 价:17.00 元

前　言

本书的目的在于介绍模形式的几何理论的背景知识. 这方面的资料散见于不同语言的各种文献, 对于我国读者非常不便. 我们希望达到两个目的. 一方面, 为希望应用这套方法的读者提供一条路径来掌握基本的理念, 以求比较快就可以运用; 另一方面, 对于准备深入研究这个专题的读者提供一个开端. 如书名所说, 这是一个 "导引". 就像旅行的导游一样, 指出一些景点和路线. 所以我们并没有提供每一条定理的详细证明, 反而比较注意解释定义及例子. 我们相信, 要真正地了解这套技术, 最好还是在适当的时候阅读原始文献. 所以我们没有必要重复所有原文. 模曲线只不过是这方面理论的起步, 进一步便是研究一般的志村簇作为模空间及其对于自守表示的应用, 这套理论正在迅速发展之中. 我们希望读者在读过本书之后可以看懂参考文献中的 Katz 和 Mazur[1] 以及 Harris 和 Taylor[1].

Deligne 于 1969 年 2 月在 Bourbaki Seminar 发表了他给出的 Ramanujan 猜想的证明 (见参考文献 Deligne[2]). 在这篇文章里他利用了模曲线作为椭圆曲线的模空间, 把模形式看作这个模空间上的微分形式, 把 Hecke 算子看作椭圆曲线类的运算, 把模形式的 Fourier 系数的估值化为代数几何中的一个上同调群上的算子的特征根的估值, 这样便从 Weil 猜想推出 Ramanujan 猜想. 现今他的这些思想已发展为标准的工具, 并且其证明也变成只有两页 (见参考文献 Freitag-Kiehl[1, 第 276 页]). 本书的目的是希望帮助读者了解这些工具.

在这套理论中, 所谓模空间问题是指怎样去理解一个函子在具有什么代数结构的范畴上的可表性. 所以我们从可表函子出发 (第一章), 顺便了解群概形这一概念 (椭圆曲线就是群概形), 然后利用线性变换作为例子, 介绍模空间 (第二章) 作为可表函子这一

观念. 一个函子的可表性是受这个函子定义在什么范畴上所影响. 所以下一步便是讨论这些范畴应该具有的代数结构. 在第三章我们从连续函数开始，引入 Grothendieck 拓扑以及用这个拓扑所定义的层 (sheaf). 作为深入了解这个概念的第一个重要工具就是平坦下降法 (见参考文献 Grothendieck[FGA]), 对此本章是详细证明的. 第四章我们介绍叠 (stack) 的概念. 一般的模曲线就是一个叠 (见参考文献 Deligne 和 Rapoport[1]). Hilbert 函子和 Picard 函子是代数几何中经常使用的工具，它们算是最重要的可表函子了！在第五章我们依照 Grothendieck(见参考文献 Grothendieck[FGA]) 用射影几何的方法构造 Hilbert 函子，即利用 Grassmann 簇 (及 m-正则性) 实现 Hilbert 函子. 本章亦有详细证明. 第六章讨论 Picard 函子，并顺便用现代语言介绍 Jacobian, 这方便于读者看 Serre 的教科书 [4]. 有了以上的背景就可以明白模曲线的算术几何定义了，这就是第七章. 习惯上我们考虑定义在一个域 k 上的椭圆曲线 E, 它实际上是在一点 s_0 (Spec k) 上的曲线. 为了了解椭圆曲线的结构，我们需要考虑 E 在 s_0 附近的变化. 这就导致了在一个概形 S 上的椭圆曲线，这是第七章 §1 的话题 (这也是为什么我们在第一章 §3 讨论 S-概形以及在第六章 §2 讨论相对除子的原因). 作为椭圆曲线的初等例子，我们在此节也介绍了怎样利用 Weierstrass 方程解决一个椭圆曲线的可表函子问题. 若以 $\mathfrak{H}$ 记复上半平面，Γ 记 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, Y 记 $\mathfrak{H}/\Gamma$, 则经典的模形式 f 便是定义在这个黎曼面 Y 上的函数，而这个 Y 就是我们所讨论的模曲线的复数点. 为了了解 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$, 我们需要在 Y 上添加一个点 ∞, 得到紧黎曼面 X. 同样，为了紧化 (compactify) 用可表函子所定义的模曲线，我们便在第七章 §2 引入 Deligne-Rapoport 的广义椭圆曲线. 上述的经典的模形式 f 在无穷远处的性质可用它的 Fourier 展开：$f(z) = \sum a_n q^n$(其中 $q = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}}$) 来描述. 这样的表达式在几何理论中是什么呢？为了解答这个问题，我们在第九章引入椭圆曲线的 Tate 理论. 在此之前我们温习了一下微分形式的代数理论. 这也是 Grothendieck 的工作 (见参考文献 Grothendieck[3]). 此章最后介

绍 Kodaira-Spencer 映射 (这是 Deligne 用来定义尖形式的工具，有关这方面的近日的工作见参考文献 Faltings[1]). 最后我们把读者带到第十章：将模形式看作用可表函子所定义的模曲线上的微分形式，并且给出其 Hecke 算子.

书中关于模空间与可表函子的理论几乎完全是由 Grothendieck 开创的，它的发展深受他的影响. 特此向他致敬.

本书可供数学系研究生作为教材，也可供从事数论、代数几何等专业的数学工作者使用.

由于作者的水平有限，加之时间仓促，书中难免有错误和不当之处，敬请读者给予指正和更正.

丁石孙教授对于本书给予了高度的重视和热情的鼓励；北京大学数学科学学院和数学研究所给予了大力支持，在此我们对于他们深表谢意.

目　录

第一章　可表函子

Grothendieck 在他的代数几何理论中常用范畴的语言来总结一些结果. 比如, 仿射概形范畴等价于交换环范畴; 又如, 设 A 为交换环, $X = \mathrm{Spec}\, A$, 则 A-模范畴等价于拟凝聚 $\mathscr{O}_X$-模范畴, 并且 A 的理想对应于 X 的闭子概形.

可表函子是代数几何里的中心概念. 判定某个函子是否为可表函子是一个重要的问题. 我们将用可表函子处理模曲线问题. 本章将介绍可表函子的概念和一些基本性质.

在本书中, 除了特别声明之外, 所有的环都是指有 1 的交换环.

§1.1　Yoneda 引理

我们首先回顾范畴理论中的一些记号和基本概念.

设 $\mathfrak{C}$ 是一个范畴. 以 $\mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}$ 表示 $\mathfrak{C}$ 的对象的全体; 对于 $X, Y \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}$, 以 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y)$ 表示由 X 到 Y 的所有态射的组成的集合. 在不会引起混淆的情况下, 此集合也记为 $[X, Y]$. $\mathfrak{C}$ 内的态射的全体记为 $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{C}$.

设 $\mathfrak{C}$、$\mathfrak{D}$ 是两个范畴, 由 $\mathfrak{C}$ 到 $\mathfrak{D}$ 的一个 (共变 (covariant)) **函子** (functor)F 是指:

(1) 对于 $\mathfrak{C}$ 的任一对象 X, F 规定了 $\mathfrak{D}$ 中的相应的对象 $F(X)$;

(2) 设 X、Y 为 $\mathfrak{C}$ 的任意二对象. 对于任一 $f \in [X, Y]$, F 规定了 $[F(X), F(Y)]$ 中的一个元素 (态射)$F(f)$, 满足:

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f), \quad \forall\, f \in [X, Y],\ g \in [Y, Z]$$

以及

$$F(1_X) = 1_{F(X)}.$$

如果将上述的条件 (2) 改为

(2′) 对于任一 $f \in [X, Y]$，F 规定了 $[F(Y), F(X)]$ 中的一个元素 (态射)$F(f)$，满足:

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g), \quad \forall\, f \in [X, Y],\ g \in [Y, Z]$$

以及

$$F(1_X) = 1_{F(X)},$$

则称 F 为由 $\mathfrak{C}$ 到 $\mathfrak{D}$ 的一个 *反变函子* (contravariant functor).

设 $\mathfrak{C}^0$ 为 $\mathfrak{C}$ 的反范畴，即规定 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^0}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y, X)$. 则由范畴 $\mathfrak{C}$ 到范畴 $\mathfrak{D}$ 的反变函子可以视为由 $\mathfrak{C}^0$ 到 $\mathfrak{D}$ 的共变函子.

设 $F: \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ 是一个函子. 如果存在函子

$$G: \mathfrak{D} \to \mathfrak{C},$$

满足：对于 $\mathfrak{C}$ 的任一对象 X，$\mathfrak{D}$ 的任一对象 Y，以及所有的 $f \in [X, X']$，$g \in [Y, Y']$ (X' 为 $\mathfrak{C}$ 的任一对象，Y' 为 $\mathfrak{D}$ 的任一对象)，都有

$$G(F(X)) = X, \quad F(G(Y)) = Y, \quad G(F(f)) = f, \quad F(G(g)) = g,$$

则称 F 是由 $\mathfrak{C}$ 到 $\mathfrak{D}$ 的一个同构，同时也称 $\mathfrak{C}$ 与 $\mathfrak{D}$ 同构或等价.

联系两个函子的的概念是“函子态射”(或“自然变换”). 设 $\mathfrak{C}$ 和 $\mathfrak{D}$ 为两个范畴，F 和 G 为由 $\mathfrak{C}$ 到 $\mathfrak{D}$ 的两个函子. 由 F 到 G 的一个 *函子态射* Φ 是指：对于 $\mathfrak{C}$ 的任一对象 X，给定一个态射 $\Phi_X: F(X) \to G(X)$，使得下面的图表交换:

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\Phi_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(Y) \arrow[r, "\Phi_Y"] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

其中 X、Y 为 $\mathfrak{C}$ 的任意两个对象，f 为 X 到 Y 的任一态射.

由 F 到 G 的函子态射的全体记为 $\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{C},\mathfrak{D})}(F,G)$ 或 $[F,G]$.

以下讨论 "Yoneda 引理", 它在可表函子的研究中有基本的重要性.

如通常一样, 以 **Sets** 记集合组成的范畴. 设 $\mathfrak{C}$ 为一个范畴. 则对于任一 $X \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}$, 有 (共变) 函子

$$\begin{aligned} h_X:\ \mathfrak{C}^0 &\to \mathbf{Sets}, \\ Y &\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y,X). \end{aligned}$$

对于 $\mathfrak{C}^0$ 中的任一态射 $f:\ Z \to Y (\in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^0}(Y,Z))$, h_X 在其上的作用是自然的:

$$\begin{aligned} h_X(f):\ \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y,X) &\to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Z,X), \\ g &\mapsto g\circ f. \end{aligned}$$

当然, h_X 也是由 $\mathfrak{C}$ 到 **Sets** 的一个反变函子.

设 $F:\ \mathfrak{C} \to \mathbf{Sets}$ 为任一反变函子, $\Phi \in [h_X, F]$ 为任一函子态射, 即对于 C 的任一对象 Y, 有范畴 **Sets** 中的态射

$$\Phi_Y:\ h_X(Y) \to F(Y),$$

使得对于任一态射 $f:\ Y' \to Y$, 下面的图表交换:

$$\begin{array}{ccc} h_X(Y)=[Y,X] & \xrightarrow{\Phi_Y} & F(Y) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle h_X(f)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle F(f)} \\ h_X(Y')=[Y',X] & \xrightarrow{\Phi_{Y'}} & F(Y') \end{array}$$

若取 $Y = X$, 则 $h_X(X) = [X,X]$ 中的恒同映射 1_X 在态射 Φ_X 下有像 $\Phi_X(1_X) \in F(X)$.

引理 1.1(Yoneda) *在上述记号下, 有一一对应:*

$$\begin{aligned} [h_X, F] &\to F(X), \\ \Phi\ &\mapsto \Phi_X(1_X). \end{aligned}$$

这就是说，由 h_X 到 F 的函子态射完全被 X 上的恒同映射在该函子态射下的像所决定.

证明 将引理中的映射记为 $\alpha:\ [h_X,F]\to F(X)$. 我们只需给出 α 的逆映射.

为了定义逆映射 $\beta:\ F(X)\to[h_X,F]$，需要规定集合 $F(X)$ 中的任一元素 a 在 β 下的像 $\beta(a)\in[h_X,F]$，即对于任一 $Y\in\mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}$，要规定 $\beta(a)_Y\in[h_X(Y),F(Y)]$. 设

$$f:\ Y\to X(\in h_X(Y)=\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y,X)),$$

定义

$$\beta(a)_Y(f)=F(f)(a).$$

我们首先说明 $\beta(a)$ 是函子态射，即验证下面的图表交换:

$$\begin{tikzcd}
h_X(Y)=[Y,X] \arrow[r, "\beta(a)_Y"] \arrow[d, "h_X(g)"'] & F(Y) \arrow[d, "F(g)"] \\
h_X(Y')=[Y',X] \arrow[r, "\beta(a)_{Y'}"] & F(Y')
\end{tikzcd}$$

其中 Y、Y' 为 $\mathfrak{C}$ 的任意两个对象， $g:\ Y'\to Y$ 为任一态射. 事实上，对于任一 $k:\ Y\to X(\in h_X(Y))$，有

$$F(g)(\beta(a)_Y(k))=F(g)(F(k)(a))=F(k\circ g)(a),$$

$$\beta(a)_{Y'}(h_X(g)(k))=\beta(a)_{Y'}(k\circ g)=F(k\circ g)(a).$$

这就证明了图表的交换性.

下面证明 β 是 α 的逆.

一方面，容易看出 $\alpha\circ\beta=1_{F(X)}$. 事实上，对于任一 $a\in F(X)$，由 α、β 的定义以及函子的定义性质 (将恒同态射映为恒同态射)，有

$$\alpha(\beta(a))=\beta(a)_X(1_X)=F(1_X)(a)=1_{F(X)}(a)=a.$$

另一方面，我们要证明 $\beta \circ \alpha = 1_{[h_X, F]}$，即对于任一 $\Phi \in [h_X, F]$，有 $\beta(\alpha(\Phi)) = \Phi$，亦即对于任一 $Y \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}$，有 $\beta(\alpha(\Phi))_Y = \Phi_Y$. 设 $f: Y \to X (\in h_X(Y))$. 则

$$\beta(\alpha(\Phi))_Y(f) = F(f)(\alpha(\Phi)) = F(f)(\Phi_X(1_X)).$$

由于 $\Phi \in [h_X, F]$，所以有交换图表：

$$\begin{tikzcd}
h_X(X) = [X, X] \arrow[r, "\Phi_X"] \arrow[d, "h_X(f)"'] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \\
h_X(Y) = [Y, X] \arrow[r, "\Phi_Y"] & F(Y)
\end{tikzcd}$$

故

$$F(f)(\Phi_X(1_X)) = \Phi_Y(h_X(f)(1_X)) = \Phi_Y(f).$$

于是

$$\beta(\alpha(\Phi))_Y(f) = \Phi_Y(f), \quad \forall f \in h_X(Y).$$

这就完成了引理的证明. □

§1.2 可表函子

定义 1.1 设 F 是由范畴 $\mathfrak{C}$ 到范畴 Sets 的一个反变函子. 如果存在 $X \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}$，使得 F 与 h_X 同构，则称 F 为 **可表函子** (*representable functor*). F 的一个 **表示**(*representation*)是指一个函子同构 $\rho: h_X \to F$. 此时我们也称 F **由** X **代表**(*representaed by X*).

说明 如果 F 是一个可表函子，根据 Yoneda 引理可知： F 的任一表示 $\rho: h_X \to F$ 完全由 $X \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}$ 以及 $\rho_X(1_X)$ 所决定. 此时我们称 $\rho_X(1_X)$ 为 F 一个 **泛元**(universal element)，记为 u_F.

下面的定理说明了泛元的泛性质.

定理 1.2 设 $\rho:\ h_X \to F$ 为反变函子 $F:\ \mathfrak{C} \to \mathbf{Sets}$ 的一个表示， $u_F = \rho_X(1_X)$ 为泛元. 则对于任一 $c \in F(Y)$ (其中 Y 为 $\mathfrak{C}$ 的任一对象)，存在唯一的态射 $f \in [Y, X]$，使得

$$c = F(f)(u_F).$$

证明 由定义，$h_X(Y) = [Y, X]$. 另一方面，由于 $\rho:\ h_X \to F$ 为函子同构，故有交换图表：

$$\begin{tikzcd} h_X(X) \arrow[r, "\rho_X"] \arrow[d, "h_X(g)"'] & F(X) \arrow[d, "F(g)"] \\ h_X(Y) \arrow[r, "\rho_Y"] & F(Y) \end{tikzcd}$$

其中 $g:\ Y \to X \in [Y, X]$ 为任一态射. 由于 ρ_Y 为同构，故对于 $c \in F(Y)$，存在 $f \in h_X(y)$，满足 $\rho_Y(f) = c$. 显然 $f = h_X(f)(1_X)$. 于是

$$c = \rho_Y(h_X(f)(1_X)).$$

在上面的交换图表中取 $g = f$，则有

$$c = \rho_Y(h_X(f)(1_X)) = F(f)(\rho_X(1_X)) = F(f)(u_F).$$

下面证明 f 的唯一性. 设 $g:\ Y \to X$ 满足 $c = F(g)(u_F)$，则 $c = F(g)(\rho_X(1_X)) = \rho_Y(h_X(g)(1_X))$. 又有

$$c = \rho_Y(h_X(f)(1_X)),$$

故

$$\rho_Y(h_X(g)(1_X)) = \rho_Y(h_X(f)(1_X)).$$

而 ρ_Y 是同构，所以

$$h_X(g)(1_X) = h_X(f)(1_X),$$

即 $g = f$. $\square$

我们回顾范畴论中的一个简单的事实，即：所有的范畴都可以视为函子的范畴. 准确地说，有下面的定理.

定理 1.3 设 $\mathfrak{C}$ 是一个范畴，以 $\mathbf{Funct}(\mathfrak{C}^0, \mathbf{Sets})$ 记由 $\mathfrak{C}^0$ 到 $\mathbf{Sets}$ 的函子的全体. 定义态射

$$h:\ \mathfrak{C} \to \mathbf{Funct}(\mathfrak{C}^0, \mathbf{Sets}),$$

$$X \mapsto h(X) = h_X,$$

$$(X \xrightarrow{f} Y) \mapsto h(f): \begin{cases} h_X \to h_Y, \\ (Z \xrightarrow{g} X) \mapsto (Z \xrightarrow{fg} Y). \end{cases}$$

则映射

$$\text{Obj } \mathfrak{C} \to \text{Obj } \mathbf{Funct},$$

$$X \mapsto h_X$$

是单射，并且 h 是全忠实的(*fully faithful*) (即对于任意的 $X, Y \in \text{Obj } \mathfrak{C}$,

$$\text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y) \to \text{Hom}_{\mathbf{Funct}}(h_X, h_Y),$$

$$f \mapsto h(f)$$

都是双射).

读者可自行证明此定理.

这个定理告诉我们：函子的概念更具有基本的重要性和普遍适用性，许多论述都可以用函子的语言来表达. 例如，在代数几何中，考虑概形范畴 Sch. 设 $V = \text{Spec }(k[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{p})$ 是代数闭域 k 上的一个仿射概形，其中 $\mathfrak{p}$ 为多项式环 $k[x_1, \ldots, x_n]$ 的一个素理想. 则 V 的闭点对应于 $k[x_1, \ldots, x_n]$ 内包含 $\mathfrak{p}$ 的极大理想 $\mathfrak{m}$，也就对应于 k-代数同态：

$$k[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{p} \longrightarrow k[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{m}(= k).$$

这就是说，V 的闭点集合可以等同于概形的态射集合

$$\text{Hom}_{\text{Sch}}(\text{Spec } k, V).$$

一般地，设 X 是一个概形. 考虑由 Sch 到 $\mathbf{Sets}$ 的反变函子

$h_X \in \mathbf{Funct}((\mathrm{Sch})^0, \mathbf{Sets})$，其定义如下：

$$\begin{aligned} h_X:\ (\mathrm{Sch})^0 &\to \mathbf{Sets}, \\ Y &\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(Y, X), \end{aligned}$$

$$(Y' \xrightarrow{f} Y) \mapsto (\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(Y, X) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(Y', X)),$$

其中 f^* 定义为：对于任一 $g: Y \to X (\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(Y, X))$，

$$f^*(g) = g \circ f (\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(Y', X)).$$

代数几何中的一个重要的问题就是： $\mathbf{Funct}((\mathrm{Sch})^0, \mathbf{Sets})$ 的对象(函子)F 满足怎样的条件才能同构于 h_X(X 为某个概形)？即在什么条件下 F 为可表函子？如果 F 为可表函子，则 F 便有代数几何的内涵.

下面我们给出可表函子的一个例子.

设有范畴 $\mathfrak{I}$、$\mathfrak{C}$ 和函子 $F: \mathfrak{I} \to \mathfrak{C}$. 对于 $X \in \mathrm{Obj}\ \mathfrak{C}$，定义**常值函子** (constant functor) $c_X: \mathfrak{I} \to \mathfrak{C}$ 如下：对于 $I \in \mathrm{Obj}\ \mathfrak{I}$，令 $c_X(I) = X$；对于 $\alpha \in \mathrm{Mor}\ \mathfrak{I}$，令 $c_X(\alpha) = \mathrm{id}_X$. 这样就得到一个共变函子：

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} &\to \mathbf{Sets}, \\ X &\mapsto \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{I}, \mathfrak{C})}(F, c_X). \end{aligned}$$

以 $\varinjlim F$ 记此函子. 如果此函子可表，则存在 $L \in \mathrm{Obj}\ \mathfrak{C}$ 以及 $\phi \in \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{I}, \mathfrak{C})}(F, c_L)$，使得对于任一函子态射 $\chi: F \to c_X$，存在唯一的态射 $\psi: L \to X$ 满足 $\chi = c_\psi \circ \phi$. 此时有双射

$$\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{I}, \mathfrak{C})}(F, c_L) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(L, X).$$

我们亦以 $\varinjlim F$ 记 L(于是上面的函子态射即是 ψ). 以 $\mathbf{Ab}$ 记交换群范畴.

命题 1.4 对于任一函子 $F: \mathfrak{I} \to \mathbf{Ab}$，$\varinjlim F$ 可表.

证明 若 $\mathfrak{I}$ 内有态射 $\alpha: i \to j$，且有 $x \in F(i)$，$y \in F(j)$ 满足 $F(\alpha)x = y$，则将 $x - y \in F(i) \bigoplus F(j)$ 作为集合 E 中的元素. 以 R 记 E 在群 $\bigoplus_{i \in \mathfrak{I}} F(i)$ 中生成的子群. 取 $L = \bigoplus_{i \in \mathfrak{I}} F(i)/R$ 即可. □

§1.3 纤维范畴

§1.3.1 纤维范畴

在 Grothendieck 的理论子中常常见到这样的构造：固定一个范畴 $\mathfrak{C}$. 若有函子

$$\mathfrak{F} \xrightarrow{p} \mathfrak{C},$$

则称 $\mathfrak{F}$ 为 $\mathfrak{C}$ **上的范畴** (category over $\mathfrak{C}$).

设有 $\mathfrak{C}$ 上的范畴 $\mathfrak{G} \xrightarrow{q} \mathfrak{C}$ 以及函子 $\mathfrak{F} \xrightarrow{f} \mathfrak{G}$. 如果 f 满足条件 $qf = p$，则称 f 为 $\mathfrak{C}$-函子. 由 $\mathfrak{F}$ 到 $\mathfrak{G}$ 的 $\mathfrak{C}$-函子的全体记为 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$.

设 $\mathfrak{F}$、$\mathfrak{G}$ 同上，$f, g: \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$ 为两个 $\mathfrak{C}$-函子. 如果函子态射 $u: f \to g$ 满足条件：对于任意的 $\xi \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{F})$ 有

$$q(u(\xi)) = \mathrm{id}_{p(\xi)},$$

则称 u 为 $\mathfrak{C}$-同态.

$\mathfrak{C}$ 上的两个范畴 $\mathfrak{F} \to \mathfrak{C}$ 和 $\mathfrak{G} \to \mathfrak{C}$ 的 **纤维积** (fibred product) 是指一个范畴 (记为 $\mathfrak{F} \times_{\mathfrak{C}} \mathfrak{G}$) 以及两个函子

$$\mathfrak{F} \times_{\mathfrak{C}} \mathfrak{G} \xrightarrow{pr_1} \mathfrak{F}, \qquad \mathfrak{F} \times_{\mathfrak{C}} \mathfrak{G} \xrightarrow{pr_2} \mathfrak{G},$$

使得对于 $\mathfrak{C}$ 上任一范畴 $\mathfrak{H} \to \mathfrak{C}$ 都有双射

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{H}, \mathfrak{F} \times_{\mathfrak{C}} \mathfrak{G}) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) \times \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{H}, \mathfrak{G}),$$

$$h \longmapsto (pr_1 \circ h,\ pr_2 \circ h).$$