遵照教育部頒發大專課程標準編著

大專數學(二)

工程數學

編著者

陳文魁　張東隆

興業圖書股份有限公司印行

大專數學(二)

工程數學

編著者
陳文魁 張東隆

興業圖書股份有限公司印行

中華民國六十八年九月一版

工程數學

編 著 者：陳文魁　張東隆
發 行 人：王 志 康
本公司登記證局版台業字第0410號
出 版 者：興業圖書股份有限公司
發 行 者：興業圖書股份有限公司
台南市勝利路一一八號
電 話：（〇六二）三七三二五三號
郵撥南字三一五七三號
基本定價七元三角正

目　　錄

第一章
一階常微分方程式

1－1　概　論

可自由變化之數值，吾人稱之爲自變數，由自變數決定其數值之數，亦卽隨自變數之變化而改變的數值，謂之因變數或應變數，而表達自變數與應變數之間關係的數學式，卽謂之方程式。方程式中若含有微分或導數之項，則此方程式稱之爲微分方程式。例如

$$\frac{dy}{dx}+x=y \qquad (1)$$

$$xy'+y=0 \qquad (2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^4=y+6 \qquad (3)$$

$$dy=\cos x\,dx \qquad (4)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y+x\frac{\partial z}{\partial y} \qquad (5)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \qquad (6)$$

$$\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt}+x+3\dfrac{dy}{dt}+y=e^{-t} \\ \dfrac{dx}{dt}+5x+\dfrac{dy}{dt}+7y=t \end{cases} \qquad (7)$$

等等，都是微分方程式，在(1)，(2)，(3)，(4)各式中，含有一個自變數 x 及一個應變數 y，稱爲常微分方程式，在(5)，(6)兩式中，含有兩個自變數 x，y，一個應變數 z，稱爲偏微分方程式。在(7)式中，含有一個自變數 t，兩個應變數 x，y，稱爲聯立微分方程組。

在微分方程式中，其所含導數的最高階數，稱爲該方程式之階

(*order*) 。

將微分方程式中之導數變化爲有理整式後，其最高階導數之次數，稱爲該方程式之次數(*Degree*) 。

上述之範例中，(1)，(2)，(4)，(5)，(7)各爲一階一次，(3)、(6)爲二階一次。

若微分方程式中，所有應變數及其導數均爲一次者，稱爲線性微分方程式(*Linear differential equation*)，如上述範例中之(1)，(2)，(4)，(5)，(6)式均屬之。若其中之應變數及其導數有高於一次，或有相互乘積項，或包含應變數之非線性函數者，稱爲非線性微分方程式(*Non-linear differential equation*) 。上述範例中之(3)式則屬之 。

微分方程式的解答，是必須滿足微分方程式各變數間的關係，亦即把此一關係代入微分方程式時，就得到一個相同的代數結論 。簡單的說，由微分方程式所求出原變數與其自變數間之關係式，即爲該微分方程式之解答。若解答中所包含任意常數之數目，與微分方程式中的階數相同時，此解稱爲通解(*General Solution*)，若再由初始條件(*Initial Conditions*)或邊界條件(*Boundary Conitions*)求出通解中之任意常數值，即可得到特解(*Particular Solution*) 。此外，凡不可能包含於通解內之解答，亦即並非由通解中指定任意常數的值而得的解，稱爲奇解(*Singular Solution*) 。例如：

$$y'^2 - xy' + y = 0$$

之通解爲

$$y = cx - c^2 。$$

但 $x^2 = 4y$ 雖亦爲此微分方程式之解答，却並非由通解內指定常數而而求得者，故 $y = \frac{x^2}{4}$ 稱爲 $y'^2 - xy' = 0$ 之奇解 。

一般言之，微分方程式之產生，多由(1)消去方程式中之任意常數及(2)解析式產生微分方程式，今舉例說明於后。

【例 1 】：消去　$y=A\sin x$ 中之 A。

解：因 $y=A\sin x$，故 $y'=A\cos x$ 即可得

$y=y'\tan x$。

【例 2 】：消去 $(x-h)^2+(y-k)=r^2$ 中之 h,k 。

解：原式微分得 $x-h+(y-k)y'=0$ 。

再微分得　$1+y'^2+(y-k)y''=0$ 。

將此二式代入原式，即可消去 h ，k 而得

$(1+y'^2)^3=r^2y''^2$。

【例 3 】根據克希荷夫（*Kirchhoff*）定律，在任一封閉電路中，各電動勢之代數和，等於該電路中各段電位降之代數和，試以 Q 為未知函數寫出一方程式表此定律 。

解：依電學基本定律，吾人知

電阻之電位降 $=IR$，

電容之電位降 $=\dfrac{Q}{C}$ ，

電感之電位降 $=L\dfrac{dI}{dt}$ 。

故有

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{Q}{C}=E(t)$$ 。

但 $I=\dfrac{dQ}{dt}$，於是得其方程式

$$LQ''+RQ'+\frac{Q}{C}=E(t)$$

為一二 階微分方程式。

證明某函數為某微分方程式之解答，甚為容易。僅需將該函數微分後，代入微分方程式中，檢驗方程式之是否成立即可。

【例 4 】試證 $y=c_1\sin x+c_2\cos x$ 為 $y''+y=0$ 之通解 。

【證】原式微分得 $y'=c_1\cos x-c_2\sin x$

且 $y''=-c_1\sin x-c_2\cos x$ 。

代入原微分方程式中，即得

$$y'' + y = 0$$　故得證　。

在本章後續數節，吾人專論一階微分方程式之求解方法。某些二階或更高階微分方程式的解法將在第二章中論及。

習題 1 — 1

指出下列各微分方程式的階和次及是否爲線性。

1. $\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 + 2\frac{y}{x}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$。
2. $x^2 y''' = y^2$。
3. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 3y^3$。
4. $2x\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$。

消去下列各題中的常數，並列出其對應的微分方程式。

5. $y = mx + \sqrt{1+m^2}$。
6. $y = ax + \frac{b}{x}$。
7. $y = \sin(x+c)$。
8. $y = ae^x$。

下列各題中，證明右列各函數爲其左列各微分方程式的解

9. $y'' + 4y = 0$，$y = 3\cos 2x$。
10. $y''' = y''$，$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x$。
11. $(x+y) - xy' = 0$，$y = x\ln x - cx$。$(x>0)$
12. $2xyy' + x^2 = y^2$，$x^2 + y^2 = cx$。

1—2　變數分離型

形如

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1-1)$$

之微分方程式，皆爲一階微分方程式。而任一一階微分方程式，均可利用微分之觀念寫成

$$M\,dx + N\,dy = 0 \qquad (1-2)$$

之形式，以便於求解，而其中M，N爲x及y之任意函數或常數，若一一階微分方程式可寫成

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0 \qquad (1-3)$$

之形式，則稱之屬變數分離型。此類方程式僅須直接利用一般之積分技巧，即可求得其解。亦逕將上述（1－3）式積分則得：

$$\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = c \qquad (1-4)$$

其中c爲任意積分常數，（1－4）式左端之二積分項係分別對x，y之積分。上述之直接積分是否可成立，今證明如下：

（1－3）式可化成

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0 \text{ 。} \qquad (1-5)$$

令$H_1'(x) = M(x)$，$H_2'(y) = N(y)$，則（1－5）式變爲

$$H_1'(x) + H_2'(y)\frac{dy}{dx} = 0 \text{ 。}$$

若$y = \phi(x)$爲一可微分函數（*Differentiable Function*）則由連鎖律可得

$$H_2'(y)\frac{dy}{dx} = \frac{dH_2(y)}{dy}\ \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}H_2\left[\phi(x)\right] \text{ 。}$$

同時，若$y = \phi(x)$爲（1－5）式之解答，則

$$H_1'(x) + \frac{d}{dx}H_2\left[\phi(x)\right] = 0$$

$$\frac{d}{dx}\{H_1(x) + H_2\left[\phi(x)\right\} = 0 \text{ 。}$$

或上式對x積分，得：

$$H_1(x) + H_2\left[\phi(x)\right] = c \text{ 。}$$

亦即　$H_1(x) + H_2(y) = c$ 。……………………………（1－6）

（1－6）式卽

$$\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = c \text{ 。}$$

與直接由（2－3）式積分所得之（2－4）式完全相同，故得證。

若一方程式具下列形式

$$f_1(x)f_2(y)dx+\phi_1(x)\phi_2(y)dy=0$$

即爲變數可分離型微分方程式（*Variables separable equations*）。因此種方程式，只要以$\phi_1(x)f_2(y)$除全式即可得變數分離型微分方程式矣！

【例1】解$(1+y^2)dx+(1+x^2)dy=0$。

解：先分離變數得（除以$(1+y^2)(1+x^2)$）

$$\frac{dx}{1+x^2}+\frac{dy}{1+y^2}=0\text{。}$$

積分之：

$$\int\frac{dx}{1+x^2}+\int\frac{dy}{1+y^2}=c\text{，}$$

進而獲得

$$\mathrm{Tan}^{-1}x+\mathrm{Tan}^{-1}y=c\text{。}$$

應用反三角函數關係式，得

$$\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x+y}{1-xy}=c$$

或 $$\frac{x+y}{1-xy}=\tan c=k\text{。}$$

因此 $$y=\frac{k-x}{1+kx}\text{。}$$

【例2】解$xe^{-x}dx+\dfrac{dy}{y}=0$。

解：原式變數已分離，故可直接積分之，得

$$\int xe^{-x}dx+\int\frac{dy}{y}=c\text{。}$$

應用分部積分公式 $\int udv=uv-\int vdu$，

令$u=x$，且$dv=e^{-x}dx$則$du=dx$且$v=-e^{-x}$。故有

$$\int xe^{-x}dx=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}$$
$$=-(x+1)e^{-x}\text{。}$$

又$\displaystyle\int\frac{dy}{y}=\ln y$，因而原方程式積分可得

$$-(x+1)e^{-x}+\ln y=c\text{。}$$

令 $c=\ln k$，則得

$$\ln y-\ln k=\ln\frac{y}{k}=(x+1)e^{-x}\text{。}$$

或 $\dfrac{y}{k}=e^{(x+1)e^{-x}}$ 。

因此原方程式之通解爲

$$y=ke^{(x+1)e^{-x}}\text{。}$$

【例 3 】解 $xyy'=1+x^2+y^2+x^2y^2$。

解：因爲 $1+x^2+y^2+x^2y^2=(1+x^2)(1+y^2)$ 故原方程式可寫成變數分離型

$$\frac{ydy}{1+y^2}-\frac{(1+x^2)dx}{x}=0 \qquad (x\neq 0)$$

或 $$\frac{ydy}{1+y^2}-\frac{dx}{x}-xdx=0\text{。}$$

積分

$$\int\frac{ydy}{1+y^2}-\int\frac{dx}{x}-\int xdx=c$$

或 $$\frac{1}{2}\ln(1+y^2)-\ln(x)-\frac{1}{2}x^2=c\text{。}$$

上式可化簡爲

$$\frac{1+y^2}{x^2}=ke^{x^2},\ |k|=e^{2c}\text{。}$$

習題 1—2

試解下列微分方程式：

1. $\dfrac{dy}{dx}=2xy^2$ 。

2. $y'=-\dfrac{y}{x-1}$ 。

3. $ydx+(1+x^2)dy=0$。
4. $xydx-(1+x^2)dy=0$。
5. $y(1-x)dx+x^2(1-y)dy=0$。
6. $x^2ydx+(x+1)dy=0$。
7. $\sqrt{1+x^2}\,dy-\sqrt{1-y^2}\,dx=0$。
8. $2xy(4-y^2)dx+(y-1)(x^2+2)dy=0$。
9. $\mathrm{Sin}\,2xdx+\mathrm{Cos}\,3ydy=0$，$y(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{3}$。
10. $xdx+ye^{-x}dy=0$，$y(0)=1$。

1－3　正合微分方程式

若某一階微分方程式

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (1-7)$$

其通解可寫成 $f(x,y)=0$。　　(1－8)

若將（1－8）式微分，則可得

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0\text{。} \qquad (1-9)$$

（1－7），（1－9）式既均爲（1－8）式之微分方程式，則 dx，dy 之係數必相等或成比例（即比值相等）。若 dx，dy 之係數分別相等則：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=M(x,y),\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=N(x,y)\text{。}\end{aligned}\right\} \qquad (1-10)$$

此種情況，吾人稱（1－7）式爲正合微分方程式（*Exact differential equatiou*）。

若 dx，dy 之係數成比例，則

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{M(x,y)}=\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{N(x,y)}=\mu(x,y)$$

或

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=\mu(x,y)M(x,y)\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=\mu(x,y)N(x,y)\text{。}\end{aligned}\right\}\quad(1-11)$$

（1－11）式顯示在此種情況下（1－7）式之$M(x,y)$及$N(x,y)$分別乘以$\mu(x,y)$之後，原方程式即化爲正合微分方程式，其中$\mu(x,y)$吾人稱之爲原方程式之積分因式（*Integrating factor*）。積分因式之求法，容後再述。今先討論（1－10），若分別對y及x微分，即得

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\text{。}$$

設$M(x,y)$，$N(x,y)$及其偏導數，在$x-y$平面上某區域內均有確定之數値及具有連續之性質，則$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$，於是

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}\text{。}\qquad(1-12)$$

（1－12）式爲正合微分方程式之充分及必要條件。

求解正合微分方程式，可應用（1－10）式之性質，先將y視爲常數而將$M(x,y)$對x積分（或將x視爲常數而將$N(x,y)$對y積分亦可），於是得

$$f(x,y)=\int_a^x M(x,y)\,dx+f(y)\quad,\quad a\text{爲任意常數。}$$

再對y微分，得

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int_a^x M(x,y)\,dx+\rho'(y)$$

$$=\int_a^x\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}dx+\rho'(y),$$

$$=\int_a^x\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}dx+\rho'(y)=\mathrm{N}(x,y)\Big|_a^x+\rho'(y)$$

$$=N(x,y)-N(a,y)+\rho'(y)。$$

由(1－10)式之關係 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$，上式卽變爲 $\rho'(y)=N(a,y)$，將之積分可得

$$\rho(y)=\int_b^y N(a,y)\,dy \quad , \qquad b\text{爲任意常數}。$$

於是 $$f(x,y)=\int_a^x M(x,y)\,dx+\int_b^y N(a,y)\,dy。$$

由(1－8)知 $f(x,y)=c$ 爲(1－7)式之通解。因此

$$\int_a^x M(x,y)\,dx+\int_b^y N(a,y)\,dy=c \qquad (1-13)$$

恰爲(1－7)正合微分方程式之通解公式。

【例1】解 $xy'+y+4=0$。

解：將原方程式改寫成

$$(y+4)\,dx+x\,dy=0。$$

令 $M(x,y)=y+4$ 且 $N(x,y)=x$，

則因 $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}=1$

由以上之分析吾人獲知原微分方程式屬正合

其通解可由公式(1－13)

$$\int_a^x M(x,y)\,dx+\int_b^y N(a,y)\,dy=c$$

求得爲

$$\int_a^x (y+4)\,dx+\int_b^y a\,dy=c$$

或 $$xy+4x\Big|_a^x+ay\Big|_b^y=c。$$

卽 $$xy+4x-ay-4a+ay-ab=c$$

或 $$xy+4x=4a+ab+c。$$

令 $4a+ab+c=k$，則

$$xy+4x=k$$

爲所求之解答。

【例2】解（$y\cos x+2xe^{y}$）+（$\sin x+x^{2}e^{y}+2$）$y'=0$。

解：原式先改寫成

$$(y\cos x+2xe^{y})\,dx+(\sin x+x^{2}e^{y}+2)\,dy=0。$$

令$M(x,y)=y\cos x+2xe^{y}$

且$N(x,y)=\sin x+x^{2}e^{y}+2$。

則因$\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}=\cos x+2xe^{y}$故知原微分方程式屬正合型。

將M與N之結果代入公式（1－13），得

$$\int_{a}^{x}(y\cos x+2xe^{y})\,dx+\int_{b}^{y}(\sin a+a^{2}e^{y}+2)\,dy=e$$

或$y\sin x+x^{2}e^{y}\Big|_{a}^{x}+y\sin a+a^{2}e^{y}+2y\Big|_{b}^{y}=c$。

化簡上式得

$$y\sin x+x^{2}e^{y}+2y=b\sin a+a^{2}e^{b}+2b+c。$$

令$b\sin a+a^{2}e^{b}+2b+c=k$於是得原方程式之解答為

$$y\sin x+x^{2}e^{y}+2y=k。$$

前曾提及（1－7）及（1－9）式中dx，dy之係數有時僅成比例，此時若乘以積分因式$\mu(x,y)$，原方程式即可化為正合型。求取積分因數$\mu(x,y)$之方法，綜合為以下四類：

(1) 若$\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}=N\cdot f(x)$，則$e^{\int f(x)dx}$為一積分因式；

(2) 若$\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}=M\cdot \phi(y)$，則$e^{\int \phi(y)dy}$為一積分因式；

(3) 若$M(x,y)$及$N(x,y)$之每一項均屬x，y之同次者（即齊次微分方程式）則$\dfrac{1}{xM+yN}$為一積分因式；

(4) 利用基本微分公式，觀察已知微分方程式，以選擇適當之積分因式。

【例3】解微分方程式（$xy-y^{2}$）$dx-x^{2}dy=0$。

解：令$M(x,y)=xy-y^{2}$且$N(x,y)=-x^{2}$。

因$\dfrac{\partial M}{\partial y}=x-2y\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}=-2x$，故知原方程式不為正合。

但由觀察得知，若乘以積分因式 $\frac{1}{xy^2}$，則原式變爲（注意本題亦可以齊次方程式求其積分因式）

$$\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)dx-\frac{x}{y^2}dy=0$$

由是若令 $P(x,y)=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$ 且 $Q(x,y)=-\frac{x}{y^2}$ 則因

$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$,吾人獲知新方程式屬正合型矣！

應用公式（1－13）吾人求得

$$\int_a^x\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)dx-\int_b^y\frac{a}{y^2}dy=c$$

積分之得：

$$\frac{x}{y}+\ln x-\ln a-\frac{a}{b}=c$$

或 $\frac{x}{y}+\ln x=\ln a+\frac{a}{b}+c$

因此爲原式之通解爲

$$\frac{x}{y}+\ln x=k$$ 。

（1－13）式爲求解正合微分方程式之典型方法。但有很多正合微分方程式，如果作適當之重組，亦可逕予積分求解之。

【例4】解 $(e^x-\sin y)dx+\cos y\,dy=0$。

解：令 $M(x,y)=e^x-\sin y$ 且 $N(x,y)=\cos y$，則

$\frac{\partial M}{\partial y}=-\cos y$，$\frac{\partial N}{\partial x}=0$。

因 $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=-\cos y=\cos y(-1)=N\cdot(-1)$

$$=N\cdot f(x)$$

即 $f(x)=-1$，知原方程式適合(1)之條件。因而其積分因式爲

$e^{\int f(x)dx}=e^{\int(-1)dx}=e^{-x}$。

以 e^{-x} 乘原式，得