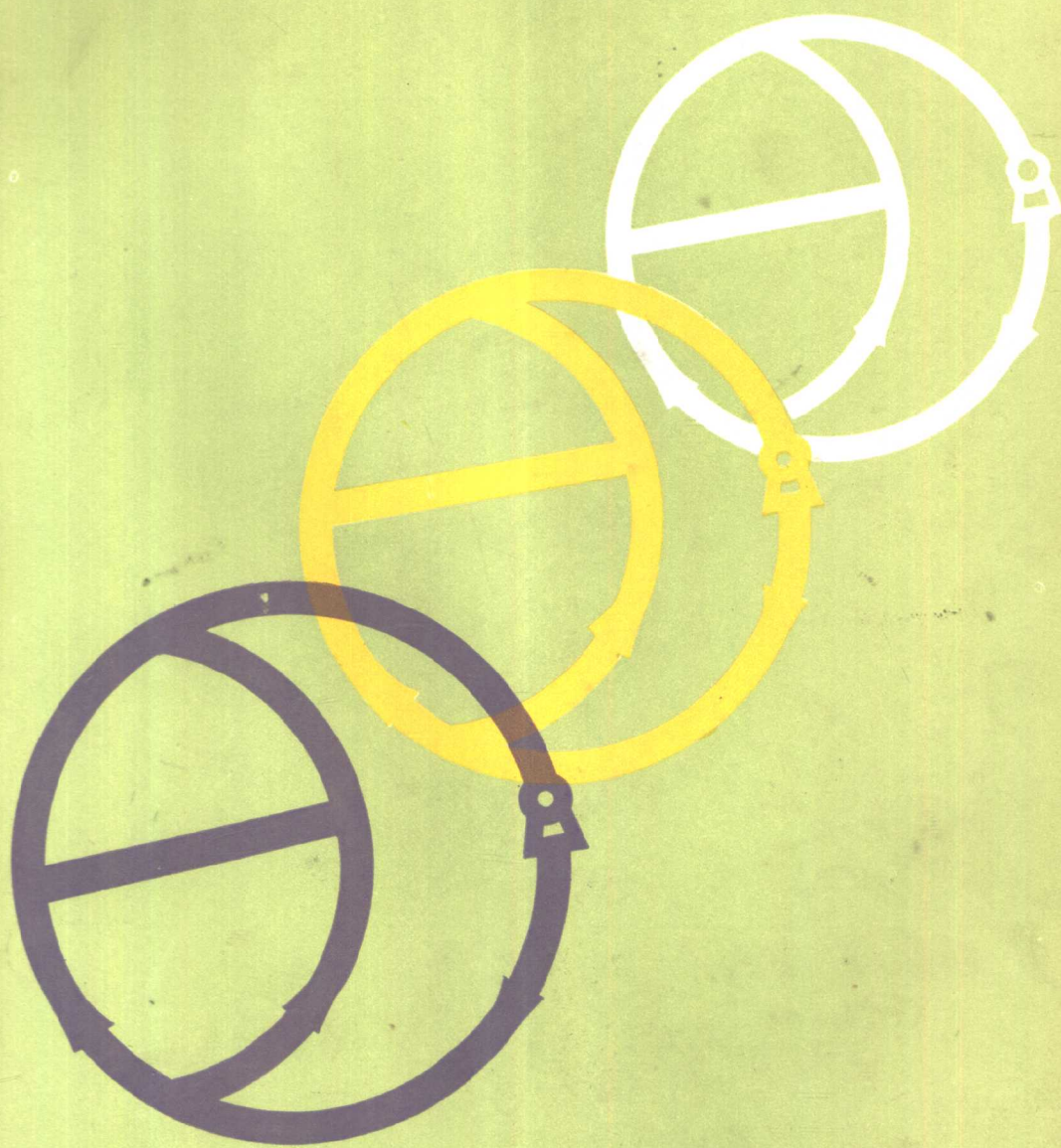


矿井通风网络分析 及电算方法



煤炭工业出版社

矿井通风网络分析 及电算方法

主 编：谭国运

副主编：张建国 张凌波

主 审：黄元平

煤炭工业出版社

(京)新登字042号

内 容 提 要

本书系统地介绍了矿井通风网络解算的基本理论和解算方法, 风流最新调节和控制原理, 发生灾变时网络风流的模拟和分析; 论述了扇风机特性曲线的模拟, 扇风机工况点的求解与分析、调节和选型, 并给出了部分计算机程序和算例。

本书可作为煤炭高等院校通风安全专业及有关专业的教学用书, 也可供科研、生产、管理和设计部门的工作人员参考。

责任编辑: 辛 广 龙

矿井通风网络分析及电算方法

主 编: 谭国运

副主编: 张建国 张凌波

主 审: 黄元平

煤炭工业出版社 出版

(北京安定门外和平里北街21号)

煤炭工业出版社印刷厂 印刷

新华书店北京发行所 发行



开本787×1092mm¹/16 印张14

字数329千字 印数1—2,300

1991年10月第1版 1991年10月第1次印刷

ISBN 7-5020-0569-2/TD·524

书号 3344

定价 5.90元

前 言

矿井通风是煤矿生产的一个重要环节，而矿井通风的现代化又是促进采矿工业实现现代化的极为重要的条件。为了普及现代化的矿井通风管理技术，本书依据图论和网络理论的原理，对矿井通风网络中的风流的分配、调节和控制问题，从理论上进行了研究和阐述，并综合分析了过去所用的方法，提出了新的原理和方法；书中对扇风机特性曲线的模拟、扇风机工况点的求解与分析、风机的调节和选型等进行了较为详细的叙述；书中还综合了矿井通风系统改造和优选的方法。

随着科学技术的不断发展，对现代矿井进行科学的管理的要求也越来越高，如何将有关通风系统的实测资料和网络解算与分析融为一体，实现对矿井通风的一体化管理，是人们十分关心的问题。本书在利用数据管理功能较强的数据库软件（如汉字dBASEⅢ系统）和科学计算功能较强的高级语言（如FORTRAN）对网络解算和通风测定等数据进行处理，并使两者通过数据库接口联为有机整体组成通风安全计算机管理系统方面作了初步尝试。

本书是近几年来，在矿井通风网络解算等方面所进行的科研、教学和生产实践的基础上，同时参阅了国内外和兄弟院校许多资料编写而成的。1989年7月本书初稿曾作为山西矿业学院通风专业87级的教材使用，取得较好的效果。这次作了全面修改，并增添了新的内容。

本书的第一章由赵永生、张凌波编写，第二、三、四、五章由谭国运、徐永爽编写，第六、七章由赵益芳、张建国编写，第八章由谭国运编写，其中第六、七章中的dBASEⅢ程序由谭国运和刘玉海共同编写。书中所列程序均在IBM PC/XT微机上调试通过。

本书在编写过程中，黄元平教授给予了具体的指导，并主审了全部书稿，周心权博士后参加了审阅工作，西安矿业学院刘冠姝副教授，以及潞安矿务局五阳煤矿、山西矿业学院采矿系计算机室和通风教研室都给予了大力的支持和帮助，在此一并表示衷心的感谢！

限于编者的学识水平和实践经验，加上时间仓促，书中一定存在有某些缺点和错误，恳求读者批评和指正。

编 者

1990年10月5日于太原

AB17/02

目 录

前 言

第一章 通风网络及网络图	1
第一节 图论的基本知识	1
第二节 矿井通风网络图的基本概念、矩阵表示及电算方法	22
第三节 矿井通风网络在电子计算机中的表示及存储	48
第二章 矿井扇风机运行特性及分析	51
第一节 概述	51
第二节 扇风机特性曲线的模拟	53
第三节 矿井扇风机工况点的求解、分析及调节	66
第四节 扇风机的优化选择	71
第三章 独立回路的选择	82
第一节 概述	82
第二节 树及其有关定理	83
第三节 计算机选取独立回路的方法	87
第四节 计算机选取独立回路的程序	93
第四章 通风网络自然分风的计算与分析	97
第一节 风网自然分风的数学解法	97
第二节 风网中风流流动定律的电算数学模型	98
第三节 解算风网的基本数学模型	99
第四节 回路风量法	104
第五节 节点风压法	117
第五章 风网中风流的调节与控制	121
第一节 风网内风流控制概述	121
第二节 风量调节的回路计算法	124
第三节 风量调节的通路计算法	133
第四节 风量调节方案的选择	139
第六章 矿井通风系统分析与评价	141
第一节 概述	141
第二节 矿井通风系统的合理性分析	143
第三节 矿井通风系统稳定性分析	145
第四节 火灾时期的风流状况的模拟	151
第五节 矿井通风系统评价	156
第七章 矿井通风系统的最优化	165
第一节 最优化概念	165

第一章 通风网络及网络图

矿井通风网络是矿井通风理论的重要组成部分, 矿井通风网络图是矿井通风网络分析的重要依据。研究矿井通风网络及网络图具有十分重要的意义。

本章首先介绍图论的基本知识, 然后介绍通风网络与通风网络图的概念及通风网络图的矩阵表示、电算方法以及在电子计算机中的存储等一些问题。

第一节 图论的基本知识

图论是一个十分重要的数学分支, 是建立和研究离散数学模型的重要数学工具之一。图论中使用的术语由于目前尚未统一, 故给概念的描述带来了一定的困难, 本书采用网络理论中通常使用的术语。

一、图的基本概念

图是用来研究一组具体事物之间相互关系的抽象代数。用点表示事物, 用连线表示不同事物之间的关系, 这样就形成了用这些点和连线表示事物特征的抽象图形。为了便于形成直观的印象, 也可用图解来表示一个图。任何图解, 也称为图。

(一) 图的定义

直观地讲, 图是由作为研究对象的有限个点 (如 m 个) 的集合 V 和表达这些点之间关系的 n 条连线的集合 E 所组成的, 可以记作 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 。如图 1-1 所示, 我们给出的图解 (a)、(b), 即表示各种图。它们都是由以 $v_1, v_2, \dots, v_m$ 标记的点的集合及以 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 标记的点的偶对间的连线 (称之为线) 的集合所组成的。在图解中, 当一些点的偶对间有线连接时, 对线的几何形状、长度、点的位置等等都没有具体的要求, 只要求每一条线都起始于一个点、终止于一个点, 保持点和线之间的连接关系即可。

给出的图的基本定义如下:

图 $G = (V, E, \Phi)$, 其中:

1. $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ 是点的有穷非空集合*, 称为图 G 的顶点集合, 记作 $V(G)$ 或 V , 其元素称为点;

2. $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是图 G 的连线的集合, 记作 $E(G)$ 或 E , 其元素称为线;

3. Φ 是以 E 到 V 中的有序或无序偶对所成集合的映射**。

通常, 图也写成 $G = (V, E)$ 。

[例 1-1] $G = (V, E)$, 其中:

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\};$$

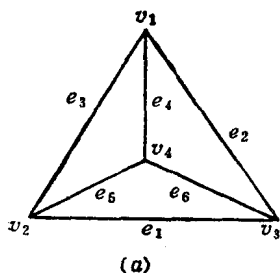
$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}\};$$

* 所谓有穷非空集合。是指由有限个元素组成的, 且至少含有一个元素的集合。

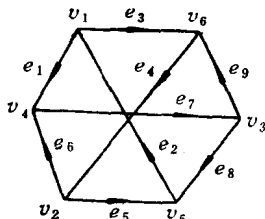
** 从 E 到 V 的映射。是指对于集合 E 中的每一个元素, 按照某一规则都可在集合 V 中找到唯一的元素与之对应。

$$\begin{aligned}\Phi: \phi(e_1) &= \langle v_1, v_2 \rangle, \phi(e_2) = \langle v_1, v_3 \rangle \\ \phi(e_3) &= \langle v_2, v_3 \rangle, \phi(e_4) = \langle v_2, v_4 \rangle \\ \phi(e_5) &= \langle v_3, v_6 \rangle, \phi(e_6) = \langle v_4, v_6 \rangle, \\ \phi(e_7) &= \langle v_4, v_5 \rangle, \phi(e_8) = \langle v_5, v_6 \rangle\end{aligned}$$

就是一个图，其图解表示如图1-2所示。



(a)



(b)

图 1-1

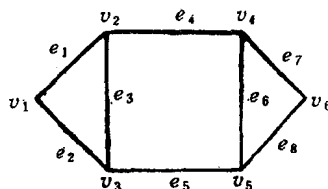


图 1-2

具有 m 个点、 n 条连线的图（即： $|V(G)| = m, |E(G)| = n$ ）通常也称为 (m, n) 图。图1-2所示的就是一个 $(6, 8)$ 图。

在图 $G = (V, E, \Phi)$ 中，有序偶对点 v_i, v_j 间的连线 e_k ，称为图 G 的有向分支（简称为分支），即 $\phi(e_k) = (v_i, v_j)$ （在此加圆括号以示标明点的偶对间的有序性），记作： $e_k = (v_i, v_j)$ ， v_i, v_j 分别称为分支 e_k 的初节点、末节点；而无序偶对点 v_i, v_j 间的连线 e_k ，称为图 G 的无向边（简称为边），即 $\phi(e_k) = \langle v_i, v_j \rangle$ ，记作： $e_k = \langle v_i, v_j \rangle$ ， v_i, v_j 称为边的端点。

图解法中，用带箭头的线表示有向分支，箭头方向表示由初节点指向末节点的方向。我们称每条线都是分支的图为有向图（如图1-3所示）；称每条线都是边的图为无向图（如图1-2所示）；既含有分支又含有边的图称为混合图。

在图解中，如果任意两个点之间只有一条边或分支相连接，则称这种图为简单图；反之，称之为多重图。

(二) 邻接和关联

在一个无向图 $G = (V, E)$ 中，如果 G 中的两个端点 v_i 与 v_j 之间有边 $e_k = \langle v_i, v_j \rangle$ 相连，则称端点 v_i 和 v_j 是邻接的，记作： $v_i \text{ adj } v_j$ ，称边 e_k 和端点 v_i, v_j 相关联；否则记作： $v_i \text{ nad } v_j$ 。若两边 e_k 和 e_m 有一共同的端点，则称 e_k 和 e_m 是边邻接的，记作： $e_k \text{ adj } e_m$ ；否则记作： $e_k \text{ nad } e_m$ 。

对于有向图 $G = (V, E)$ ，如果 G 中的两个节点 v_i 和 v_j 之间有分支 $e_k = (v_i, v_j)$ 相连，则称 v_i 和 v_j 邻接，记作： $v_i \text{ adj } v_j$ ，称分支 e_k 和节点 v_i, v_j 相关联；否则记作： $v_i \text{ nad } v_j$ 。若分支 e_k 的末节点是分支 e_m 的初节点，则称 e_k 和 e_m 分支邻接，记作： $e_k \text{ adj } e_m$ ；否则记作： $e_k \text{ nad } e_m$ 。因此，在有向图中，邻接关系是有方向的。图1-4所示中，有： $v_2 \text{ adj } v_4$ ； $v_4 \text{ nad } v_2$ ； $e_6 \text{ adj } e_7$ ； $e_7 \text{ nad } e_6$ ； $e_6 \text{ nad } e_1$ 。

可见，邻接是就线与线之间，或点与点之间的关系而言，而关联是就线与点之间的关系而言。

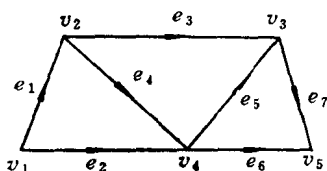


图 1-3

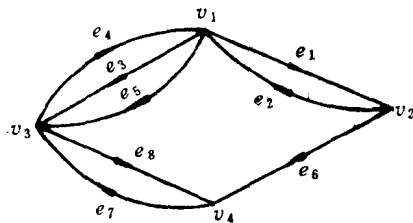


图 1-4

(三) 线度

线度是图论中的一个重要数据。简单地讲，在图 $G = (V, E)$ 中，与某个点相关联的边（或分支）的数目就是该点的线度。具体有如下定义：

在无向图 $G = (V, E)$ 中，以 v_i 为一端点的所有边的集合 $I_{no}(v_i) = \{e_k | \phi(e_k) = \langle v_i, v_j \rangle\}$ ，称 $|I_{no}(v_i)|$ 为端点 v_i 的线度，记作： $deg(v_i)$ 或 $d(v_i)$ 。即 $d(v_i)$ 表示无向图中与端点 v_i 关联的边的数目。

类似地， $I_{no}^+(v_i) = \{e_k | \phi(e_k) = (v_i, v_j)\}$ 和 $I_{no}^-(v_i) = \{e_k | \phi(e_k) = (v_j, v_i)\}$ 表示有向图中以节点 v_i 为初节点的、以节点 v_i 为末节点的分支的集合。 $d^+(v_i) = |I_{no}^+(v_i)|$ 称为节点 v_i 的正线度， $d^-(v_i) = |I_{no}^-(v_i)|$ 称为节点 v_i 的负线度， $d(v_i) = d^+(v_i) + d^-(v_i)$ 为节点 v_i 的线度。

〔例1-2〕 在图1-4中，有：

$$\begin{aligned} I_{no}^+(v_1) &= \{e_1, e_3, e_5\}, & d^+(v_1) &= 3; \\ I_{no}^-(v_1) &= \{e_2, e_4\}, & d^-(v_1) &= 2; \\ I_{no}^+(v_2) &= \{e_2, e_6\}, & d^+(v_2) &= 2; \\ I_{no}^-(v_2) &= \{e_1\}, & d^-(v_2) &= 1; \\ I_{no}^+(v_3) &= \{e_4, e_8\}, & d^+(v_3) &= 2; \\ I_{no}^-(v_3) &= \{e_3, e_5, e_7\}, & d^-(v_3) &= 3; \\ I_{no}^+(v_4) &= \{e_7\}, & d^+(v_4) &= 1; \\ I_{no}^-(v_4) &= \{e_6, e_8\}, & d^-(v_4) &= 2; \\ d(v_1) &= 5; & d(v_2) &= 3; & d(v_3) &= 5; \\ d(v_4) &= 3 \end{aligned}$$

设图 $G = (V, E)$ ， $|V(G)| = m$ ， $|E(G)| = n$ ，因为图中每一条边（或分支）与两个端点（节点）关联，所以若在图中端点（节点）间增加一条边（或分支），就会使各点的线度之和增加2。于是可得：

$$\sum_{v_i \in V} d(v_i) = \sum_{i=1}^n d(v_i) = 2n \quad (1-1)$$

即它的各个端点（节点）的线度之和是边（分支）数的二倍。

(四) 同构

由于图只是 V, E, Φ 的集体，因此在图的定义中，既没有涉及点的偶对间连线的形状、长度和位置，也没有给点限制任何次序，因此同一个图所表示的几何形状是可以不同的。图解与点的位置或点偶对间连线的形状、长度或顶点的次序等都没有关系，改变它们，即可得到表示同一图的不同图解。因此，两个看上去全然不同的图解，有时却表示

着同一个图。

由此，我们给出图的同构的定义：

对于有向图 $G_1 = (V_1, E_1, \Phi_1)$, $G_2 = (V_2, E_2, \Phi_2)$ ，若满足一一对应关系，即：

$$v_i^{(1)} \longleftrightarrow * v_i^{(2)}, v_i^{(1)} \in V_1, v_i^{(2)} \in V_2;$$

$$e_i^{(1)} \longleftrightarrow e_i^{(2)}, e_i^{(1)} \in E_1, e_i^{(2)} \in E_2,$$

且

$$\Phi_1(e_i^{(1)}) = (v_i^{(1)}, v_j^{(1)}) \longleftrightarrow \Phi_2(e_i^{(2)}) = (v_i^{(2)}, v_j^{(2)})$$

则称图 G_1 和 G_2 是同构的。

上述定义说明，如果在两个有向图的各节点之间存在着——对应关系，而且这种对应关系保持了节点间的邻接关系，同时图 G_1 的节点 $v_i(1)$ 与 $v_j(1)$ 之间有 k 条分支相连，当且仅当图 G_2 的节点 $v_i(2)$ 与 $v_j(2)$ 之间也有 k 条分支相连时，则称这两个有向图是同构的。同构的图除了编号不同外，其只是同一图的不同画法而已。

对于无向图，具有类似的定义，只需把分支、节点的对应分别变成边、端点的对应。

目前，寻求一个简单而有效的判断准则来检查图的同构问题，仍是一个尚未解决的重要问题。

〔例1-3〕 试考察图1-5所示的 (a) 与 (b) 的同构性。

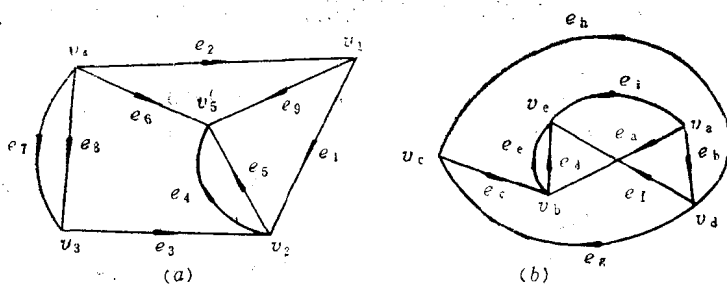


图 1-5

如果这两个图的节点之间作这样的一一对应：

$$v_1 \longleftrightarrow v_a \quad v_2 \longleftrightarrow v_b \quad v_3 \longleftrightarrow v_c \quad v_4 \longleftrightarrow v_d \quad v_5 \longleftrightarrow v_e$$

于是这两个图的分支之间也可建立了如下的一一对应关系：

$$e_1 \longleftrightarrow e_a \quad e_2 \longleftrightarrow e_b \quad e_3 \longleftrightarrow e_c$$

$$e_4 \longleftrightarrow e_d \quad e_5 \longleftrightarrow e_e \quad e_8 \longleftrightarrow e_f$$

$$e_7 \longleftrightarrow e_g \quad e_8 \longleftrightarrow e_h \quad e_9 \longleftrightarrow e_i$$

这种对应关系保持了节点间的邻接关系，因此，可以说这两个图的结构是相同的，通常说它们是两个同构的有向图。

互为同构的图，它们的点的数目、线的数目以及对应点的度数必须相同，但是，对于两个有向图形成同构的问题来讲，这显然不是充分条件。

(五) 链、路和回路

* $\longleftrightarrow$ 表示一一对应关系。

* * $v_i^{(1)} \in V_1$ ，表示 $v_i^{(1)}$ 是集合 V_1 中的一个元素。

对图 $G = (V, E)$, 设 $v_0, v_1, v_2, \dots, v_p \in V, e_1, e_2, \dots, e_p \in E$, 且边 e_i 与 v_{i-1}, v_i 关联, 则由这些边构成的一个有限序列, 称为链, 记作: $l = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_p\}$ 或 $l = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ 。链中的边 e_i 与 e_{i+1} 以端点 v_{i+1} 相衔接, 与 e_{i-1} 则以另一个端点 v_i 相衔接, 因此, 链也可以用端点和边的交替非零序列 $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 e_3 \dots e_p v_p$ 来描述。 v_0 和 v_p 分别称为链的起点和终点。链所含的边的数目 p 称为链的长度。没有重复边的链称为简单链, 所含端点各不相同的链称为基本链。显然, 基本链必定是简单的。基本链中除起点和终点的线度为 1 外, 其余各端点的线度均为 2。

一条闭合 (起点和终点重合) 的链称为回路, 闭合的基本链称为基本回路。

对于有向图, 如果在链中各分支方向一致, 即分支 e_i 的末节点是 e_{i+1} 的初节点, 则这种链称为道路。类似也有简单道路和基本道路。

〔例 1-4〕 在图 1-6 给出的有向图中, 有:

$l_1 = \{e_1, e_7, e_8, e_3\}$ 是起点为 v_2 、终点为 v_4 的简单链, 长度为 4;

$l_2 = \{e_1, e_7, e_6\}$ 是起点为 v_2 、终点为 v_4 的基本链, 长度为 3;

$l_3 = \{e_2, e_4, e_5\}$ 是起点为 v_1 、终点为 v_3 的基本道路, 长度为 3;

$l_4 = \{e_2, e_7, e_6, e_3\}$ 则是一条基本回路。

设图 $G = (V, E)$ 是一个 (m, n) 图, 则:

1) 任何基本链的长度都小于等于 $m - 1$;

2) 任何基本回路的长度都不超过 m 。

(六) 图的连通性

在一个图 G 中, 如果在每一对点之间至少存在一条链连接, 则称图是连通图。否则就是不连通图。

对于有向图 G , 其连通性可分为弱连通与强连通两种情况。

设图 $G = (V, E)$ 是一个有向图, $v_i, v_j \in V$, 如果从 v_i 到 v_j 至少存在有一条道路相通, 则称从 v_i 到 v_j 是可达的。

若有向图的任意两个节点 v_i, v_j 之间, 只有从 v_i 到 v_j (或从 v_j 到 v_i) 是可达的, 则称该图是弱连通图; 若图的任意两个节点 v_i 到 v_j 之间, 从 v_i 到 v_j 和从 v_j 到 v_i 都是可达的, 则称该图是强连通的。因此, 当我们说到一个连通有向图 G 时, 只是相对一个无向图来说是连通的, 这个图 G 既可能是强连通的, 也可能是弱连通的。

图 1-7 是一个弱连通的有向图。

图 1-8 是一个强连通的有向图。

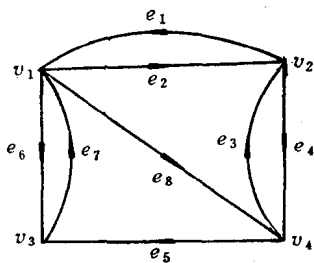


图 1-6

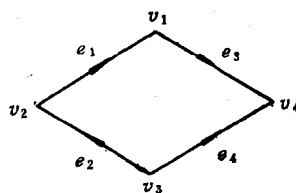


图 1-7

(七) 网络与权函数

一个图 $G=(V, E)$ 和定义在 G 的边 (或分支) 集 E 或点集 V 上的一个实函数 $f(e)$ 或 $f(v)$ ($e \in E, v \in V$), 称为一个网络或有权图, 记作: $N=(G, f)$, 函数 f 叫做权函数。

有权网络的图解, 是通过在图中的边 (或分支) 或点的旁边注明权函数的值来表示。图1-9所示的就是一个有向权网络的图解。

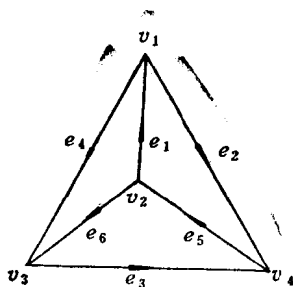


图 1-8

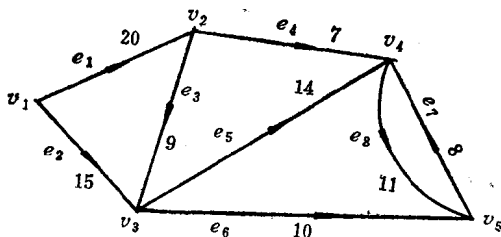


图 1-9

网络中各边 (或分支) 或点的权值的赋予, 是根据网络所描述的实际系统的解算的需要而定的。如, 在表示通风系统的有向网络中, 可按各巷道 (以分支表示) 的风阻或各巷道中通过的风量等等来对各分支赋权。

二、图的矩阵表示

借助于图的图解表示, 虽然可使图的概念的描述具有一定的直观性, 但这种表示法却有其局限性, 尤其是随着顶点和边的数目的增加, 要用图解来表示一个图的结构就变得很困难, 而且图解表示也不便于图的运算。因此, 有必要应用代数的方法来表示一个图, 这就是图的矩阵表示。图实现矩阵表示后, 对图的运算是非常有效的, 它不仅可使用矩阵代数中的方法和某些规则来研究、分析图的结构和性质变为可能, 并且还可以实现图在计算机里的存储和运算。

设图 $G=(V, E)$ 是一个 (m, n) 图, 则图 G 即可按其各元素之间的关联或邻接关系, 用关联矩阵、邻接矩阵或其它方式来表示。但由于不论是用何种矩阵来表示, 总是与 m 个点、 n 条边 (或分支) 的某种排列次序有关, 因此, 在论及图的矩阵表示时, 必须预先给出某种点和边 (或分支) 的排列次序。

(一) 图的邻接矩阵

一个图 G 的结构, 完全可以由节点之间的邻接关系来描述。这种关系可以通过一个矩阵来给出, 即可以用矩阵的形式来建立节点之间的邻接矩阵。

1. 简单无向图的邻接矩阵

设 $G=(V, E)$ 是一个任意两端点之间只有一条边连接的简单图, $|V|=m$, $|E|=n$, 则称 m 阶方阵 $A(G)=(a_{ij})$ 为图 G 的邻接矩阵。

其中:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ adj } v_j \text{ 时;} \\ 0, & v_i \text{ nadj } v_j, \text{ 或 } i=j \text{ 时} \end{cases}$$

〔例1-5〕 图1-10给出的简单无向图中, 对于端点的排列次序 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 , 有

如下邻接矩阵：

$$A(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} \end{matrix}$$

如果改变端点的排列次序，则邻接矩阵将作相应的行列变换。仍以图1-10为例，若端点的排列次序为 v_2 、 v_5 、 v_3 、 v_4 、 v_1 ，则相应的邻接矩阵为：

$$A(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_2 & v_5 & v_3 & v_4 & v_1 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_2 \\ v_5 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_1 \end{matrix} \end{matrix}$$

反之，一个邻接矩阵中的行列变换就相当于同一图中端点的重新编号。

上述矩阵 A 的特征是：

- (1) 若图有 m 个端点，其邻接矩阵即是一个 $m \times m$ 阶方阵；
- (2) 根据端点间的邻接概念，一个简单无向图的邻接矩阵是对角线元素为0的对称方阵，其元素仅由0、1组成；
- (3) 矩阵中任一行或列的非零元素的数目就是与该行或列所对应的端点相关联的边的数目，即该端点的线度；
- (4) 矩阵中非零元素的数目等于边数的2倍。

2. 简单有向图的邻接矩阵

对于简单有向图，由于任意两个节点之间只有一条分支相联接（由于是有向图，节点偶对间具有有序性，因此若在某两个节点之间有两条方向相反的分支，则仍应视这两节点之间只有一条分支相连接），因此上述邻接矩阵的定义同样适用。

〔例1-6〕 图1-11给出的简单有向图中，对应于节点的排列次序 v_1 、 v_2 、 v_3 、 v_4 、 v_5 ，有邻接矩阵 $A(G)$ ：

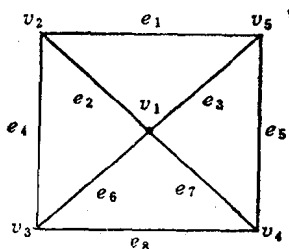


图 1-10

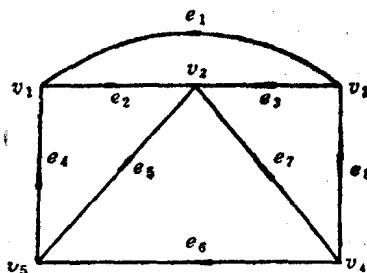


图 1-11

$$A(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

该矩阵具有如下的特征:

(1) 主对角线元素均为0, 但一般不再具有对称性。当且仅当简单有向图 G 中任意两个节点之间都有两条相反方向的分支相连接时, 其邻接矩阵才具有对称性;

(2) 矩阵的元素仍只有0、1组成;

(3) 矩阵中任一行的非零元素的数目就是该行所对应的节点的正线度, 任一列的非零元素的数目就是该列所对应的节点的负线度;

(4) 矩阵中非零元素的数目等于图中分支的数目。

3. 多重图与有权图的邻接矩阵

若将邻接矩阵的概念推广到多重图(即非简单图)与有权图, 则只需将定义中方阵 $A(G) = (a_{ij})$ 中的元素 a_{ij} 记入相应的值即可:

(1) 对于多重图, a_{ij} 应是从节点 v_i 到 v_j 间边(或分支)的数目;

(2) 对于有权图, a_{ij} 应是从节点 v_i 到 v_j 间边(或分支)上的权值。

〔例1-7〕图1-12中的(a)是**有权图**, (b)是**多重图**, 则相应的邻接矩阵为:

$$A(G_1) = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 3.5 & 0.8 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1.8 & 0 & 0 & 1.9 \\ 0 & 2.7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$A(G_2) = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

上面介绍的邻接矩阵, 是由点之间的邻接关系建立起来的, 所以又称为点邻接矩阵, 类似地按图的边(或分支)的邻接关系也可以建立起边(或分支)的邻接矩阵。

(二) 图的道路矩阵

道路是有向图中的一个重要概念, 所以这里讲的道路矩阵仅是对于有向图而言的, 故称之为有向图的道路矩阵。

根据邻接矩阵的定义, 有向图 G 的邻接矩阵 $A(G)$ 的元素 a_{ij} , 实际给出了从节点 v_i 到 v_j 的长度为1的道路的数目。考察邻接矩阵 $A(G)$ 的乘幂, 用 $a_{ij}^{(k)}$ 表示 A^k 的元素, 则有 A^2 的元素 $a_{ij}^{(2)}$ 应为 $a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^m a_{ik}a_{kj}$ 。

对每一被加项 (即确定的 l)，当且仅当 a_{ii} 、 a_{ij} 的元素都等于 1，即 $v_i \text{ adj } v_i$ 且 $v_i \text{ adj } v_j$ 时， $a_{ii} \cdot a_{ij} = 1$ 。这就表明，若从 v_i 到 v_j (经过 v_i) 有一条长度为 2 的道路，作为整个和式， a_{ij} 自然就等于从 v_i 到 v_j 长度为 2 的道路的数目；同样分析， A^3 的元素 $a_{ij}^{(3)}$ ，就等于从 v_i 到 v_j 长度为 3 的道路的数目。依次类推，即可得如下结论：

设有向图 $G = (V, E)$ ， $|V| = m$ ， $A(G)$ 是图 G 的邻接矩阵，则 $A^k = (a_{ij}^{(k)})_{m \times m}$ 中的元素 $a_{ij}^{(k)}$ 的值就等于从节点 v_i 到 v_j 长度为 k 的道路的数目。

〔例 1-8〕 对于图 1-13 所示的有向图 G ，有：

$$A(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$A^2(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$A^3(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} \end{matrix}$$

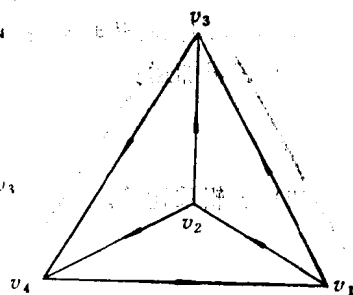
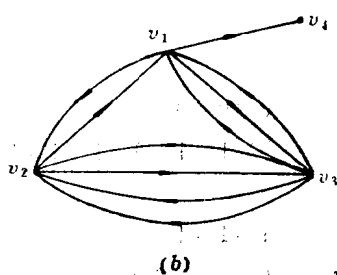
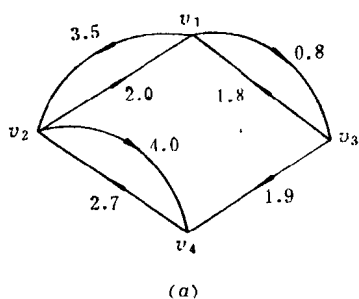


图 1-12

图 1-13

由上面的矩阵乘幂可以看出：

(1) 由 v_1 到 v_4 有两条长度为 2 的道路，即 $l_1 = \{v_1, v_2, v_4\}$ ， $l_2 = \{v_1, v_3, v_4\}$ ；

(2) 由 v_1 到 v_4 有一条长度为 3 的道路，即 $l_3 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ；

(3) 由 v_1 到 v_2 没有长度为 3 的道路。

综上所述，构造矩阵

$$D_r = (d_{ij}^{(r)}) = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^r = \sum_{k=1}^r A^k \quad (1-2)$$

其中, $d_{ij}^{(r)} = \sum_{k=1}^r a_{ij}^{(k)}$ 。其值表示由 v_i 到 v_j 长度不超过 r 的道路的数目。

对于有向图 $G = (V, E)$, $|V| = m$, 因为 G 中基本道路的长度都不超过 $m-1$, 若令 $r = m-1$, 则可将上式改写为:

$$D = (d_{ij}^{(m-1)}) = \sum_{k=1}^{m-1} A^k \quad (1-3)$$

称 D 为有向图 G 的道路矩阵。图1-13所示的有向图的道路矩阵为:

$$D = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

如果有向图 G 中, 任意两个节点 v_i, v_j 之间是可达的, 则从 v_i 到 v_j 必有长度不超过 $m-1$ 的基本道路相通, 否则就是不可达的。因此, 根据 D 矩阵的元素 d_{ij} 的值即可判断图 G 的顶点 v_i 到 v_j 的可达性, 即 $d_{ij} \neq 0$ 时, v_i 到 v_j 是可达的, 否则就是不可达的。

显然, 对于图 G 中节点间的可达性的判定, 道路矩阵 D 提供了足够的信息。它不仅指出了两个节点间是否存在道路相通, 而且还指出了不同道路的数目。

(三) 图的通路矩阵

设 $G = (V, E)$ 是一个 (m, n) 图, 称 m 阶方阵 $P(G) = (p_{ij})$ 为图 G 的通路矩阵 (即可达性矩阵)。其中:

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果从节点 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 是可达的;} \\ 0, & \text{如果从节点 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 是不可达的} \end{cases}$$

图的通路矩阵可以由邻接矩阵 A 经逻辑运算而求得。

以下介绍两种逻辑运算:

1) 逻辑加运算。

$$\begin{aligned} 0 \vee 0 &= 0 \\ 0 \vee 1 &= 1 \vee 0 = 1 \vee 1 = 1 \end{aligned}$$

2) 逻辑乘运算。

$$\begin{aligned} 1 \wedge 1 &= 1 \\ 0 \wedge 1 &= 1 \wedge 0 = 0 \wedge 0 = 0 \end{aligned}$$

设 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ 是两个元素取值为 0 或 1 的 m 阶方阵, 则:

$$1) A \vee B = C = (c_{ij})_{m \times m}$$

称为矩阵 A, B 的逻辑加。其中, $c_{ij} = \bigvee_{k=1}^m (a_{ik} \vee b_{kj})$ 。

$$2) A \wedge B = C = (c_{ij})_{m \times m}$$

称为矩阵 A, B 的逻辑乘。其中, $c_{ij} = \bigvee_{k=1}^m (a_{ik} \wedge b_{kj})$ 。

有了矩阵的逻辑运算之后, 我们用

$$\begin{aligned} A^{(2)} &= A \wedge A, \\ A^{(3)} &= A \wedge A^{(2)}, \\ &\dots\dots\dots \\ A^{(k)} &= A \wedge A^{(k-1)}, \end{aligned}$$

来表示相应的矩阵 A 的逻辑乘幂运算。

对于简单的有向图, 可以由邻接矩阵 $A(G)$ 按下式计算出通路矩阵 P , 即:

$$P = \bigvee_{k=1}^{n-1} A^{(k)} = A \vee A^{(2)} \vee A^{(3)} \vee \dots \vee A^{(n-1)} \quad (1-4)$$

[例1-9] 如图1-14所示的有向图, 求 A 、 $A^{(2)}$ 、 $A^{(3)}$ 和 P 。

解: 首先求取邻接矩阵 $A(G)$, 即:

$$A(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

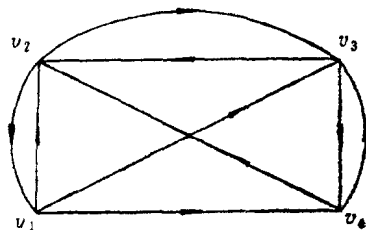


图 1-14

根据逻辑乘幂法则, 有:

$$A^{(2)} = A \wedge A = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$A^{(3)} = A \wedge A^{(2)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$P = \bigvee_{k=1}^3 A^{(k)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

对于有向图, P 矩阵还可以直接从 D 矩阵得到, 事实上, 只需令

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } d_{ij} \neq 0 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } d_{ij} = 0 \text{ 时;} \end{cases}$$

即可。

[例1-10] 求图1-14所示的有向图的 A 、 D 、 P 矩阵。

解：首先求邻接矩阵 $A(G)$ ，即：

$$A(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} \end{matrix}$$

对其进行算术运算，可得：

$$A^2 = AA = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$A^3 = AA^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$D = \sum_{k=1}^3 A^k = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 7 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 5 & 3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} \end{matrix}$$

故有：

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} \end{matrix}$$

所得通路矩阵 P 与例1-9的计算结果完全一致。

由上可见，如果已知有向图 G 的道路矩阵，则由此求通路矩阵是非常方便的。否则，由有向图的邻接矩阵求通路矩阵，将涉及大量的矩阵运算，尤其当图中点的数目较多时，运算量就更大。由于在计算邻接矩阵 A 的乘幂的过程中，需要计算出从点 v_i 到 v_j 的不同道路的数目，而在最后由 D 矩阵求取 P 矩阵时，却又得把它们去掉，这无疑给整个计算过程增加了很多不必要的计算量，因此，在有向图道路矩阵 D 未知的情况下，以采用邻接矩阵的逻辑运算求通路矩阵的方法为宜。

(四) 图的关联矩阵

一个图 $G=(V, E)$ 的邻接矩阵 $A(G)$ ，通过给出点之间的邻接关系的信息，描述了图