

~~5749~~

圆弧齿伞齿轮 加工手册



吉林人民出版社

TG61
2773

圆弧齿伞齿轮加工手册

长春第一汽车制造厂工艺处机械加工试验室编

吉林人民出版社

圆弧齿伞齿轮加工手册

长春第一汽车制造厂工艺处机械加工试验室编

*

吉林人民出版社出版 吉林省新华书店发行

长春新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米16开本 56印张 插页4个 1,180,000字

1980年10月第1版 1980年10月第1次印刷

印数：1—2,500册

书号：15091·167 定价：(精装)6.60元

内 容 简 介

本手册包括伞齿轮的一般概念、切齿原理、螺旋伞齿轮、零度伞齿轮、双曲线齿轮的有关参数计算及滚切法、半滚切法、切齿计算和机床调整资料，并介绍了与切齿有关的机床、刀具设计、刀具刃磨、齿面接触区控制等方面内容。手册中较系统地介绍了螺旋伞齿轮、零度伞齿轮、双曲线齿轮的各种加工方法的有关计算及在国内产切齿机床上的应用。手册附有刀倾刀转表和挂轮表。

本手册供从事伞齿轮制造的工人及技术人员参考。

再 版 前 言

随着我国社会主义革命和社会主义建设事业的蓬勃发展，伞齿轮日益广泛地应用于机器制造的各个行业，对伞齿轮的数量和质量提出了更高的要求。为了适应伞齿轮加工生产的需要，我们根据现在搜集到的资料，在第一版的基础上进行了重新编写。

本手册的主要对象是齿轮制造工作者，因此主要内容是圆弧伞齿轮的基本参数计算和切齿加工，对齿轮强度等方面的内容未编入手册。

由于我们的政治、技术水平不高，实践经验不多，手册中一定存在不少缺点和错误，恳切希望广大读者提出批评意见，以便今后改正。

本手册在处、室领导的关怀和支持下编写而成。在重新编写时，承蒙陕西齿轮厂副总工程师张学孟同志热心指导和审阅，并编写了第二章；其余各章由牟永言同志编写。参加校对的有胡文魁、孟凡君等同志。

长春第一汽车制造厂工艺处机械加工试验室

目 录

第一章	伞齿轮种类	(1)
第二章	切齿原理和方法	(4)
第三章	切齿机床种类、规格、用途及机床调整的主要项目	(20)
第四章	螺旋伞齿轮基本参数的计算	(30)
第五章	滚切法加工螺旋伞齿轮切齿计算	(43)
第六章	半滚切法加工螺旋伞齿轮切齿计算	(167)
第七章	零度伞齿轮基本参数及切齿机床调整计算	(277)
第八章	双曲线齿轮的基本参数计算概述	(291)
第九章	滚切法加工双曲线齿轮切齿计算	(312)
第十章	半滚切法加工双曲线齿轮切齿计算	(496)
第十一章	等高齿螺旋伞齿轮基本参数及机床调整计算	(623)
第十二章	伞齿轮检验和接触区修正	(659)
第十三章	伞齿轮毛胚的公差	(662)
第十四章	夹具	(667)
第十五章	切齿刀具	(676)

附表:

一、四轮交换齿轮表	(723)
二、传动比及倒数表	(824)
三、常数为22.5的分度交换齿轮表 (滚切法)	(867)
四、常数为22.5的分度交换齿轮表 (成形法)	(868)
五、常数为30的分度交换齿轮表	(869)
六、检查分度表	(871)
七、刀倾刀转表	(872)

第一章 伞齿轮种类

按照伞齿轮的牙齿形状来说，可分为以下四类（图1—1）：

1. 直齿伞齿轮

这是最简单的伞齿轮，它的传动速度较低，通常圆周速度不应超过300米/分或1000转/分，只适用于负荷小而稳定，噪音要求不高的传动中。但由于轴向推力及径向推力不大，因此可用滑动轴承。这样，结构比较紧凑，并且比较经济。

2. 螺旋伞齿轮

它的牙齿是曲线形的（如果是按格利森制度，则是圆弧形的），所以同时啮合的齿数要较直齿为多，这样便可传递较大的负荷，约为直齿的130%，运转平稳，同时噪音也可减小，且允许在较高的速度下工作。但因具有螺旋角（一般常用 $30^{\circ}\sim 50^{\circ}$ ），所以轴向推力较大，需用止推轴承。

3. 零度伞齿轮

当螺旋伞齿轮的螺旋角等于“零”时，就是零度伞齿轮。但是牙齿仍然保持圆弧形，所以它和直齿伞齿轮比较，可以有较多的接触齿数，也就可以传递较大的负荷，并可较平稳的工作。它和直齿伞齿轮一样，轴向推力很小，因此往往以零度伞齿轮代替直齿伞齿轮，而不增加其安装地位。

在航空、拖拉机及机床制造业中，常以零度伞齿轮代替直齿伞齿轮。

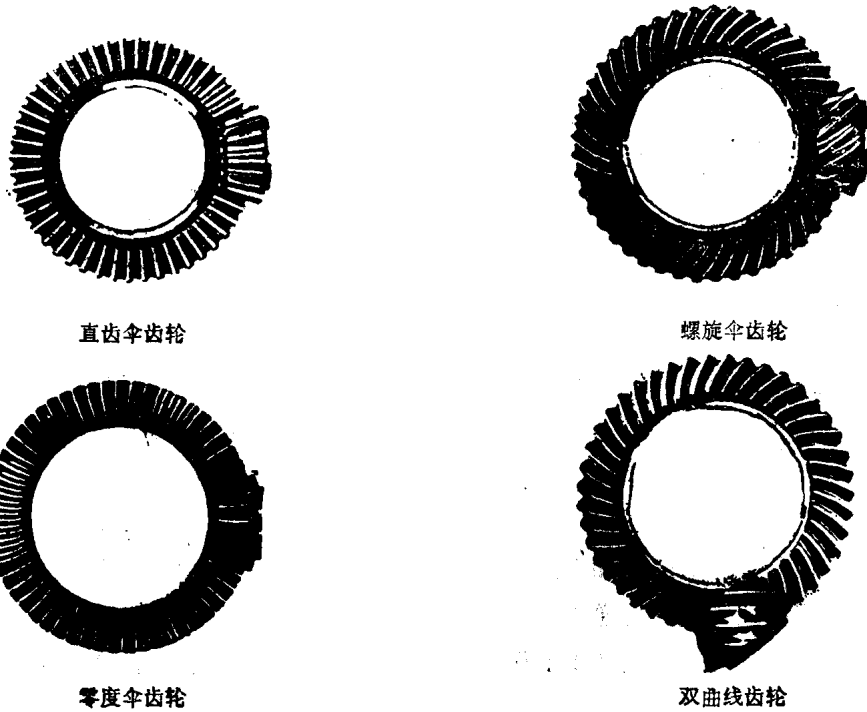
4. 双曲线齿轮

按其外形来看，它和螺旋伞齿轮没有什么区别，但是在安装位置上，大、小轮*的轴线有一个相对偏置量。因此大、小轮的螺旋角不等，而且设计上总是使小轮的螺旋角较大。因此小轮的端面模数较大轮的为大，齿轮的尺寸也就增大，也就是说小轮的强度增加。同时，接触齿数也增多，所以传递负荷能力也大，传递时很平稳，而且噪音也减小。全齿面上存在滑动，因而齿轮在运转工作时齿面磨损较均匀。这个特点对研磨齿面亦有利。

当双曲线齿轮和螺旋伞齿轮用于传递高于300米/分的圆周速度时，才能充分的显示出其优越性。当圆周速度高于1,500米/分时，应该磨齿。

由于双曲线齿轮的轴线不相交，有一个偏置量，所以在小汽车后桥减速器上广泛的采用这种齿轮，以便降低车身，使重心下降。在某些特殊条件下，如越野车可使车身提

* 成对伞齿轮齿数较多的称为大轮，齿数较少的称为小轮，以下均同此。



直齿伞齿轮

螺旋伞齿轮

零度伞齿轮

双曲线齿轮

图1-1 伞齿轮种类

高以增进汽车的通过性。双曲线齿轮也用于分度机构，以代替蜗轮传动。

按照齿长方向、齿高收缩程度，可分为以下三类：

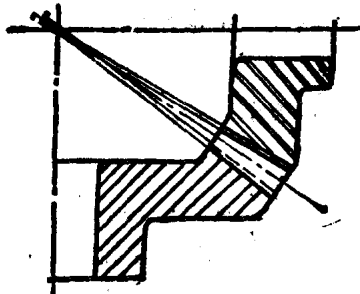


图1-2 渐缩齿螺旋伞齿轮

1. 渐缩齿螺旋伞齿轮 (图1-2)

牙齿沿齿长方向从大头向小头齿高逐渐减小，为了保证沿齿长方向有均等的齿顶间隙，通常做成齿顶平行于配对齿轮的齿根，即面锥的顶点不和节锥顶点相交。

这是目前圆弧伞齿轮中最常用的一种渐缩齿。

2. 双重收缩齿螺旋伞齿轮 (图1-3)

此种收缩齿，其根锥顶点、面锥顶点和节锥顶点三者不重合，其根锥顶点位于节锥顶点的外侧。

3. 等高齿螺旋伞齿轮 (图1-4)

牙齿的大头和小头齿高一样，即面锥、根锥、节锥角皆相等。其优点：

- 1) 刀齿的压力角等于工件的压力角，即刀盘的刀号等于零，因此刀具数量可以大大减少。
- 2) 机床调整简单，计算方便。
- 3) 刀具计算简单。
- 4) 加工出来的工件精度较高。

等高齿的最大缺点是牙齿小头容易根切和变尖，设计不当时会使牙齿强度降低。

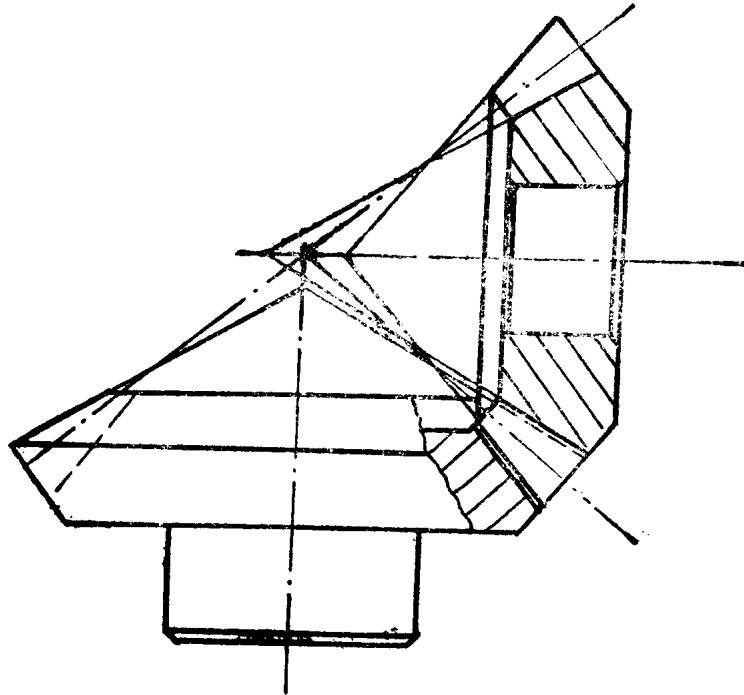


图1-3 双重收缩齿螺旋伞齿轮

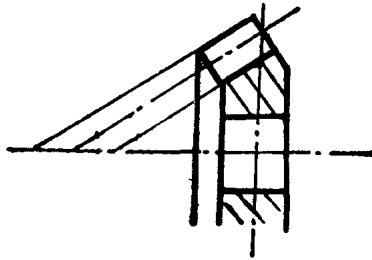


图1-4 等高齿螺旋伞齿轮

一般大、小轮皆采用滚切法加工，在大量生产中为提高生产率多采用仿形齿（半滚切）伞齿轮，其特点：

螺旋伞齿轮，零度伞齿轮和双曲线齿轮，当它们的传动比较大时，大轮的齿廓形状接近于直线，因此可以用直线形齿廓来代替。这样一来，小轮的齿廓形状则应加以相应的修正。仿形齿伞齿轮对的大轮，是用仿形法切出的（即切齿时机床的摇台不摆动），所切出的齿廓形状和刀刃形状相同。

这种齿轮主要在大量和大批生产中采用，一般都用特种机床（如格利森№22，№11等）切削大轮。

大轮的牙齿精切是用弧拉刀盘，使精切工序的生产率大大提高，工件质量也好，但机床调整计算比较复杂。弧拉刀盘制造较困难，只有当传动比大于2.5或大轮节锥角大于 70° 时使用。

第二章 切齿原理和方法

伞齿轮的啮合概念，特别是有关冠轮和产形齿轮的概念，是切齿原理和机床调整计算的理论基础，螺旋伞齿轮可以看成是把直齿伞齿轮的牙齿切成无限小的齿面宽，再把它们做相对位移而成弧形齿。因此，研究螺旋伞齿轮应从了解直齿伞齿轮入手。应该指出，伞齿轮的啮合原理和圆柱齿轮有很多相似之处。

共 轲 齿 面

一个齿面被另一个齿面在一定的相对运动条件下展成或包络而成，这两个齿面就互相共轲。因此，如果一个齿轮的牙齿是刚性的坚硬材料，和另一个塑性材料的齿坯相啮合，在一个固定的速比条件下旋转，后者所形成的齿面将与前者共轲。

当两个共轲齿面相接触的瞬间，所有接触点将形成一条接触线。在任一接触点上，两个齿面都有一条公法线，并且它们的相对法向速度等于零。这是齿轮牙齿啮合的基本条件。据此，我们可以计算出接触点。相对切向速度为齿面滑移速度。当齿轮继续运转时，接触线在固定空间的轨迹将形成一个面，叫做啮合面或作用面。

齿 形 啮 合 的 基 本 定 律

两个齿轮以固定的角速比传动，则它们的齿面不论在何位置啮合，通过其啮合点的公法线都必须通过一个定点——节点。

节 锥

对于轴线相交的伞齿轮副，它们的啮合运转，可由两个相切的锥体来表示。当它们运转时，沿此锥面只有纯滚动而无相对滑动。这两个锥体叫节锥，它们相切的公切线叫节线。从相对运动来讲，此节线就是两个齿轮的相对运动的瞬时轴线。一对伞齿轮的轴线和相对运动的瞬时轴线，都位于轴向平面之内，并且交于节锥顶点。过节线与节锥相切的平面，叫节平面。当两个齿轮啮合运转时，节锥将在节平面上纯滚动。伞齿轮的节平面是一个以节锥距为半径的圆。如图2—1所示。

伞齿轮的节锥面具有下列重要特性：

1. 一对伞齿轮在运转中，在其节锥面上只有纯滚动而无相对滑动；
2. 节线就是相对运动的瞬时轴线；

3. 两个齿面在任一点相啮合，其公法线与节线相交；

4. 节线就是两个啮合面的交线。

应当注意，对于交错轴的齿轮副，没有节面。因为他们不同时具备上述四条特性。对于蜗轮副和双曲线齿轮，人们常常给出节圆和节锥，这只是为了讨论问题方便，而不是真正的节面。

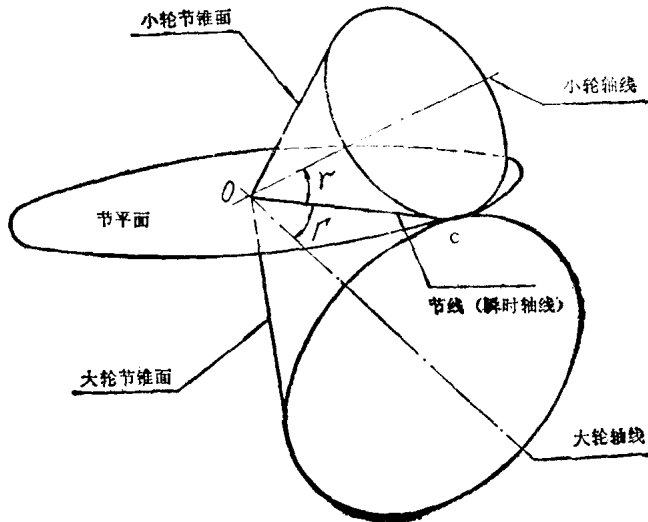


图2-1 伞齿轮节面

基锥和球面渐开线

由于圆柱齿轮的齿形多为渐开线，人们就考虑采用渐开线齿形的伞齿轮。虽然因为这种齿形很难加工，一直没有在实际中使用，但它是研究啮合原理的基础。以后介绍的，现在实用的8字啮合齿形伞齿轮，就是在渐开线齿形的理论上发展起来的。

和圆柱齿轮相仿，直齿伞齿轮渐开线齿形的展成，是由一个切于圆锥的平面I，当它在锥面上做无滑动地滚动时，在原始位置I平面和锥面的接触线为直线 OG_0 ，叫母线，当I平面纯滚动一个角度 ψ_0 后，母线 OG_0 所经过的空间轨迹 G_0G' 叫圆锥渐开面。它是直齿伞齿轮的理论齿形面。

我们称这个锥面体为基锥，平面I叫产形面，如图2-2所示。显然，当基锥在一个平面I上纯滚动时，将形成一个以基锥顶点O为中心，以基锥距 $OG_0 = A_b$ 为半径的圆。曲线 G_0G' 是在以O点为球心，以 A_b 为半径的球面上，所以叫球面渐开线。它是理论的伞齿轮齿形。它的表达式为：

$$\begin{aligned} x &= A_b (\sin \psi \cos \varphi_0 + \cos \psi \cos \varphi_0 \sin \delta) \\ y &= A_b (\cos \psi \sin \varphi_0 \sin \delta - \sin \psi \cos \varphi_0) \\ z &= A_b \cdot c \cdot \psi \cos \delta \end{aligned}$$

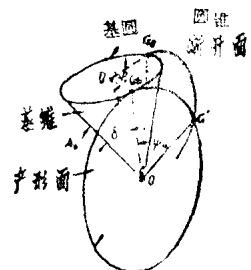


图 2-2

压力角和基锥角

当产形面 I 处于通过节线的位置时，成为伞齿轮副的啮合面，显然它也是两个共轭齿面的公法面。换句话说，啮合面同时切于一对伞齿轮的两个基锥而且包含节线。啮合面和节平面的夹角为压力角。压力角 ϕ 、节锥角 γ 和基锥角 δ 之间的关系式为：

$$\sin \delta = \sin \gamma \cos \phi$$

图2—3表示一对伞齿轮的啮合情况。两个节锥的节线为 OC_0 ， P 平面为啮合面，它是通过球心的大圆。基锥底圆称基圆，节锥底圆称节圆，它们都是同一球面上的小圆。当两个节锥纯滚动时，它们的节圆也在球面上纯滚动。

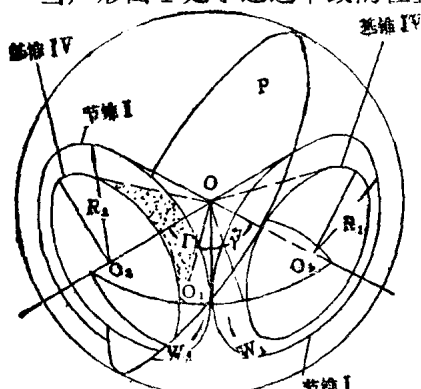


图2—3 直齿伞齿轮啮合原理

产形齿轮

当伞齿轮的节锥角等于 90° 时，叫做冠轮（平面齿轮）。这时，节锥面变成一个平面。当伞齿轮和冠轮啮合运转时，伞齿轮的节锥在冠轮的节平面上绕节锥顶纯滚动。这与圆柱齿轮和齿条的啮合情况相似。

当两个伞齿轮都与一个冠轮共轭时，此二齿轮必然彼此共轭。人们把齿条和冠轮通称为“基本齿轮”。“基本齿轮”是大部分齿轮展切成形的基础。在某些情况下，“基本齿轮”可能不是齿条或冠轮，而是与被切齿轮相啮合的齿轮。但他们所包含的原理是相同的。

一个“基本齿轮”如它的牙齿插到另一个“基本齿轮”的齿间之内，可以完全无间隙吻合。后者齿间形状和前者牙齿形状完全相同，则称这两个“基本齿轮”是互补的。因此，有互补的冠轮和互补的齿条，如图2—4所示。

两个分别同互补的“基本齿轮”相共轭的齿轮，它们将彼此共轭。所以，如果图

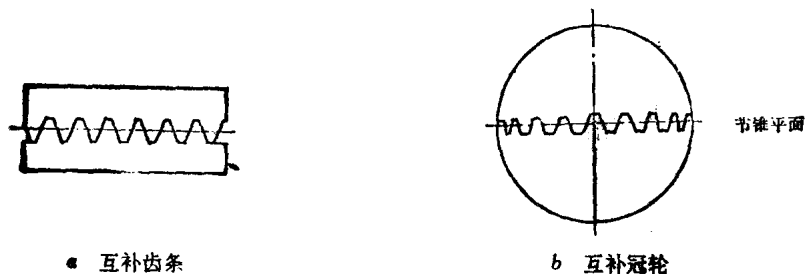


图2—4 互补齿条和互补冠轮

2—5的齿轮 a 与冠轮 A 共轭，齿轮 b 与冠轮 B 共轭，则齿轮 a 和齿轮 b 将共轭。这就是伞齿轮滚切（或称展切）的基本原理。我们称互补的“基本齿轮”为产形齿轮。产形齿轮的牙齿，在切齿机床中，由运动中的刀具形成。

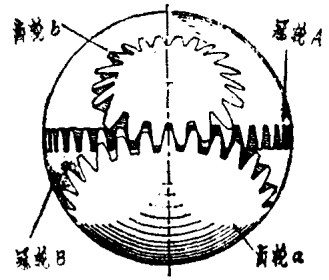


图2—5 共轭齿轮形成原理

渐开线产形齿轮

渐开线齿形冠轮是研究切齿原理的基础。在前面介绍球面渐开线时，已知这种齿形为球面啮合。当了解它的啮合特性时，应在球面上进行。对于冠轮，从前述公式： $\sin \delta = \sin \gamma \cos \phi$ 中，因节锥角 $\gamma = 90^\circ$ ，可以求出基锥角 $\delta = 90^\circ - \phi$ 。所以，对于压力角为 20° 标准值的冠轮，其基锥角 δ 将等于 70° 。两个互补的冠轮 A 和 B 的基锥将为 $I'OJ'$ 和 IOJ ，它们的基圆为球面上两个小圆 IJ 和 $I'J'$ ，如图2—6所示。大圆 II' 为切于两个基锥的一个平面。

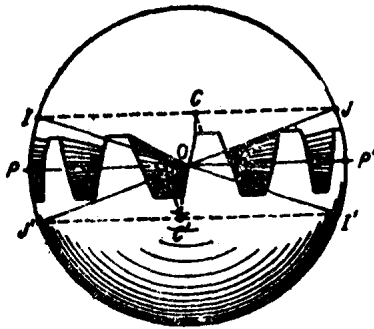


图2—6 渐开线冠轮

因为此平面通过节线，而且它是展开齿形的产形面，所以，它就是冠轮啮合的啮合面。冠轮的节锥平面为大圆 PP' ，它和两个基圆平面 IJ 和 $I'J'$ 平行。前已说明，啮合面和节平面的夹角为压力角。对于冠轮，切于两个节锥并包含瞬时轴线的节平面（如图2—1所示）和节锥平面 PP' 重合，因此， IOI' 圆所在的平面和 POP' 圆所在的平面的夹角 $I'OP'$ 角，就是冠轮的压力角。在图2—6内， II' 为球面投影到平面上的直线，它相当于渐开线圆柱齿轮的啮合线。渐开线冠轮的啮合线为球面上大圆线段。球面渐开线是由大圆上的一个点开始，当大圆在两个基圆上纯滚动时在球面上所形成的轨迹。在图2—6内，当大圆 II' 在基圆 IJ 和 $I'J'$ 上纯滚动时，在大圆上一点 O ，将描出球面渐开线 COC' 来，对于冠轮，它将是一条球面上的 S 形曲线。这种齿形，实际上很难加工出来，因为这需要一个尖点的刀具来切削，这种刀具实际上很难保持。但根据计算，这种齿形和直线相差很小，因此就考虑用直边冠轮以代替球面渐开线冠轮来滚切齿形。因为直边刀具容易制造。但这种冠轮的齿形和它滚切出来的齿形，将不是球面渐开线，它们的啮合也不是渐开线啮合，而是8字形啮合。通常叫它为8字形啮合伞齿轮。

由直边刀具滚切出来的齿形是一种包络曲面，叫8字形齿 (octoid teeth)。这是因为这种冠轮的啮合接触轨迹，在球面上呈8字形。下面就介绍这种轨迹。

直边冠轮的接触轨迹

为了方便起见，首先介绍滚切直齿伞齿轮的直边冠轮的接触轨迹。图2—7表示直边冠轮和直齿伞齿轮的啮合情况。 P 平面为冠轮的节锥平面，即图2—6中的 PP' 圆。

平面为直边刀具运动形成的平面（即冠轮直边齿面），相当于图2—6中的 COC' 所在的面。它在球面的形状为大圆，如图2—8，它与被包络的齿面相切。

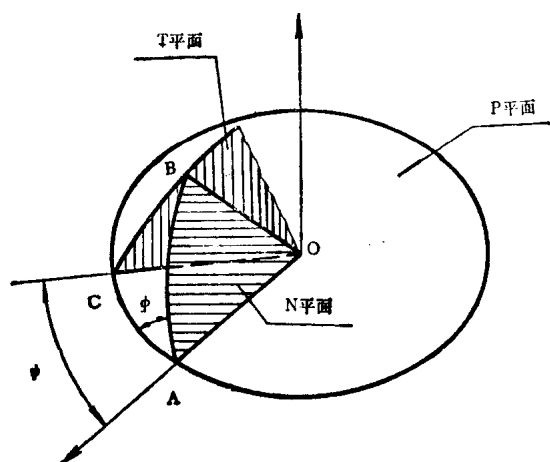


图2—7 直边冠轮和直齿伞齿轮啮合

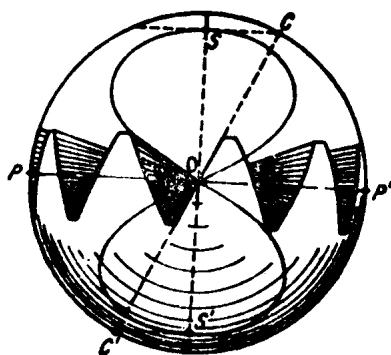


图2—8 直边冠轮

N 平面为过节线 OA 的公法面，它相当于图2—6中的 IOI' 圆。当节锥 A 在节锥平面 P 上纯滚动时，刀具往复运动（过球心 O ）包络出齿面来，根据齿面共轭原理，两个齿面接触时，只有一个过接触点并包含节线的公法面，它和节平面的夹角为压力角 ϕ 。当节锥转过 ψ 角后，刀刃面 T 和齿面的接触线是在平面 N 和 T 的交线 OB 上。因此求出 T 平面和 N 平面的方程式，并联立求解，就是直边冠轮的接触轨迹方程。如下式：

$$x = \frac{\sin \psi \cos \psi \cot^2 \phi}{1 + \cot^2 \phi \cos^2 \psi} A_b$$

$$y = \frac{\sin \psi \cot \phi}{1 + \cot^2 \phi \cos \psi} A_b$$

A_b = 球半径

ϕ = 压力角

ψ = 节锥 A 在冠轮节平面上转过的角度

x = 接触轨迹投影横座标

y = 接触轨迹投影纵座标

当将 $\psi = 0^\circ$ 到 90° 的值代入上式， ϕ 和 A_b 为已知值，即可求出第一象限内接触轨迹的球面投影曲线。其他三个象限完全相同。

例如：当 $A_b = 76.2$ 毫米， $\phi = 14.5^\circ$ 时，接触轨迹在第一象限的投影数值为下表，它的图形如图 2—8，为 8 字形。在节点垂直于齿形线并切于两个极圆 S 和 S' 。

ψ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
x	0.00	18.21	34.9	48.26	55.88	49.79	0.00
y	0.00	4.88	10.41	17.78	28.96	49.78	73.66

直边平顶冠轮

当伞齿轮的面锥角等于 90° 时（节锥角不等于 90° ），即其面锥变成一个平面时称为平顶冠轮（平顶齿轮）。直边齿形的平顶冠轮，叫直边平顶冠轮。它是目前加工伞齿轮最常用的方法。

直边平顶冠轮的接触轨迹：对于切削收缩齿，刀子运动的方向必须沿着根锥方向，所以直边冠轮和工件轴线的夹角 Σ 就不能等于 $90^\circ + \gamma$ ， γ = 工件节锥角，而必须 $\Sigma = 90^\circ - \Delta + \gamma$ ， Δ 为工件齿根角。为了保持工件的节锥不变，就必须采用平顶冠轮来滚切齿形。如图2—9所示。

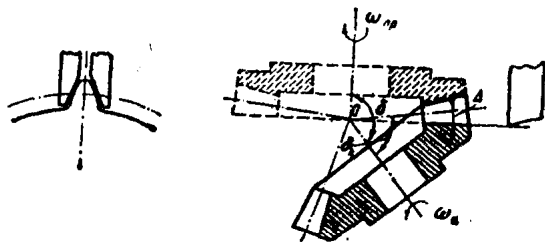


图2—9 直边平顶冠轮

直边平顶冠轮和工件啮合情况，如图2—10所示。 F 平面为平顶冠轮的面锥平面。 OP 为节线，即工件节锥和冠轮节锥相切的线。 T 平面为刀刃平面， N 为过节线的公法面。按前述包络原理，可以求出直边平顶冠轮的接触轨迹方程式来，如下式：

$$y = \frac{\cos \psi \cot \phi (\cos \Delta \sin \psi \cot \phi - \sin \Delta)}{(\cos \Delta + \sin \psi \cot \phi \sin \Delta)^2 + \cos^2 \psi \cot^2 \phi} A_0$$

$$x = y \frac{\tan \phi}{\cos \psi} (\cos \Delta + \sin \psi \cot \phi \sin \Delta)$$

例如：伞齿轮齿数 $N = 20$ ，模数 $m = 10$ ，节锥角 $\gamma = 45^\circ$ ，压力角 $\phi = 20^\circ$ ，可以求出外锥距 $A_0 = \frac{mN}{2\sin\gamma} = 141,443$ 毫米， $\tan \Delta = \frac{1.2m}{A_0}$ 代入上式，并代入 $90^\circ \geq \psi \geq -90^\circ$ 的值，可以求出下表数值，并描出图2—11的8字形接触轨迹投影图形来。

ψ	90°	80°	70°	60°	50°	40°	30°	20°	10°	0°
x	305.3	261.7	181.2	117.1	74.3	47.26	22.29	16.56	6.82	-1.39
y	0	101.9	140.1	134.3	111.7	86.82	62.62	39.74	17.79	-3.85
ψ	-10°	-20°	-30°	-40°	-50°	-60°	-70°	-80°	-90°	
x	-9.19	-17.62	-28.11	-42.92	-66.65	-109.6	-196.5	-369.6	-522.3	
y	-26.01	-49.65	-75.93	-106.6	-143.8	-189.3	-237.2	-229.6	0	

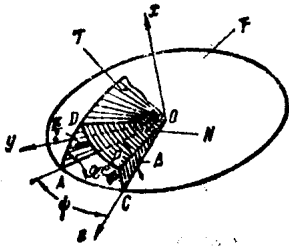


图2—10 直边平顶冠轮和工件啮合

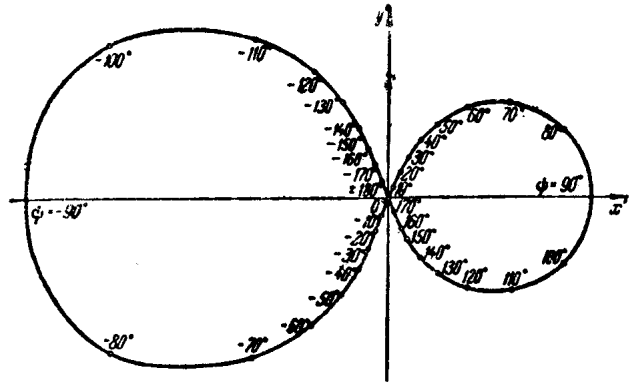


图2—11 “8”字形接触轨迹投影图

滚切螺旋伞齿轮的直边平顶冠轮

螺旋伞齿轮和零度伞齿轮也是采用直边平顶冠轮的原理滚切出来的。冠轮的牙齿为锥面体。用圆盘形铣刀，刀盘切刃旋转时形成锥面。和直齿伞齿轮的切齿情况相同，刀轴必须垂直于被切齿轮的根锥，而不是垂直于节锥，即冠轮的轴线和工件的轴线之夹角为 $\Sigma = 90^\circ + (\gamma - \angle)$ ， $\gamma =$ 工件节锥角， $\angle =$ 工件齿根角。因此，所采用的冠轮，也必须是平顶冠轮。由于切削大轮和切削小轮的刀轴，必须分别垂直于它们的根锥线 AB 和 $A'B'$ ，所以在齿轮的轴向截面内，这两把刀子并不重合，如图 2—12 所示。因此，所切出的大轮和小轮，在啮合时，齿面就不是共轭，接触印痕是对角线形。另外切出的牙齿也是倾斜的，不对称的。为了解决上述问题，除进行压力角的修正(即所谓刀号)外，还必须对机床调整计算进行大量修正和试切。

格利森制(收缩齿制)螺旋伞齿轮的切齿调整计算之所以非常复杂，主要是这个原因。等高齿弧齿伞齿轮的切齿，由于切削大轮和切削小轮的刀盘完全重合，因此，既无刀号问题，也无对角接触问题。所以，切齿计算既简单又精确，可以不需试切。

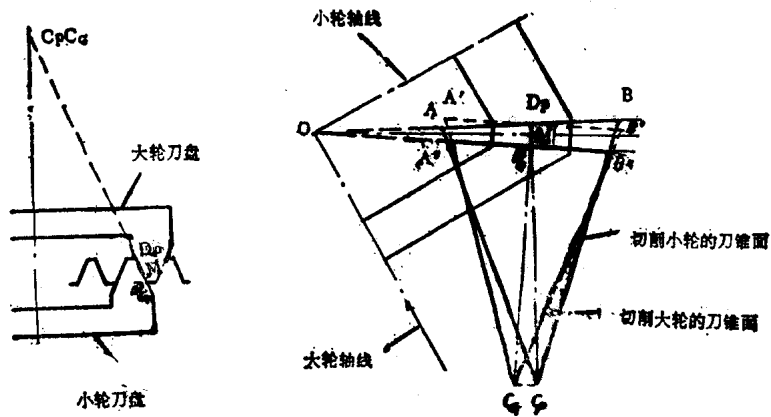


图2—12 直边平顶冠轮滚切螺旋伞齿轮刀盘轴线位置

下面介绍的切削螺旋伞齿轮的直边平顶冠轮的接触轨迹也是8字形。图2-13中，a图为冠轮面锥平面的投影视图， O 为冠轮中心， O_0 为刀盘中心， M 为牙齿中点， b_0 为刀位， $O_0M = r_c$ 为刀盘半径。

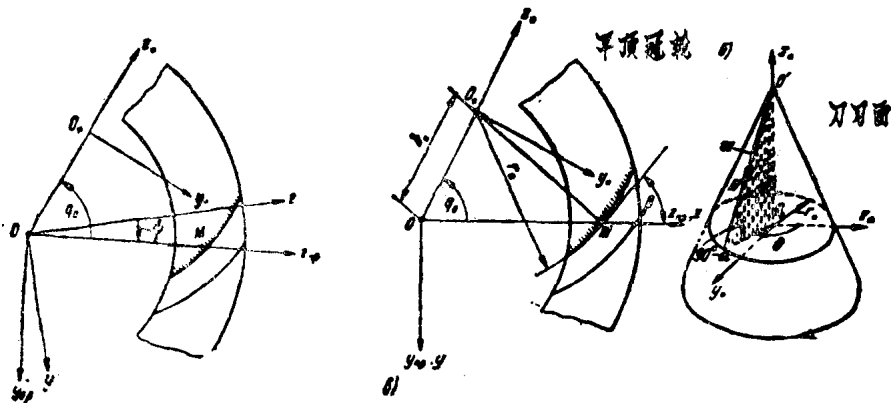


图 2-13

设冠轮齿面上一点 N ，矢量 $U = \vec{N}$ ，如b图。静坐标系 $O-x, y, z$ 和冠轮联系在一起的动坐标系 O_u-x_u, y_u, z_u 和 $O-x_{np}, y_{np}, z_{np}$ 。坐标系 $O-x_{np}, y_{np}, z_{np}$ 的位置和静坐标系 $O-x, y, z$ 相差 ψ 角。当 $\psi = 0$ 时为原始位置。在动坐标系 O_u-x_u, y_u, z_u 中，冠轮齿面方程式为（图2-13）：

$$\begin{cases} x_u = r_c \cot \phi - u \cos \phi \\ y_u = u \sin \phi \sin \theta \\ z_u = u \sin \phi \cos \theta \end{cases}$$

将上式转换到静坐标系中去，并按前述的方法求出冠轮齿面和工件齿面接触时的法线方程式，联立求解，即可求出螺旋伞齿轮的冠轮接触轨迹方程式：

$$\begin{cases} x = r_c \cot \phi - u \cos \phi \\ y = u \sin \phi \sin[\theta - (q_0 - \psi)] - S \sin(q_0 - \psi) \\ z = u \sin \phi \cos[\theta - (q_0 - \psi)] + S \cos(q_0 - \psi) \\ S \sin(q_0 - \psi) \sin \phi + (r_c \cot \phi \cos \phi - u) \sin[\theta - (q_0 - \psi)] = 0 \end{cases}$$

在垂直于坐标轴 OZ 上，取 $Z = A_0$ 做截面，即球面的投影，将 ψ 角从 0° 到 $\pm 180^\circ$ 取值，即可求出冠轮接触轨迹在 xy 平面上的投影图形。

例如：已知 $Z = A_0 = 100$ 毫米， $\phi = 20^\circ$ ，螺旋角 $\beta = 30^\circ$ ， $r_c = 75$ 毫米， $q_0 = 46^\circ 06'$ ， $b_0 = 90.14$ 毫米，取 $\psi = 0^\circ$ 到 $\pm 180^\circ$ ，可以求出下表数值。轨迹投影如图2-14，亦为8字形。应该指出，啮合线有效作用部分是经过坐标中心（经过节点）的附近的线段，即 ψ 接近于零的曲线之段。