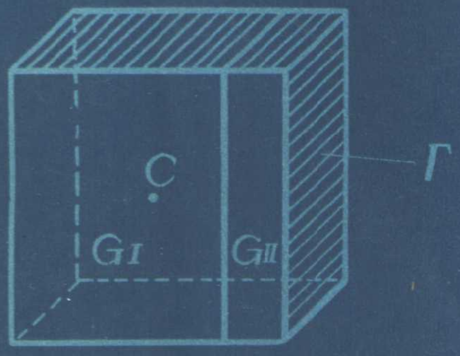
YOU XIAN DAN YUAN FA
JI CHENG XU SHI LI



李嘉珩 编

有限单元法及程序实例

人民铁道出版社

有限单元法及程序实例
李 嘉 珩 编
人民铁道出版社出版
责任编辑 杨宾华
封面设计 吴文渊
新华书店北京发行所发行
各 地 新 华 书 店 经 售
人民铁道出版社印刷厂印
开本：787×1092 $\frac{1}{16}$ 印张：17.25 字数：429千
1 9 7 9年4月 第1版 1 9 7 9年4月 第1次印刷
印数：0001—15,300册
统一书号：15043·5117 定价：1.80元

序

随着电子数字计算机的普及，用计算机进行结构分析的有限单元法，在机械设计中得到广泛采用，它是一种迅速而准确地分析结构强度和刚度等问题的工程计算方法。

有限单元法是将要分析的结构理想化为有限个单元的组合体，好比房屋由砖瓦组成，通过力学基本方程最后导出关于节点位移（或力）的一组线性代数方程式，这是传统结构计算所不及的。我们知道，材料力学只能计算几种典型构件，弹性力学需要求解偏微分方程组，而有限单元法解的是一组线性代数方程，解题步骤及运算过程简单，无论结构的形状和约束如何复杂，无论载荷如何变化，均一概适用，因此便于工程技术人员接受和采用。对一些欠缺弹性力学知识的机械设计者来说，过去认为相当困难的结构计算问题，现在已成为相当方便的事情，如计算柴油机主轴承盖时，按照材料力学公式显然不行，用弹性力学方法也有困难，只好借用实验应力分析手段，然而，采用有限单元法，将此结构分割成243个三角形单元，由147个节点联系着的组合体，用709电子计算机运算，仅十分钟就能算出主轴承盖的变形和应力值。

使用有限单元法不仅可对已有的结构进行校核计算，更重要的是为结构设计的早期阶段提供了一条多快好省的途径，即在“早期设计阶段”提出多种方案，通过迅速而准确地有限单元法计算选择优者，在此基础上再进行试制实验工作，从而减少了盲目性，缩短了设计周期。

由于有限单元法具有简单适用的特点，因此在结构计算中得到了异常迅速的普及和应用。当然，不能说学习这种方法就毫无困难了，要想掌握有限单元法不仅需要熟悉材料力学，而且需要具有矩阵运算、弹性力学基本方程和电子计算机的算法语言等预备知识。本书是在大连机车车辆厂和大连铁道学院用的讲义的基础上经过修改补充编成的，以材料力学为基础对有限单元法的基本原理、平面问题、空间问题、轴对称问题及稳定温度场的计算作了介绍；对选编的计算程序也作了详细解说，并以柴油机的零部件为实例，说明程序所要求的输入数据的填写方式。

本书在编写过程中，曾得到大连机车车辆厂叶岚同志和铁道部科学研究院吴章江等同志帮助，在此深表谢意。由于编者水平所限，书中难免存在一些缺点和错误，希望读者批评指正。

编　　者

1978.7.27

目 录

第一章　矩阵及运算

第一节　矩　　阵

有限单元法的概念是用矩阵来表示的，其运算又是用矩阵来进行的，而且使用矩阵方法编写电子计算机程序很方便，因此首先介绍有关的矩阵知识。有限单元法也称为结构分析的矩阵方法。

一、矩阵的符号和意义

矩阵这个概念也是从实践中产生的，例如某工厂柴油机几个主要零部件在一月份的生产进度如表1—1所示。

表1—1

车　　间	曲　轴（个）	连　杆（个）	活　塞（个）	增压器（个）
铸造车间	12	0	220	0
锻工车间	0	201	0	0
机械车间	8	196	200	10

在数学上把按一定次序排列的数表称为矩阵，表1—1即是按一定次序排列的一组数表，因此可以用矩阵［A］表示：

$$[A]=\begin{pmatrix} 12 & 0 & 220 & 0 \\ 0 & 201 & 0 & 0 \\ 8 & 196 & 200 & 10 \end{pmatrix} \tag{1—1}$$

式（1—1）称为三行四列矩阵，用符号［A］表示，显然矩阵［A］是由 3×4 个数组成。

一般来说，由 $m\times n$ 个数按一定次序排列成 m 行 n 列的数表称为 m 行 n 列矩阵，用通式表示为：

$$[A]=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1j}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2j}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots a_{ij}\cdots a_{in} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mj}\cdots a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1—2}$$

其中 a_{ij}（$i=1、2、\cdots、m$，$j=1、2、\cdots、n$）叫矩阵［A］的元素。在矩阵（1—1）

中，$m=3$，$n=4$，当$i=1$、$j=1$时，$a_{11}=12$，当$i=1$，$j=2$时，$a_{12}=0$等等。在算法语言中，矩阵（1－2）又称为二维数组，用$A[1:m, 1:n]$表示。

二、常用的特殊矩阵

1. 当$m=n$时，矩阵$[A]$称为n阶方阵，用通式表示为：

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1j}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2j}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots a_{ij}\cdots a_{in} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nj}\cdots a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1－3}$$

例如二阶方阵

$$[A]=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

又如，平面应力弹性矩阵是三阶方阵

$$[D]=\begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \tag{1－4}$$

2. 当$n=1$时，矩阵（1－2）有m行，但只有一列，其形式：

$$[A]=\{A\}=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \tag{1－5}$$

式（1－5）称为m维列矩阵，或称m维列向量。在有限单元法里，列向量具有重要作用，为区别一般矩阵，我们用符号$\{A\}$表示，例如在平面应力分析中，三角形单元的节点位移可用一个列向量表示，其形式为：

$$\{\delta\}=\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{bmatrix} \tag{1－6}$$

式（1—6）称为六维列向量，其中u_i，v_i，…，v_m六个元素称为列向量$\{\delta\}$的分量。

3．当$m=1$时，矩阵（1—2）只有一行，其形式为：

$$[A]=[a_{11}a_{12}\cdots a_{1j}\cdots a_{1n}] \qquad (1-7)$$

式（1—7）称为n维行矩阵，或称为n维行向量。

4．对角线矩阵

方阵（1—3）中，除了对角线上元素外，其余元素皆为零，称为对角线矩阵，其形式为：

$$[A]=\begin{pmatrix} a_{11} & & & & 0 \\ & a_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_{ii} & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (1-8)$$

即a_{ij}（$i \neq j$时）都等于零，例如三阶对角线矩阵：

$$[A]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

又如二阶对角线矩阵：

$$[A]=\begin{pmatrix} N_i(x, \ y) & 0 \\ 0 & N_i(x, \ y) \end{pmatrix} \qquad (1-9)$$

式中　元素$N_i(x, \ y)$为一个函数表达式。

5．单位矩阵

在对角线矩阵（1—8）中，当$a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{ii}=\cdots=a_{nn}=1$时，则称为$n$阶单位矩阵，记作$[I]$，例如二阶单位矩阵

$$[I]=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1-10)$$

6．对称矩阵

对称矩阵是其元素对称于对角线的方阵，因此，如果方阵$[A]$是对称矩阵，则$a_{ij}=a_{ji}$。后面我们将碰到的三角形单元E的刚度矩阵$[K]^e$，就是一个六阶对称矩阵，总体结构的刚度矩阵$[K]$，也是对称矩阵。

7．上三角阵

方阵（1—3）中，如果主对角线以下各元素均为零，而包括主对角线以上的各元素不全为零，则称为上三角阵，如：

$$[A]=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [A]=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

8. 下三角阵

方阵（1－3）中，如果主对角线以上各元素均为零，而包括主对角线以下的各元素不全为零，则称为下三角阵，如：

$$[A]=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 0\\ 3 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

$$[A]=\begin{bmatrix}a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \ddots & 0\\ \vdots & \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

9. 矩阵分块、子矩阵

可以用水平线和垂直线将矩阵（1－2）中的元素的行、列分成更小的矩阵，即子矩阵，那么原来的矩阵就可以用这些小矩阵——子矩阵来表示，例如：

$$[B]=\left(\begin{array}{cc:cc:cc}b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0\\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m\\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m\end{array}\right) \tag{1—11}$$

虚线把矩阵$[B]$分成三块即：

$$[B_i]=\begin{pmatrix}b_i & 0\\ 0 & c_i\\ c_i & b_i\end{pmatrix},\quad [B_j]=\begin{pmatrix}b_j & 0\\ 0 & c_j\\ c_j & b_j\end{pmatrix},\quad [B_m]=\begin{pmatrix}b_m & 0\\ 0 & c_m\\ c_m & b_m\end{pmatrix}.$$

所以矩阵（1－11）又可写成：

$$[B]=[\,[B_i]\quad[B_j]\quad[B_m]\,]$$

其中 $[B_i]$, $[B_j]$, $[B_m]$称为矩阵$[B]$的子矩阵。又如，三角形单元的刚度矩阵$[K]^e$可写成子矩阵形式：

$$[K]^e=\left(\begin{array}{cc:cc:cc}k^e_{11} & k^e_{12} & k^e_{13} & k^e_{14} & k^e_{15} & k^e_{16}\\ k^e_{21} & k^e_{22} & k^e_{23} & k^e_{24} & k^e_{25} & k^e_{26}\\ \hdashline k^e_{31} & k^e_{32} & k^e_{33} & k^e_{34} & k^e_{35} & k^e_{36}\\ k^e_{41} & k^e_{42} & k^e_{43} & k^e_{44} & k^e_{45} & k^e_{46}\\ \hdashline k^e_{51} & k^e_{52} & k^e_{53} & k^e_{54} & k^e_{55} & k^e_{56}\\ k^e_{61} & k^e_{62} & k^e_{63} & k^e_{64} & k^e_{65} & k^e_{66}\end{array}\right)$$

$$=\begin{pmatrix} [K_{11}]^e & [K_{12}]^e & [K_{13}]^e \\ [K_{21}]^e & [K_{22}]^e & [K_{23}]^e \\ [K_{31}]^e & [K_{32}]^e & [K_{33}]^e \end{pmatrix} \qquad (1-12)$$

式中 $[K_{11}]^e=\begin{pmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e \\ k_{21}^e & k_{22}^e \end{pmatrix}$； $[K_{12}]^e=\begin{pmatrix} k_{13}^e & k_{14}^e \\ k_{23}^e & k_{24}^e \end{pmatrix}$等是$[K]^e$的九个子矩阵。

三、矩阵的转置

把矩阵$[A]$的行转换成列，列转换成行，称为矩阵$[A]$的转置，例如矩阵

$$[A]=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$ 它的转置矩阵是

$$[A]^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix}$$

又如列矩阵为

$$\{\sigma\}=\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \qquad (1-13)$$

它的转置行矩阵是

$$\{\sigma\}^T=[\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}] \qquad (1-13)$$

又如矩阵

$$[B]=\begin{pmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{pmatrix} \qquad (1-14)$$

它的转置矩阵是

$$[B]^T=\begin{pmatrix} b_i & 0 & c_i \\ 0 & c_i & b_i \\ b_j & 0 & c_j \\ 0 & c_j & b_j \\ b_m & 0 & c_m \\ 0 & c_m & b_m \end{pmatrix} \qquad (1-14)$$

矩阵

$$[B]=[\,[B_i] \quad [B_j] \quad [B_m]\,]$$

的转置矩阵是

$$[B]^T=\begin{pmatrix} [B_i]^T \\ [B_j]^T \\ [B_m]^T \end{pmatrix}$$

这里的$[B_i]^T$是$[B_i]$的转置矩阵，即

$$[B_i]^T=\begin{pmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} b_i & 0 & c_i \\ 0 & c_i & b_i \end{pmatrix}$$

同理，$[B_j]^T$和$[B_m]^T$也是$[B_j]$和$[B_m]$的转置矩阵。

如果$[A]$是对称矩阵，则：

$$[A]^T=[A] \qquad (1-15)$$

第二节 矩 阵 运 算

一、矩阵相等

一个m行n列矩阵$[A]$与另一个m行n列矩阵$[B]$，其对应元素相等，即$a_{ij}=b_{ij}$($i=1$，2，……，m，$j=1$，2，……，n)，则称这两个矩阵相等，即：

$$[A]=[B]$$

由此可见，两个矩阵是否相等，必须满足两个条件，一是两个矩阵必须具有相同的行和列；二是两个矩阵的对应元素相等，例如为了比较两个工厂一月份柴油机生产进度，若矩阵（1—1）中的矩阵$[A]$代表甲厂，那么在统计乙厂时，也应以曲轴、连杆、活塞和增压器为对象，以铸造、锻工和机械三个车间为基地，才具有比较意义。如果乙厂在一月份柴油机主要零部件产量如表1—2所示。

表1—2

	曲　　轴	连　　杆	活　　塞	增　压　器
铸造车间	12	0	220	0
锻工车间	0	201	0	0
机械车间	8	196	200	10

表1—2的矩阵为

$$[B]=\begin{pmatrix}12 & 0 & 220 & 0\\ 0 & 201 & 0 & 0\\ 8 & 196 & 200 & 10\end{pmatrix} \qquad (1-16)$$

显然矩阵$[A]$与矩阵$[B]$满足上述两个条件，因此相等，这就说明甲乙两厂，在一月份柴油机主要零部件的生产进度一样。如果乙厂的铸造车间比甲厂的铸造车间在一月份多生产了八根曲轴，其余相同，这时，乙厂在一月份生产进度写成矩阵形式为：

$$[B]=\begin{pmatrix}20 & 0 & 220 & 0\\ 0 & 201 & 0 & 0\\ 8 & 196 & 200 & 10\end{pmatrix} \qquad (1-17)$$

比较矩阵（1—1）与矩阵（1—17），可见$[A]\neq[B]$，说明两厂的生产进度是不一样的。

二、矩阵相加（或相减）

具有相同行列数的$[A]$和$[B]$矩阵中，可以作加（减）运算，例如一月份甲厂柴油机生产进度为矩阵（1—1），用$[A]$表示；乙厂柴油机生产进度为矩阵（1—17），用$[B]$表示：

$$[A]=\begin{pmatrix}12 & 0 & 220 & 0\\ 0 & 201 & 0 & 0\\ 8 & 196 & 200 & 10\end{pmatrix},\qquad [B]=\begin{pmatrix}20 & 0 & 220 & 0\\ 0 & 201 & 0 & 0\\ 8 & 196 & 200 & 10\end{pmatrix}$$

那么两厂共生产柴油机主要零部件为

$$\begin{pmatrix}12 & 0 & 220 & 0\\ 0 & 201 & 0 & 0\\ 8 & 196 & 200 & 10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}20 & 0 & 200 & 0\\ 0 & 201 & 0 & 0\\ 8 & 196 & 200 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32 & 0 & 440 & 0\\ 0 & 402 & 0 & 0\\ 16 & 392 & 400 & 20\end{pmatrix}$$

即

$$[A]+[B]=[C]$$

反之，相减

$$[C]=[A]-[B]$$

$$=\begin{pmatrix}12 & 0 & 220 & 0\\ 0 & 201 & 0 & 0\\ 8 & 196 & 200 & 10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}20 & 0 & 220 & 0\\ 0 & 201 & 0 & 0\\ 8 & 196 & 200 & 10\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-8 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

从上式中可以看出，甲厂比乙厂少生产八根曲轴。

综上所述，两个或两个以上矩阵可加（减）的条件只是一个，即具有相同的行列数。一般情况是

设

$$[A]=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

$$[B]=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn}\end{pmatrix}$$

则$[C]=[A]+[B]$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1j}+b_{1j} & \cdots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2j}+b_{2j} & \cdots & a_{2n}+b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{ij}+b_{ij} & \cdots & a_{in}+b_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mj}+b_{mj} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}\qquad (1-18)$$

可以想像，如果〔A〕、〔B〕矩阵的行列数十分庞大，相加（或相减）工作量也是十分可观的，我们可以编写成电子计算机程序，让计算机运算就容易了，其程序如下（709 电子计算机）：

```
B
 R I, J;
 A A, B, C [1:3, 1:4];
 #W1 (0, 'N', A, B);
   F I := 1 S 1 U 3 D
     F J := 1 S 1 U 4 D
   B C[I, J] := 0; C[I, J] := C[I, J] + A[I, J] + B[I, J]
   E
E;
```

三、矩阵与数（或函数）相乘

矩阵〔A〕每一元素乘以数λ后，即得数λ与〔A〕的乘积，其形式为：λ〔A〕，例如

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

则
$$\lambda[A]=\lambda\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{bmatrix}$$

又如
$$N_i(x,y)[I]=N_i(x,y)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} N_i(x,y) & 0 \\ 0 & N_i(x,y) \end{bmatrix}$$

四、矩阵相乘

只有在矩阵〔A〕中的列数等于矩阵〔B〕中的行数时，两个矩阵〔A〕和〔B〕才能依照〔A〕与〔B〕的次序相乘。当满足这个条件时，矩阵〔A〕和〔B〕称作为可相乘矩阵，否则，矩阵乘法不能成立。

例如设
$$[A]=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \\ 6 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

〔A〕是三行三列（即三阶）矩阵。

$$[B]=\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

是三行二列矩阵，显然，矩阵〔A〕的列数（＝3）与矩阵〔B〕的行数（＝3）相等，故矩阵

〔A〕与〔B〕可以相乘，即

$$[C]=[A][B]=\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&0&-4\\6&8&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&2\\4&3\\1&5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\times7+2\times4+(-1)\times1 & 1\times2+2\times3+(-1)\times5\\3\times7+0\times4+(-4)\times1 & 3\times2+0\times3+(-4)\times5\\6\times7+8\times4+5\times1 & 6\times2+8\times3+5\times5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14&3\\17&-14\\79&61\end{bmatrix}$$

矩阵〔C〕的行列数是 3×2，即$m=3$，$n=2$，可见，〔C〕矩阵中第一行第一列元素（即$C_{11}=14$），等于〔A〕矩阵中第一行与〔B〕矩阵中第一列的对应元素乘积之和；〔C〕矩阵中第一行第二列元素（即$C_{12}=3$），等于〔A〕矩阵中第一行与〔B〕矩阵中第二列的对应元素乘积之和；〔C〕矩阵中第二行第一列元素（即$C_{21}=17$），等于〔A〕矩阵中第二行与〔B〕矩阵中第一列的对应元素乘积之和等等。

又如，已知六行三列矩阵 $[B]=\dfrac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix}b_i&0&c_i\\0&c_i&b_i\\b_j&0&c_j\\0&c_j&b_j\\b_m&0&c_m\\0&c_m&b_m\end{bmatrix}$

和三行三列矩阵 $[D]=\dfrac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1&\nu&0\\\nu&1&0\\0&0&\dfrac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}$

它们的乘积是：

$$[C]=[B][D]=\frac{E}{2\Delta(1-\nu^2)}\begin{bmatrix}b_i&0&c_i\\0&c_i&b_i\\b_j&0&c_j\\0&c_j&b_j\\b_m&0&c_m\\0&c_m&b_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\nu&0\\\nu&1&0\\0&0&\dfrac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}$$

$$
= \frac{E}{2\Delta(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} b_i & \nu b_i & \frac{1-\nu}{2} c_i \\ \nu c_i & c_i & \frac{1-\nu}{2} b_i \\ b_j & \nu b_j & \frac{1-\nu}{2} c_j \\ \nu c_j & c_j & \frac{1-\nu}{2} b_j \\ b_m & \nu b_m & \frac{1-\nu}{2} c_m \\ \nu c_m & c_m & \frac{1-\nu}{2} b_m \end{bmatrix} \qquad (1-19)
$$

式中 $C_{11} = \frac{E}{2\Delta(1-\nu^2)} \ (b_i \times 1 + 0 \times \nu + c_i \times 0) \ = \frac{E}{2\Delta(1-\nu^2)} b_i$

……………………………………………………………………………

$C_{43} = \frac{E}{2\Delta(1-\nu^2)} \left(0 \times 0 + c_j \times 0 + b_j \times \frac{1-\nu}{2} \right) = \frac{E}{2\Delta(1-\nu^2)} \cdot \frac{1-\nu}{2} b_j$

……………………………………………………………………………

一般地说，设有一个 m 行 L 列矩阵〔A〕和 L 行 n 列矩阵〔B〕，其中

$$
[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1K} & \cdots & a_{1L} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2K} & \cdots & a_{2L} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{iK} & \cdots & a_{iL} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mK} & \cdots & a_{mL} \end{bmatrix}
$$

$$
[B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{K1} & b_{K2} & \cdots & b_{Kj} & \cdots & b_{Kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{L1} & b_{L2} & \cdots & b_{Lj} & \cdots & b_{Ln} \end{bmatrix}
$$

由于〔A〕的列数等于〔B〕的行数，所以〔A〕与〔B〕为可乘矩阵，即

〔C〕=〔A〕〔B〕

$$
= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1K} & \cdots & a_{1L} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2K} & \cdots & a_{2L} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{iK} & \cdots & a_{iL} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mK} & \cdots & a_{mL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{K1} & b_{K2} & \cdots & b_{Kj} & \cdots & b_{Kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{L1} & b_{L2} & \cdots & b_{Lj} & \cdots & b_{Ln} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1j} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2j} & \cdots & C_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{i1} & C_{i2} & \cdots & C_{ij} & \cdots & C_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{m1} & C_{m2} & \cdots & C_{mj} & \cdots & C_{mn} \end{bmatrix}
$$

式中 〔C〕矩阵第 i 行第 j 列元素：

$$
C_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{iK}b_{Kj}+\cdots+a_{iL}b_{Lj}=\sum_{K=1}^{L}a_{iK}b_{Kj} \qquad (1-20)
$$

即〔C〕矩阵中第 i 行第 j 列元素 C_{ij} 等于〔A〕矩阵中第 i 行与〔B〕矩阵中第 j 列的对应元素乘积之和，当 $i=1$， $j=1$ 时，即得C_{11}，当 $i=1$， $j=2$ 时，即得C_{12}，等等。

可以想像人工进行矩阵相乘运算，比相加运算还要麻烦，下面介绍一个程序中的矩阵相乘过程，在作矩阵相乘时，调这个过程就行了（见第十章过程说明），其程序如下：

```
P MATMUL (m, L, n, A, B, C);
  V m, L, n;
  R m, L, n;
  A A, B, C;
  BR i, j, K;
    F i := 1 S 1 U m D
      F j := 1 S 1 U n D
    B C[i, j] := 0;
      F K := 1 S 1 V L D
        C[i, j] := C[i, j] + A[i, K] * B[K, j]

    E
  E;
```

由矩阵相乘的定义，不难看出一般情况下

$$
[A][B]\neq[B][A]
$$

但〔A〕〔B〕还应遵守下面规则：

$$
\left.\begin{array}{ll}
(1) & \lambda([A][B])=(\lambda[A])[B]=[A](\lambda[B]) \\
(2) & ([A][B])[C]=[A]([B][C]) \\
(3) & ([A]+[B])[C]=[A][C]+[B][C] \\
(4) & ([A][B])^T=[B]^T[A]^T
\end{array}\right\} \qquad (1-21)
$$

式（1—21）中规则（4），即是两个矩阵乘积的转置矩阵，它等于两个矩阵分别转置以后的乘积，而顺序颠倒。

由矩阵乘法的定义，我们可以将某些表达式写得更简单些，如已知

$$\{\sigma\}=\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{bmatrix},\qquad \{\varepsilon\}=\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{bmatrix}$$

则弹性体内单位体积的变形能表达式为：

$$U=\frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{zx}\gamma_{zx})$$

简化为：

$$U=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left[\sigma_x\sigma_y\sigma_z\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}\right]\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\{\sigma\}^T\{\varepsilon\}。\qquad(1-22)$$

第三节　线性代数方程组

一、线性方程组的矩阵表达式

设有线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1j}x_j+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2j}x_j+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{ij}x_j+\cdots+a_{in}x_n=b_i\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nj}x_j+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\qquad(1-23)$$

式（1—23）的矩阵形式为：

$$[A]\{x\}=\{B\}\qquad(1-24)$$

式中

$$[A]=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$