

算學叢書

幾何證題法

嚴濟慈編

商務印書館

算 學 叢 書

幾 何 證 題 法

嚴 濟 慈 編

商 務 印 書 館

算 學 叢 書
幾 何 證 題 法
嚴 濟 慈 編

★ 版權所有 ★
商 務 印 書 館 出 版
上海河南中路二一一號
〔上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號〕
新 華 書 店 上 海 發 行 所 總 經 售
商 務 印 書 館 印 刷 廠 印 刷
上海天通菴路一九〇號
(52203)

1932年10月初版 1954年11月8版
印數 14,001—18,500 定價 ¥11,200

幾何證題法

目 錄

第一章	幾何學上常用名辭之解釋	1-7
第二章	證題之步驟	8-17
第三章	證法通論	18-42
第四章	軌跡	43-82
第五章	交軌法	83-121
第六章	助圖法	122-156
第七章	變位法	157-186
第八章	相似形法	187-201
第九章	位似圖	202-229
第十章	反圖	230-250

幾何證題法

第一章 幾何學上常用名辭之解釋

§1. 何謂算學 算學爲演繹科學，不藉觀察，不待實驗，恆借定義與證明，以可恃之方法，按律推演，皇然成科。由甲理而乙理，由乙理而丙理，而丁而戊，如抽絲然。羅素 Bertrand Russel 有言：「純粹算學，端在陳說：某理若於某事爲真，則此理於該事亦真。至某理之究真與否，及該事之爲何，均非所必計；故算學之爲學，既不知其所言之爲何，亦不知其真否。」可謂純粹算學之極善界說矣。惟定義與證明，常含公理。公理之來，或得諸先知，或由於經驗，或由於約定；要皆與日常所見，極相近似；由此所成之算學，亦遂得應用於實際而無窮，此算學之所以不僅爲邏輯已也。

§2. 定義 Definition 一物之定義云者，即藉他已知事物，言其相互關係，表示該物之特性，以分別於他事物，而更爲之命名。有名則辭簡而意賅。惟定義成立，有兩條件：一爲不自相矛盾，不自相矛盾，則規定之物始能存在；一爲充足，充足則規定之物始爲唯一。存在而唯一，乃有研究之價值。

一物之定義，端賴他物之預知；既如上述，然則最初一物之定義，又將如之何？故在算學中所用名辭，決非一一皆可爲之定義者，勢必先認若干事物之存在，并作種種假定，表明其關係，以爲推理之基礎，謂之原理 Postulate。

§3. 證明 Demonstration 證一命題 Proposition 云者，即就已知之命題，以推得此命題之謂也。由乙題而證甲題，由丙題而證乙題，窮根思源，必有盡處，此盡處即爲假定之命題，吾人先知所認爲真確者。此假定而不可證明之命題，謂之自理；自理者理之不待討論而自明者也。

§4. 公理 自理原理，統名公理 Axiom.

自理爲各種算學所公有，表數量之特性，如：

全量大於其分；

等於同量之量互等，等等；

即所謂普通公理是也。

原理爲各種算學所特具，分析有分析的原理，幾何有幾何的原理，機械有機械的原理，分析與機械，茲不論；幾何則有聯立原理，相等原理，及平行原理。

§5. 幾何學 幾何學者研究物之形狀，大小，位置之學科也。

§6. 幾何之元素 Elements of Geometry 凡占有宇宙間位置者，皆爲物體 Body。含物之性質，而論其形狀，大小，位置時，則名之曰立體 Solid。立體之界爲面 Surface。面之界爲線 Line。線之界爲點 Point。是點，線，面，體諸觀念，皆由觀察實物而來。點，直線，平面莫不有物相爲其影，如星可視爲點之影，光線爲直線之影，而靜水面爲平面之影。至謂點無大小，線無粗細，面無厚薄，則非可於物相求之，故抽象以成爲幾何家理想中之圖，俾便於理論。是點，線，面實爲幾何之無定

義元素 Undefined Elements, 吾人可視之爲獨立的存在物。面是面, 不問面究爲多數點線所合成與否; 線是線, 不問究爲多數點所聯成與否, 或爲多數面所交成與否; 點是點, 不問究爲線面所交成與否。

§7. 聯合原理 幾何家既假定點, 線, 面爲無定義的元素, 則必須有一種原理, 表明其相互間之關係, 此種原理謂之聯合原理。

1° 兩點定一直線, 線長無限。

2° 一直線上有二點在一平面內, 則其線全在此面內; 平面之任何方向, 其廣各爲無限。

§8. 點 點有位置而不計其大小。

§9. 直線之性質

1° 在一直線上可取無窮點; 過一點可作無窮直線。

2° 置一直線於他直線上, 其線上任何一點, 皆得使之與他直線上任何一點相合, 惟同時祇以一點爲限。

3° 交於一點之二直線, 若非全合者不能有第二交點。

§10. 平面之性質

1° 在一平面上, 可引無窮直線; 過一直線, 可作無窮平面。

2° 三點不在一直線上者定一平面。

3° 置一平面於他平面上, 其面中任何一直線, 皆可使之合於他平面上之任何直線, 惟同時祇以一爲限。

4° 直線交平面於一點, 若非全在其內者, 不能有第二

交點。

§11. 幾何形體，面，線，點及此等所集合者曰幾何形。

其在平面上者曰平面形。

§12. 相等原理 形在空間，任何移動，不變其形狀與大小，故凡形之可使全合（重疊而相合）者除位置以外，無不相同，是曰相等 Equal。

§13. 平行原理 過線外一點，能作亦祇能作該直線之一平行線，謂之平行原理，即歐氏原理 Euclid's postulate 也，實為普通幾何學之基。

本上三原理，推演而成普通幾何；原理稍改，所成幾何，亦各不同。如非歐几里得幾何 Non-Euclid Geometry，其中定理多與歐几里得未盡合者，惟各有其說，各是其理，其不自相矛盾而合邏輯，皇然成科，一如歐氏幾何。歐氏幾何與非歐氏幾何，無孰較真確之可言，而有便不便之分。此種純粹幾何，無關實用，因點，線，面既為假定之名，而各原理又僅為支配假名而設，完全離絕實驗範圍，亦不因實驗而動搖其基礎，故雖遠於用，實不害其精也。實際上，普通幾何應用甚多，且以幾何所得結果取算，並不與事實相差甚遠，則因普通固體與幾何上之固體，大體相同也。研究幾何為一事，研究幾何合乎實用與否又為一事，如僅從假定原理推演，則所得為純粹幾何定理，必附以物理原則，乃能合應用，如幾何注重量長，而量長必受物理原則支配，故致用亦合也。

§14. 定理 命題之得證明其為真確者，謂之定理

Theorem.

自定理直接推得者謂之系 Corollary.

§15. 條件的命題 Conditional proposition 算學真理大半多為條件的,而非絕對的,故定理往往有二部: 一曰前提 Hypothesis, 二曰結論 Conclusion.

例. 例如某物含有性質 A (前提), 則亦必含有性質 B (結論);

簡言之, A 牽涉 B .

所謂證明者,即在依據邏輯,用定義,公理,或既知之定理,以表結論為前提應有之結果也.

§16. 定理間之關係 如「有 A 則有 B 」一定理也;有 A 為前提,有 B 為結論. 若將前提與結論互換,則得定理如下:

有 B 則有 A ,

謂之逆定理 Converse theorem.

若將定理之前提與結論各改為否定語,則有

無 A 則無 B ,

謂之倒定理 Contrary theorem.

若將定理之前提與結論互換後,再各改為否定語,則有

無 B 則無 A ,

謂之對定理 Opposite theorem.

故每一定理,恆可有三定理與之並立,列之如次:

定理	有 A 則有 B ;	(1)
----	----------------	-----

逆定理	有 B 則有 A ;	(2)
-----	----------------	-----

倒定理 無 A 則無 B ; (3)

對定理 無 B 則無 A . (4)

觀上表,可知(2)(3)互爲對定理,(2)(4)互爲倒定理,(3)(4)互爲逆定理。四定理不必同時盡真,亦不必同時盡假,惟(1)與(4),(2)與(3)則恆同時爲真或同時爲假,觀下律可明。

§17. 對定理律 兩定理若互爲對定理,則有一爲真,二者都真;有一爲假,二者都假。證之如次:

1° 設有一爲真,即有 A 則有 B , 則無 B 不能有 A ; 蓋云有 A , 將依定理「有 A 則有 B 」而必有 B 。是同時無 B 而又有 B , 相刺謬矣, 所以無 B 則無 A 。故凡一定理爲真, 則其對定理必真。

2° 設有一爲假, 則其他亦必爲假; 苟爲真, 則將依 1° 所證, 二者將均爲真, 是與所設不合。

應用 二定理互爲對定理者, 任證其一即可。

對定理實一而二, 二而一, 謂之同值 Equivalent.

§18. 離接命題 Disjunctive proposition 命題之前題, 有種種變化, 以得各異之結論, 而成一組之定理, 如:

A 大於 B , 則 C 大於 D ;

A 等於 B , 則 C 等於 D ;

A 小於 B , 則 C 小於 D ;

簡書之,

$A \geq B$, 則 $C \geq D$;

內中

$\geq$ 與 $\leq$ 同值,

$\neq$ 與 $\geq$ 同值,

$\neq$ 與 $>$ 同值.

即任一情形之否定語,皆足以代表其餘情形,而與之同值,此種命題,謂之離接命題,其定理實包含倒定理於其中,蓋定理

$$A > B, \text{ 則 } C > D$$

之倒定理爲

$$A < B, \text{ 則 } C < D$$

是定理真而倒定理亦真;倒定理真,則倒定理之對定理

$$C \geq D, \text{ 則 } A \geq B$$

亦真,是即原定理之逆定理也. 故離接命題真,其逆定理亦必真.

如同圓或等圓之二圓心角,相等則其所對弧亦等;不等,則所對弧亦不等,大者對大弧,小者對小弧. 一離接命題也,故其逆定理:

同圓或等圓之二圓弧,相等則其所對之圓心角亦等;不等,則所對圓心角亦不等,大者對大角,小者對小角. 亦真確.

同值原理,應用極多,化繁就簡,端在變易 transformation. 所謂變易者即同值之互換耳,讀者當隨時留意焉.

第二章 證題之步驟

§19. 幾何問題之分類 幾何研究問題有二：其一依某種條件畫一圖，求證此圖合某種情形，此定理也；其二求畫一圖合某種條件，此問題也。在定理則有前提，有結論，當依前提推至結論，所謂證也。在問題或有前提無結論，或有結論無前提，當先求其所闕，所謂解也。次畫圖，次證明，則問題完全解決矣。

I 定理之求證

§20. 前提與結論之分辨 定理既由前提與結論而成，則何部為前提，何部為結論，首當辨別清楚，即何者為已知，何者為欲證，由已知以明所欲證，此吾幾何家事也。例如：

在角之平分線上各點，與其兩邊之距離相等。

一定理也，其

前提 若 M 在 $\hat{BAC}$ 之平分線上。

結論 則 M 與 AB, AC 兩邊之距離相等。

§21. 術語與程式之改換 定理中所用名辭，當各明其義，如在上例，必有下問：

問：何謂 $\hat{BAC}$ 之平分線 MA ？

答： MA 分 $\hat{BAC}$ 為二等分，即 $\hat{BAM} = \hat{MAC}$ 。

問：何謂 M 點與 AB 線之距離？

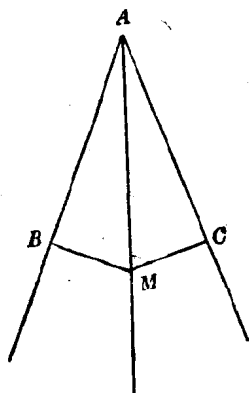
答： M 點與 AB 線之距離，即自 M 所作 AB 之垂線之長

則可述之如次:

$$\begin{array}{l} \text{前提} \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{BAM} = \hat{MAC} \\ MB \perp AB \\ MC \perp AC \end{array} \right. \end{array}$$

$$\text{結論} \quad MB = MC$$

所用多係程式,程式案爲算學家運算之符號.



故以定義代名辭,而爲運算之基,實爲證理解題之重要步驟. 惟

一名辭恆有種種不同之定義,則必因地制宜,擇其最便於此者而利用之:如 MA 爲 $\hat{BAC}$ 之平分線,可以

$$\hat{BAM} = \frac{1}{2} \hat{BAC}$$

表之,惟在此則不若

$$\hat{BAM} = \hat{MAC}$$

之適用矣.

又如兩平行線,可視爲兩直線與一直線相交,其錯角相等,或其同位角相等,或其同側內角互爲補角,或其同側外角,互爲補角;四者之中,各有其便利處,要在善讀者之審勢取捨耳.

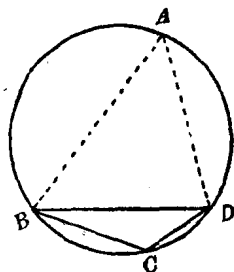
再如設 A 爲圓周上一點,則必即與其圓心 O ,連結成線,此非好爲多事,蓋以

$$OA = r = \text{半徑}$$

即表 A 在 O 爲心, r 爲半徑之圓周上,實爲術語程式之改換.

若 A 在過 B, C, D 三點之圓周上, 則不必連 A 與 O , 而連 AB, AD , 以成四邊形 $ABCD$, 并表此四邊形爲內接於圓者, 即

$$\hat{A} + \hat{C} = 2\hat{R} \text{ 或 } \hat{B} + \hat{D} = 2\hat{R}$$



此亦術語與程式改換時選擇中所當注意之又一例也。

§22. 迭變換 一題到手, 既分辨其前提與結論, 復加以適當之考慮, 爲之改成程式, 則理之簡單者往往藉一已知定理, 即見結論爲前提應有之結果。如在原例, 有

$$\text{前提} \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{BAM} = \hat{MAC} \\ MB \perp AB \\ MC \perp AC \end{array} \right.$$

若明兩直角三角形相等律, 即知

$$\triangle ABM \equiv \triangle ACM$$

故得

$$\text{結論} \quad MB = MC$$

若理之稍複雜者, 則由前提以至結論, 必經其中之若干步: 由前提而甲, 由甲而乙, 由乙而丙, 由丙而丁而戊, 以止於結論, 一步進一步, 步步與結論相近, 謂之迭變換 Successive transformations.

如以前提換前提, 使之前提與結論更相接近, 即是法也。

例 1. 試證三角形之大邊對大角。

不云 AB 大於 AC , 乃於 AB 上取 $AD=AC$, 而 D 點在 A, B 間, 則其前提與結論成

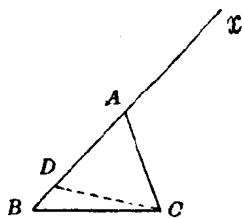
(I) 前提 $\begin{cases} AD \text{ 爲 } DB \text{ 之引長線,} \\ AD=AC \end{cases}$

結論 $\hat{ACB} > \hat{ABC}$

但在二等邊三角形 ADC 內, 等邊對等角, 則上之前提與結論變成

(II) 前提 $\begin{cases} DA \text{ 爲 } DB \text{ 之引長線} \\ \hat{ADC} = \hat{ACD} \end{cases}$

結論 $\hat{ACB} = \hat{ADC} + \hat{DCB} > \hat{ABC}$



或更簡成

(III) 前提 Dx 爲 DB 之引長線。

結論 $x\hat{DC} + \hat{DCB} > x\hat{BC}$

此理極爲顯明易見, 蓋三角形之外角, 大於其不相倚之內角也。

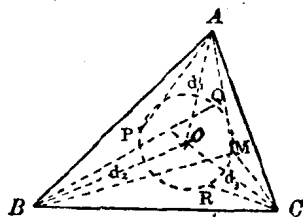
在此迭變換中, 所當注意者, 則後前提必須真能代表原前提而後可, 即原前提爲確, 後前提亦確; 反之, 後前提確, 原前提亦確, 謂之同值 Equivalent。同值之前提, 方可代換, 如本例之(I)與(II)即同值也。但(II)與(III)則不爲同值, (II)之同值前提實爲

(II') 前提 $\begin{cases} Dx \text{ 爲 } DB \text{ 之引長線,} \\ Dx \text{ 上有一點 } A, \text{ 可以 } A \text{ 爲頂點, } DC \text{ 爲底邊} \\ \text{而成二等邊三角形.} \end{cases}$

是(III)僅其一部耳。去其一部而仍不失其用,則必此部確是贅言,是乃特例,非常事也,學者不可以爲訓。

例2. M 爲在三角形 ABC 平面上之任一點,作 $\hat{BAP} = \hat{MAC}$ 并取 $AP = AM$; 同樣作 $\hat{CBQ} = \hat{MBA}$, $BQ = BM$; 及 $\hat{ACR} = \hat{MCB}$, $CR = CM$. 求證 M, P, Q, R 同在一圓周上。

本題之前提與結論爲



$$(I) \text{ 前提 } \begin{cases} \hat{BAP} = \hat{MAC}; AP = AM; \\ \hat{CBQ} = \hat{MBA}; BQ = BM; \\ \hat{ACR} = \hat{MCB}; CR = CM. \end{cases}$$

結論 M, P, Q, R 四點同在一圓周上。

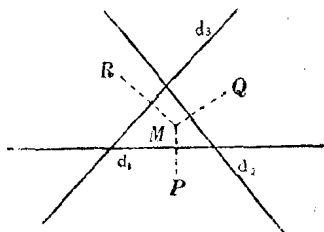
設 d_1 爲 $\hat{A}$ 之平分線, 則 AB, AC 對於 d_1 而成對稱, 又以 $\hat{BAP} = \hat{MAC}$, 故 AM, AP 亦對於 d_1 而成對稱。是 P, M 兩點對於 d_1 而成對稱。

同理 Q, M 對於 B 之平分線 d_2 , R, M 對於 $\hat{C}$ 之平分線 d_3 而成對稱, 則本題似可變成

$$(II) \text{ 前提 } \begin{cases} P, M \text{ 對於 } d_1 \text{ 而成對稱;} \\ Q, M \text{ 對於 } d_2 \text{ 而成對稱;} \\ R, M \text{ 對於 } d_3 \text{ 而成對稱;} \end{cases}$$

結論 M, P, Q, R 同在一圓周上.

而爲不確，蓋一點及其對於任意三直線之三對稱點，不必同在一圓周上也。如任意三點 P, Q, R 可視爲任意點 M 對於三直線之對稱點。此三直線爲何，即 PM, QM, RM 之垂直平分線 d_1, d_2, d_3 是也。其致誤之因，即在忽視 d_1, d_2, d_3 三直線爲同交於一點者。故 (II) 之前提非 (I) 之同值前提，而當爲



(II') 前提 $\begin{cases} P, M \text{ 對於 } d_1 \text{ 而成對稱;} \\ Q, M \text{ 對於 } d_2 \text{ 而成對稱;} \\ R, M \text{ 對於 } d_3 \text{ 而成對稱;} \\ d_1, d_2, d_3 \text{ 三直線同交於一點 } O. \end{cases}$

則其

結論 M, P, Q, R 同在一圓周上.

實屬顯然.

迭變換亦可逆用，即由結論上溯至前提，而以結論換結論，使新結論與前提更相接近，而成簡單之理。

例3. M 爲三角形 ABC 之外接圓周上任一點，自 M 作各邊之垂線 MP, MQ, MR ，則其垂足 P, Q, R 同在一直線上。

前提 $\begin{cases} A, B, C, M \text{ 四點同在一圓周上。} \\ MP \perp BC, MQ \perp CA, MR \perp AB. \end{cases}$