新突破

奥林匹克专题讲座

新突破

主编 齐振东 薛 道

AOLINPIKE

高中数学

（上）

海洋出版社

奥林匹克 专题讲座新突破

高中数学

（上）

主　　编　齐振东　薛　道
本册主编　徐宝计　贝嘉禄

海洋出版社

2002年·北京

图书在版编目(CIP)数据

奥林匹克专题讲座新突破. 高中数学. 上 / 齐振东, 薛遒主编. -北京: 海洋出版社,2002.9

ISBN 7-5027-1114-7

Ⅰ.奥… Ⅱ.① 齐…② 薛 … Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 064985 号

责任编辑: 李向义
责任校对: 张丽萍
责任印制: 刘志恒

海洋出版社 出版发行

http://www.oceanpress.com.cn

(100081 北京市海淀区大慧寺路 8 号)

北京四季青印刷厂印刷

2002 年 9 月第 1 版 2002 年 9 月北京第 1 次印刷

开本: 880×1230 1/32 印张:9.375

字数: 239 千字 印数:1~7000 册

定价: 12.00 元

前　　言

为了帮助热爱数学学科的学生学好数学课程，夯实知识基础和提高综合素质，我们结合全国知名奥校、北京西城区教研中心、北京四中及徐州市部分重点学校的教学经验，将自己多年来讲课的讲义，按照奥赛的发展方向及要求，经过严格的教研论证，依据教育部新颁“教学大纲”和“竞赛大纲”，组织编写了《奥林匹克专题讲座新突破》丛书（高中数学）部分〈上、下册〉。本书与“大纲”同步，紧密配合本学科的教学进度，选择基础性强、针对性强、应用性广的重点教学内容作为专题，选题注重学生综合能力的培养，力求创新和突破，并注重广度和深度，例题讲解富有启发性。

本书内容由基础知识、典型例题解析、课后练习、答案及提示等部分组成。本书立足高考，着眼竞赛，在落实高考范围内的重点、难点、疑点知识的同时，更好地了解竞赛提出的新内容、新要求。重点放在了带普遍性的思维训练上，着重分析解题思路，兼顾特殊的解题方法与技巧，提供了足够的自我训练材料。编者多年一直在中学数学教学第一线，对教学和奥林匹克竞赛有着丰富的经验，相信会对广大中学生学习数学、高考及奥林匹克竞赛取得好成绩有一定帮助。

由于水平所限，书中如有不妥之处，望读者不吝赐教。

编　者

2002 年 8 月

目　次

第一讲 集合与映射

【基础知识】

一、集合的概念

集合是数学中非常重要的一个概念，在现代数学中起着非常重要的作用．集合是一个不定义的概念．我们通常只能给出描述性的定义，即具有某种属性的所有对象的全体叫做集合．构成集合的事物或对象叫做集合的元素．

元素与集合之间的关系用$\in$($\notin$)来表示．如果元素 a 是集合A 的元素，记作 $a\in A$；元素 a 不是集合A 的元素，记作 $a\notin(\overline{\in})A$．

集合必须满足的条件：

① 确定性，即集合中的元素是确定的．也就是说，对于给定的一个元素 a，它要么是集合 A 的元素，即 $a\in A$；要么不是集合 A 的元素，即 $a\notin A$．二者必居其一．对于一些带有模糊意思的描述性语言，例如："所有高个子的全体"，"商店里所有漂亮的衣服"就不能形成集合．因为"高个子"，"漂亮"的标准并不确定，所以无法构成集合．

② 互异性，即集合中的元素是互异的，在一个集合中不能重复出现相同的元素．例如：一元二次方程 $x^2+2x+1=0$ 解的集合是$\{-1\}$，而不是$\{-1,-1\}$．

③ 无序性，即集合中的元素是无序的．集合$\{a,b,c\}$和集合$\{b,a,c\}$没有本质的区别．

二、集合的表示方法主要有列举法、描述法、区间法、语言叙述法

三、集合与集合的关系

① 任意 $x\in A$，有 $x\in B\Leftrightarrow A\subseteq B$；

② $A\subseteq B$，$B\subseteq A\Leftrightarrow A=B$；

③ $A\subset B\Leftrightarrow A\subseteq B$ 且 $A\neq B$；

④ $A\subseteq B$，$B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$；

⑤ $A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B$；$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$；

⑥ $\varnothing\subseteq A$；如果 $A\neq\varnothing$，那么 $\varnothing\subset A$；

⑦ $A\subseteq I$；如果 $A\neq I$，那么 $A\subset I$.

四、集合的运算

交：设有集合 A 和 B，由 A 和 B 的所有公共元素所构成的集合，称为 A 和 B 的交，记为 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\};$$

并：设有集合 A 和 B，由 A 和 B 的所有元素所构成的集合，称为 A 和 B 的并，记为 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\};$$

补：全集 I 中所有不属于 A 的元素构成的集合，叫做 A 的补集，记为 $\bar{A}$，即

$$\bar{A}=\{x\mid x\in I \text{ 且 } x\notin A\};$$

差：设有集合 A 和 B，由属于 A 而不属于 B 的所有元素所构成的集合，称为 A 和 B 的差，记为 $A-B$，即

$$A-B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

运算律：

① 交换律：$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$.

② 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

③ 分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

④ 等幂律：$A\cup A=A$；$A\cap A=A$.

⑤ 同一律：$A\cap I=A$；$A\cup I=I$；

$A\cup\varnothing=A$；$A\cap\varnothing=\varnothing$.

⑥ 互补律：$A\cup\bar{A}=I$；$A\cap\bar{A}=\varnothing$.

⑦ 吸收律：$A\cup(A\cap B)=A$；$A\cap(A\cup B)=A$.

⑧ 反演律：$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$；$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

五、有限集合所含元素的个数的性质

集合 A 中含有的元素的个数称为集合的阶数，记为 $|A|$. 例如：如果 $|A|=n$，表示集合 A 含有 n 个元素.

① $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$；

特别的：当 $A\cap B=\varnothing$，有：$|A\cup B|=|A|+|B|$；

② $|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|$

$-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|$；

③ 如果非空集合 A 含有 n 个元素，考虑 A 的一切子集.

显然 A 含有两个非常特殊的子集：空集 $\varnothing$ 和全集 A；A 的每个元素构成的单元集，共有 $C_n^1=n$ 个；A 的每两个元素组成的两元素集，共有 C_n^2 个；……；A 的每 k 个元素组成的 k 元素集（$3\leqslant k\leqslant n-1$），共有 C_n^k 个，因此集合 A 共有：

$$1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^k+\cdots+C_n^{n-1}+1=(1+1)^n=2^n$$

个互不相同的子集.

六、某些子集类的简单性质及其应用

① C 类

设 A 为一个 n 阶集合，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 A 的元素，则集合 A 可以表示为：

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}.$$

集合 A 的所有子集，包括$\varnothing$与 A 本身在内，共有 2^n 个，记为 A_1，$A_2,\cdots,A_{2^n}$，记：

$$\mathbf{A}=\{A_1,A_2,\cdots A_{2^n}\},$$

则 $\mathbf{A}$ 为由 A 的所有子集作为元素的集合.

这种由 A 的某些子集作为元素的集合称为集合 A 的子集类，由 A 的所有子集构成的子集类称为 C 类. $\mathbf{A}$ 就是一个 C 类.

② R 类

设 $|A|=n$，$\mathbf{A}=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 是 A 的一个子集类，如果存在 $k(2\leqslant k\leqslant m-1)$，使得：

ⅰ. $\mathbf{A}$ 中任意 k 个 A_i 都相交；

ⅱ. $\mathbf{A}$ 中任意 $k+1$ 个 A_i 都不相交.

则称 $\mathbf{A}$ 为 A 的一个指数为 k 的 R 类.

根据ⅰ，$\mathbf{A}$ 中每个 A 的子集 $A_s(1\leqslant s\leqslant m)$ 都与 $\mathbf{A}$ 中其余 $m-1$ 个子集中任意选出的 $k-1$ 个子集的交，至少有一个公共元素，而这种选出方式共有 C_{m-1}^{k-1} 种；再根据ⅱ，这 C_{m-1}^{k-1} 个元素两两不同.

这样一来，A_s 至少有 C_{m-1}^{k-1} 个元素，而 $\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i$ 至少有 mC_{m-1}^{k-1} 个元素(重复一次，计算一次)，但由ⅰ知，其中每个元素重复了 k 次，因为它同时属于 k 个不同的子集，所以 $\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i$ 至少含有 $\frac{m}{k}C_{m-1}^{k-1}$ 个不同的元素. 但显然 $\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i\subseteq A$，故得

$$\frac{m}{k}C_{m-1}^{k-1}\leqslant n,$$

即 $C_m^k\leqslant n$.

③ K 类

设 $|A|=n$，$\mathbf{A}=\{A_1,A_2\cdots,A_k\}$ 是 A 的一个子集类. 如果 $\mathbf{A}$ 中任何两个 A 的子集 A_i 与 A_j 互无包含关系，即 $A_i\not\subset A_j$ 且 $A_j\not\subset A_i$，则称 $\mathbf{A}$ 是 A 的一个 K 类.

任意一个 R 类都是 K 类.

定理1：设A为一个n阶集合，$\mathbf{A}_1=\{A_1,A_2,\cdots,A_r\}$为$A$的一个$r$阶子集类，其中$A$的每个子集$A_i(1\leqslant i\leqslant r)$都是$k$阶的.又设$\mathbf{A}_2=\{B_1,B_2,\cdots,B_s\}$为$A$的另一个$s$阶子集类，其中$A$的每个子集$B_j(1\leqslant j\leqslant s)$都是$k+1$阶的.而且对每个$B_i\in\mathbf{A}_2$，必有某个$A_j\in\mathbf{A}_1$，使得$B_i\supset A_j$；又对每个$A_j\in\mathbf{A}_1$，凡满足$B_l\supset A_j$的$k+1$阶子集$B_l$皆属于$\mathbf{A}_2$，则

$$s\geqslant\frac{n-k}{k+1}r.$$

定理2：设$\mathbf{A}$为n阶集合A的K类中阶数最高者，则

$$|\mathbf{A}|=C_n^{[\frac{n}{2}]}.$$

七、集合的分拆

设$A_1,A_2,\cdots,A_n$是集合A的非空子集，满足条件：

1) $A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$；

2) $A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$.

则称$A_1,A_2,\cdots,A_n$是集合A的一个分拆或划分；

而如果$A_1,A_2,\cdots,A_n$只满足条件2)，则称$A_1,A_2,\cdots,A_n$是集合A的一个覆盖.

分拆和覆盖都是反映全集和子集的关系，分拆是覆盖的一个特殊情况.

如果A是有限集，$A_1,A_2,\cdots,A_n$是集合A的一个分拆，则有如下的加法原理：

$$|A|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|;$$

而如果$A_1,A_2,\cdots,A_n$是集合A的一个覆盖，则有容斥原理：

$$|A|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|.$$

八、映射

1．映射　设 A,B 是两个集合，如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中的每一个元素，在集合 B 中都有惟一的元素和它对应，这样的对应叫做从集合 A 到集合 B 的映射，记作：

$$f:A\to B.$$

上述映射定义中的 A,B，可以是点集，数集，也可以是其他集合．

和 A 中的元素 a 对应的 B 中的元素 b 叫做 a(在 f 下)的象，a 叫做 b 的原象．A 中的每个元素都有象，且象惟一．

2．单射、满射、双射(一一映射)

设 $f:A\to B$ 是一个映射．

(1) 如果对于 x_1，$x_2\in A$，$x_1\neq x_2$，都有：

$$f(x_1)\neq f(x_2)\ ,$$

则称映射 f 为单射．

(2) 如果对每一个 $y\in B$，都有 $x\in A$(不一定惟一)，使得 $f(x)=y$，即 $f(A)=B$，则称映射 f 是满射或称 f 是 A 到 B 上的映射．

(3) 如果 f 既是单射又是满射，即对于集合 A 中的不同元素，在集合 B 中有不同的象，且 B 中的每一个元素都有原象，那么这个映射叫做 A 到 B 上的一一映射．

3．逆映射　设 $f:A\to B$ 是从集合 A 到集合 B 的一一映射，如果对于 B 中的每一个元素 b，使 b 在 A 中的原象 a 和它对应，这样所得的映射叫做映射 $f:A\to B$ 的逆映射，记作：

$$f^{-1}:B\to A.$$

4．映射在计数方面的应用：假定 A,B 都是有限集合，而 $f:A\to B$ 是一个映射，则有如下结论：

(1) 如果 $f:A\to B$ 是单射，则 $|A|\leqslant|B|$；

(2) 如果 $f:A\to B$ 是满射，则 $|A|\geqslant|B|$；

(3) 如果 $f:A\to B$ 是双射(一一映射)，则 $|A|=|B|$．

【典型例题】

例 1. 设 $A=\{x\mid x=a^2+b^2, a, b\in Z\}$，$x_1, x_2\in A$，求证：$x_1\cdot x_2\in A$.

分析: 如果集合 $A=\{a\mid a$ 具有性质 $p\}$，那么判断对象 a 是否为集合 A 的元素的基本方法就是检验 a 是否具有性质 p.

解: $\because$ $x_1, x_2\in A$,

$\therefore$ 设 $x_1=a^2+b^2$, $x_2=c^2+d^2$, $(a, b, c, d\in Z)$

$\therefore$ $x_1x_2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2$

又 $a, b, c, d\in Z$,

$\therefore$ $ac+bd, bc-ad\in Z$,

$\therefore$ $x_1x_2\in A$.

例 2. 设集合 $A=\{m\mid m=12x+8y+4z, x, y, z\in Z\}$,

$$B=\{n\mid n=20x+16y+12z, x, y, z\in Z\},$$

求证: $A=B$.

分析: 要证 $A=B$ 只需要证对任意 $m\in A$，都有 $m\in B$；并且对任意 $n\in B$，都有 $n\in A$. 即证 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$.

证明: 任取 $m\in A$，则存在 $x, y, z\in Z$，使得

$$m=12x+8y+4z=20y+16z+12(x-y-z);$$

$\because$ $x-y-z\in Z$,

$\therefore$ $m\in B$

$\therefore$ $A\subseteq B$.

任取 $n\in B$，则存在 $x, y, z\in Z$，使得

$$n=20x+16y+12z+8(2y)+4(5x);$$

$\because$ $2y\in Z, 5x\in Z$,

$\therefore$ $n\in A$,

$\therefore$ $B\subseteq A$,

$\therefore$ $A=B$.

例 3. 已知 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid x^2-ax+(a-1)=$

$0\}$, $C=\{x \mid x^2-mx+2=0\}$，且 $A\cup B=A$，$A\cap C=C$，求 a，m.

分析： 根据 $A\cup B=A$，可以推出 $B\subseteq A$；同样根据 $A\cap C=C$，推出 $C\subseteq A$，而集合 A 可以用列举法表示，那么 B，C 的所有可能性也就确定了.

解： $A=\{x \mid x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$,

$B=\{x \mid x^2-ax+(a-1)=0\}=\{1,a-1\}$,

$\because$ $A\cup B=A$,

$\therefore$ $B\subseteq A$ 则 $a-1=1$ 或 $a-1=2$,

$\therefore$ $a=2$ 或 3;

$\because$ $A\cap C=C$,

$\therefore$ $C\subseteq A$;

$\therefore$ ① $x=1$ 是方程 $x^2-mx+2=0$ 的根，解得 $m=3$，此时 $C=\{1,2\}=A$;

② $x=2$ 是方程 $x^2-mx+2=0$ 的根，解得 $m=3$，此时 $C=\{1,2\}=A$;

③ 方程 $x^2-mx+2=0$ 无实根，即

$$\Delta=m^2-8<0,$$

$\therefore$ $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$;

$\therefore$ $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$ 或 $m=3$.

例 4. 设集合 $A=\{1,2,p,q\}$，$B=\{3,6,r,s\}$，试判断当 p,q,r,s 分别为何值时，有 $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A\cap B=\{1,3\}$，$A-B=\{2,4\}$?

分析： 本例主要考察关于集合的交、并、差运算的定义以及集合的两个性质：互异性和无序性. 所要确定的 p,q,r,s 的值既要和集合中有的元素不同，又要满足题目给出的条件.

解： 由 $A\cap B=\{1,3\}$，$A-B=\{2,4\}$，可知集合 A 中应该含有元素 1,3,2,4，因此 p,q 可以取 3 或 4;

由 $A-B=\{2,4\}$ 可知集合 B 中不含元素 2,4，又因为

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\},$$

所以集合 B 中只能含有元素 1,3,5,6,所以 r,s 只能取 1 或 5.

所以 p,q,r,s 有四组解:

$$\begin{cases}p=3,\\q=4,\\r=1,\\s=5;\end{cases}\text{或}\begin{cases}p=3,\\q=4,\\r=5,\\s=1;\end{cases}\text{或}\begin{cases}p=4,\\q=3,\\r=1,\\s=5;\end{cases}\text{或}\begin{cases}p=4,\\q=3,\\r=5,\\s=1.\end{cases}$$

例 5. 设 $a,b\in R$, $A=\{(x,y)\mid x=n,y=na+b,n\in Z\}$,

$B=\{(x,y)\mid x=m,y=3m^2+15,m\in Z\}$,

$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 144,x,y\in R\}$,

试讨论是否存在这样的实数 $(a,b)\in C$,使得 $A\cap B\neq\varnothing$.

分析:这是讨论存在性问题,不妨先假设这样的实数 a,b 存在,从而找到存在的必要条件.

解:假设存在这样的 $(a,b)\in C$,使得 $A\cap B\neq\varnothing$,则存在点 $(x_0,y_0)\in A$,且 $(x_0,y_0)\in B$,即直线 $y=xa+b$ 与抛物线 $y=3x^2+15$ 有交点,且交点纵、横坐标均为整数.

$\therefore\ ax+b=3x^2+15$ 有解,

$\therefore\ \Delta\geqslant 0$,

即 $a^2-4\times 3\times(15-b)\geqslant 0$,

$\therefore\ a^2\geqslant 180-12b$,而 $a^2+b^2\leqslant 144$,

$\therefore\ a^2\leqslant 144-b^2$,

$\therefore\ 144-b^2\geqslant 180-12b$,

$\therefore\ (b-6)^2\leqslant 0$,

解得 $b=6$,

$\therefore\ a^2\leqslant 144-6^2=108$,而 $a^2\geqslant 180-12b=108$,

$\therefore\ a^2=108$.

此时 $\Delta=0$, $x=\dfrac{a}{6}=\pm\sqrt{3}$ 不是整数.

所以不存在这样的实数 a 和 b,使得 $(a,b)\in C$, $A\cap B\neq\varnothing$.

例 6. 已知 $A=\{1,2,3,\cdots,10\}$, $B=\{1,2,3,4,5\}$,若 C 是 A 的子

集且 $B\cap C\neq\varnothing$,则子集 C 共有多少个?

分析:若直接求集合 C 的个数不方便,但是我们可以先求出 A 的子集中与 B 无公共元素的集合个数.

解:$A=\{1,2,3,\cdots,10\}=\{1,2,3,4,5\}\cup\{6,7,8,9,10\}$,

$\therefore$ 由 $\{6,7,8,9,10\}$ 的元素构成的子集与 B 的交集为空集,共 2^5 个;

$\therefore$ 集合 C 的个数为 $2^{10}-2^5$ 个.

例 7. 设 $n\in N$, $n\geqslant 15$, A, B 都是 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 的真子集, $A\cap B=\varnothing$, $A\cup B=\{1,2,3,\cdots,n\}$,证明:$A$ 或 B 中必有两个不同数的和为完全平方数.

分析:当直接证明无法进行时,不妨考虑用反证法,假设 A、B 中任两个数的和都不是完全平方数,从中推出矛盾,从中得到我们所需要的.

证明:用反证法.

设存在满足题设的集合 A 和 B,无论是 A 还是 B 中任两个数的和都不是完全平方数.不妨设 $1\in A$,那么 $3\notin A$,否则 $1+3=2^2$ 与假设矛盾,所以 $3\in B$.同样因为 $3\in B$ 所以 $6\in A$,所以 $10\in B$.因为 $n\geqslant 15$,所以 $15\in A$ 或 $15\in B$.当 $15\in A$ 时,$1+15=16=4^2$;当 $15\in B$ 时 $10+15=25=5^2$ 均与假设矛盾.所以 A 或 B 中必有两个不同数的和为完全平方数.

例 8. 对 $\{1,2,\cdots,n\}$ 及其每一个非空子集,定义一个惟一的"交替和"如下:按照递减的顺序重新排列该子集所含的各数,然后从最大的数开始交替地减或者加后继的数(例如,$\{1,2,4,6,9\}$ 的交替和是 $9-6+4-2+1=6$;$\{3\}$ 的交替和为 3),对 $n=7$,求所有这种"交替和"的总和.

分析:题目中所要求的所有交替和的总和,根据交替和的定义,不难发现它其实就是 1 到 n 这 n 个连续自然数的有重复的代数和,因此我们只要将这个代数和中 1 到 n 这 n 个连续自然数出现的次数及其正负号情况分析透了,问题也自然就解决了.

解：记 $A=\{1,2,\cdots,7\}$，显然 7 在每个交替和中都以正项出现，并且在 A 中出现 $2^{7-1}=2^6$ 次，故在总和中为

$$2^6\times 7=448.$$

现在考虑 A 中每个含有 $i(1\leqslant i\leqslant 6)$ 的 A 的子集，该集合可以表示为 $E\cup\{i\}\cup F$，其中 E 和 F 分别是 $\{1,2,\cdots,i-1\}$ 与 $\{i+1,\cdots,7\}$ 的子集. 容易看出，当 $|F|=$ 偶数时，i 在交替和中以正项出现；而当 $|F|=$ 奇数时，i 在交替和中以负项出现，由于 $\{i+1,\cdots,7\}$ 为 $7-i$ 阶的集合，它的偶数阶子集与奇数子集分别有：

$$C_{7-i}^0+C_{7-i}^2+\cdots$$

与

$$C_{7-i}^1+C_{7-i}^3+\cdots$$

个. 因为

$$C_{7-i}^0-C_{7-i}^1+C_{7-i}^2-C_{7-i}^3+\cdots=(1-1)^{7-i}=0,$$

所以

$$\begin{aligned}C_{7-i}^0+C_{7-i}^2+\cdots&=C_{7-i}^1+C_{7-i}^3+\cdots\\&=\frac{1}{2}(C_{7-i}^0+C_{7-i}^1+C_{7-i}^2+C_{7-i}^3+\cdots)\\&=\frac{1}{2}(1+1)^{7-i}=2^{6-i}.\end{aligned}$$

又因为对于每一个 F，E 的选法有 2^{i-1}种，所以 i 在所有交替和中以正项与负项出现的次数都等于

$$2^{i-1}\cdot 2^{6-i}=2^5.$$

因此在总和中这些项刚好相互抵消.

所以，所有交替和的总和就等于 $2^6\times 7=448$.

说明：本题可以推广到一般情况，即如果 $A=\{1,2,\cdots,n\}$，则所有交替和的总和为 $2^{n-1}\cdot n$.

例 9. 银行职员中有 6 人需要进入金库，但规定每次入库必须有 4 人同行. 试问：应当怎样给库门加锁并分配钥匙，使得任何 4 人的钥匙凑到一起就能打开库门，而任何 3 人都不能打开库门？

解：用集合 A 表示锁的集合，并设 $|A|=n$，又以集合 $A_1,A_2,\cdots,A_6$ 分别表示这 6 个人各自打不开的锁的集合，由题意知：