高等学校教材

机电系统动力学

徐光弘
杨爱民 编

西安電子科技大學

854566 —

机电系统动力学

前　言

系统的动态分析和动态设计是系统动力学的两大基本课题。机电系统动力学以机电系统为研究对象，其中心内容就是机电系统的动态分析和动态设计。

随着科学技术的发展和进步，电子计算机及自动控制技术得到广泛的应用，机电一体化随之成为现代高科技领域及工程技术中普遍需要认真研究和应用的技术。从而使机电系统动力学问题日益受到重视，已经成为从事电子机械工程的技术人员正确进行机电一体化产品和结构的动力特性设计所必须具备的基础知识。

机电系统是包括机械元件和电磁元器件组成的综合系统。研究机电系统的动力学问题应该将机电系统中机和电两类不同运动形态相互作用的运动规律问题统一起来处理，这是机电一体化技术的一个极为重要的内容。

由于机械系统和电系统是相似系统，因此可以通过机电模拟将电路分析、网络理论以及控制理论及其分析方法直接引入机械系统，或者把研究机械系统动力学的分析力学方法，如拉格朗日方程和哈密尔顿原理直接推广到电系统。从而在方法上将机电系统中的机和电统一起来处理。本教材将介绍这方面的基本理论和基本方法。

研究任何系统都必须建立系统模型。机电系统动力学的重要内容之一就是建立机电系统的数学模型（或称为动力学模型）。本教材将讨论建立实际系统数学模型的理论和方法，包括理论建模方法和试验建模方法。近年来，随着动态试验、数据分析处理以及微型电子计算机技术的迅速发展，广泛采用先进的试验分析方法和把理论分析与试验测试相结合的方法来进行系统动力学的研究。本教材将叙述动态试验技术的理论基础、用动态测试数据建立复杂系统数学模型的系统识别技术以及动态设计过程中需反复使用的动力特性综合方法等系统动力学方面的较新内容。

本教材从拓宽专业面、重视基础理论和培养分析和解决实际问题能力的观点出发，主要介绍工程设计中实用的基本理论和基本方法，以期为进一步结合所从事的专业深入研究动力学问题打好基础。本教材可作为电子机械学科研究生和本科生的选修课教材，内容可根据课程学时数及不同层次的需要灵活选用。

本教材第一、二、三、六、七、八章由徐光弘编写，第四、五、九章由杨爱民编写。由于编者水平有限，书中必有不妥之处，敬请批评指正。

机电系统动力学

目　录

第一章　绪　论

§1·1　系　统

系统动力学定义系统为：一个由相互区别、相互作用的各部分有机地联结一起，为同一目的而完成某种功能的集合体。由于不局限于某一物理现象，系统的概念可以扩充到任何动态的现象，例如，社会的或工程的现象、经济的或生态的现象等。

本书讨论的系统仅限于机械系统和机电系统。机械系统是由机械元件组成的系统，而机电系统是包括机械和电磁元件组成的综合系统，从能量观点看，机电系统是一种能量转换器，它能将机械能转换为电、磁能，或者相反。

当我们把系统看作是相互联结的元件的总体时，每个元件将有一个或多个由其它元件流入的信号，并且有一个或多个由它流向其它元件的信号，前者称为输入，而后者称为输出。对于一个系统来说，我们可以将输入定义为任何能够激发系统产生响应的因素，即将输入看成是流入系统的信号，而输出就是系统产生的响应。

如果系统的即时输出仅仅是由其即时输入决定，即系统各变量对时间保持恒定，这系统称为静态系统。如果输入不改变，则静态系统的输出保持为常量，而只当输入改变时输出才改变。

如果系统的现时输出是由其之前的输入决定，即系统响应为时间函数，这系统称为动态系统。如果系统不是处于平衡状态，动态系统的输出是随时间而改变的。我们在本教材中只讨论有关的动态系统。

一般说来，在真正的静态或稳态下运行的系统是没有的。系统中总有缓慢演变的变化，而且伴随系统的启动和停止必定有短时间瞬态作用，这些变化和作用对系统特性的影响都很大。所以，对许多系统来说，动态分析比静态分析更为重要，当然，动态系统分析比静态分析更为复杂。

当一个动态系统的输出（状态和运动）完全可以用它的输入（外部作用和干扰）来描述时，这种系统称为状态确定系统。机电系统多属于状态确定系统。

§1·2　系统的数学模型

真实系统的动力学研究中的主要内容之一是把系统模型化。各种系统的模型都是用来预测所研究系统的特性而作了简化和抽象化的产物。也就是说，分析和设计任何一个系统时，必须对系统的特性有预先的了解。对于状态确定系统来说，这种预先的了解通

常是建立在系统动态特性的数学描述上的。系统动态特性的数学描述就称为系统的数学模型或称为系统的动力学模型。对于状态确定系统，其数学模型经常采用一组以状态变量表示的微分方程或一组代数方程来描述。虽然数学模型比实际系统抽象得多，但由于在实际系统和数学模型之间存在着很强的相似性，故通过数学模型可以预测系统对各输入信号的响应。建立能确切模拟所研究系统的数学模型是分析和设计系统的关键和基本内容，因此，可以说系统动力学就是讨论动态系统的数学模型和响应分析的。

由于系统数学模型必定是真实系统的简化，所以建造模型有很多技巧。一个过于复杂和详尽的模型也许包含实际上无从估算的许多参数，对这样的模型事实上不可能进行分析和计算。一个过于简化的模型又反映不了真实系统的特性，分析不出符合实际情况的结果。因此，在建立动力学模型时，没有一个系统能够被模化得丝毫不差，必定经过了简化。我们的任务就是必须掌握建立不同复杂程度的系统模型的方法，以便能够找到最简明的模型来解决所研究系统的问题。

本书将讨论机械系统及机电系统的各种模型及建立实际系统数学模型的若干问题和方法。一般的建模方法有理论建模方法和试验建模方法。应用物理定律于具体的系统，就可能建立一数学模型来描述此系统，这是理论建模的基本方法。但是，有的系统可能包括有未知的参数，这些参数必须通过实际的试验来求值，或者有时用物理定律来列出数学模型成为不可能。如果是这样，就可以应用试验建模方法。试验建模方法应用参数识别和系统识别技术，使系统经受一组已知的输入并测量出它的输出，根据表达这些输入和输出间关系的动态试验数据"识别"或"探索"出系统的数学模型。参数识别和系统识别使理论分析和实验密切结合，是一种很有实用价值的技术。试验建模法除了对某些难以进行理论分析的系统是得到精确模型的有效方法外，对理论模型也有其重要作用。如果理论模型已经建立，而要求它有高可靠程度的预示实际系统的能力，那么有时就必须通过实际试验来检查模型的正确性。在模型初步建立起来之后，这样的试验对揭示理论分析的差距和缺陷特别有用。在以后建立的模型中就能够对理论分析加以校正。

对于结构复杂的系统，为了建立系统的模型，通常必须先把系统分解成能够模型化或者能加以实验研究的一些较小部分，然后把这些部分综合成系统模型。一个系统往往能很方便地按几个层次分解开来。我们把系统的各个部分称为子系统或子结构，并把子系统的基本部分称为元件。一个子系统虽是系统的一部分，但它本身也象系统一样可以被模型化。所以，在建立复杂系统的数学模型时，目前普遍应用各个领域都广泛采用的标准的结构动态分析法，即子结构分析法。这种方法首先将系统划分为若干个子结构。其次，分别建立每一个子结构的数学模型。然后根据各子结构的相互结合条件，将所有的子结构综合起来，就可得到整个系统的数学模型。

将整个系统划分为若干子结构后，每一个子结构和整个系统相比要简单得多，有可能建立起较简单的数学模型来模拟每一个子结构，将各子结构的数学模型综合后又可得到整个系统的数学模型，这样一分一合，就使难于直接建模的复杂系统的模型化成为可

能。子结构的数学模型也有两类，一类是按子结构的形状、尺寸等参数简化得到的理论模型；另一类是应用子结构的动态试验数据建立的模型。根据不同的情况，子结构的数学模型可采用不同类型的模型，而且，同一系统的子结构，也可根据各子结构的特点，采用不同型式的模型。

划分整个系统为若干子结构是将整个系统作简单的几何分割，而子结构的综合，则是在反映各子结构之间实际结合状态的结合条件下，应用适当的数学方法，将各子结构的动力特性综合起来，得到整个系统的数学模型。所以，子结构的综合不是划分子结构的简单逆过程，而是应用子结构法建立复杂系统数学模型的一个关键步骤。综合方法主要有两类，一类是机械阻抗法，一类是模态综合法，本书将在以后的章节中进行介绍。

§1·3　系统的动力分析和动态设计

动态系统的分析和设计是系统动力学的两大基本课题。机电系统动力学以机电系统为研究对象，其中心内容就是机电系统的动力分析和动态设计。

动力分析是在已知系统数学模型的基础上，在给定条件下分析研究系统的动力特性，如系统的固有特性（固有频率、主振型和阻尼等）、动力响应、动力稳定性等。如果所分析的系统的数学模型和外部激振情况已知，则系统动力分析的任务是不难完成的。因为动态系统的固有特性、动力响应和稳定性分析都已经形成了比较完整的理论，研究出了能适用于不同情况的各种分析计算方法，而且许多分析计算方法都已经有标准的电子计算机程序可供直接引用，所以，即使系统比较复杂，其动力分析也可以获得较为准确的结果。

系统设计是指寻求一个能完成给定任务的系统的过程。系统的动态设计，意思就是在系统设计过程中，寻求一个经济合理的结构，使其动态性能满足预先给定的要求。系统设计的基本方法是综合。所谓综合，意思是指用一定的方法来寻找一个按既定要求完成任务的系统。综合时，首先提出所要求的系统的特性，然后用各种数学方法去综合一系统使其达到这些特性。通常，这种方法从设计过程开始到结束完全是数学的。另外，综合与分析是不可分的，因为一般在进行综合时，都要对一系列备选系统用反复分析的试凑法来完成系统的综合。

具体来说，系统的设计过程一般是这样的，首先根据系统应满足的设计要求，从系统所包括的子结构（或元件）出发，应用综合方法，建立一个系统的数学模型；接着，对所建立的数学模型进行各种需要的动力分析，检验它是否满足预定的设计要求，如果不满足要求，则必须修改模型的设计并完成相应的分析，这个设计和分析过程反复进行，直到获得满意的数学模型为止；下一步是按此数学模型作出相应的具体结构设计，得到实际的系统结构，当具体结构设计完成之后，又需要直接用它检验是否满足设计要求，如果满足，则设计即告完成，如果不满足，则必须修改具体结构设计，这个过程一直继

续进行，直到获得满意的具体设计为止。也就是说，任何系统的设计都必然是一个反复修改的过程，在设计过程中需要反复地进行综合和分析。

如上所述，从动力分析的观点来看，是根据一个给定的系统建立其数学模型，然后完成系统的性能分析。从动态设计的观点来看，则是从设计的要求出发，先设计出数学模型，并在进行具体设计之前完成性能分析。可见，动态设计是比动力分析更为复杂的问题，因此，尽管理论上已经提出了一些动态优化设计的方法，但目前大多仍将动态设计问题转化为动力分析问题来处理。具体来说，目前一般的动态设计过程是首先根据经验和各方面的设计要求作出原始的具体设计，然后按这个原始设计建立数学模型，进行动力分析，根据分析的结果和设计要求的偏差来修改原始设计，又按修改后的设计进行动力分析，再修改、再分析，直至获得满足设计要求的具体结构为止。

进行系统的动力分析主要有两种手段，一种是建立系统的数学模型进行理论分析，一种是对系统进行动态测试。

对系统的数学模型进行理论分析计算的方法，发挥了理论的巨大作用。近年来，由于电子计算机的广泛使用，振动理论和结构分析理论的迅速发展，目前已有可能应用数学模型对系统进行详尽、全面的动力分析。通过分析计算，不仅可以获得系统的各种动力特性和动力分析所需要的数据资料，而且可以进一步在图纸设计阶段就能对系统的动态性能进行优化设计。但是，对于复杂系统，由于不确定的因素很多，有些问题从理论到实际都还没有很好解决，仅仅按照设计图纸来建立起可靠的、能确切模拟系统动力特性的数学模型有时还不可能，这是对系统动力特性进行理论分析计算的困难之处。

对系统进行动态测试主要应用激振响应法测定系统的动力特性，包括系统的各阶固有频率、各阶主振型、有关点的动柔度频率响应、功率谱等，应用这些测试数据对系统进行动力分析。动态测试技术六十年代以来发展十分迅速，出现了以跟踪滤波技术为基础的传递函数分析仪和以数字相关技术为基础的频率特性分析仪，基本上解决了稳态正弦激振的测试技术问题。尤其是１９６５年提出了快速傅里叶变换（ＦＦＴ）的计算方法，使瞬态、随机信号的分析处理成为可能，再结合时序分析、相关分析、功率谱分析等，出现了各种动态分析系统，解决了瞬态、随机激振的测试及数据分析处理问题。总之，由于现代化动态测试技术的发展，目前已有可能直接应用动态测试分析系统的仪器设备迅速而准确地获得实际系统动力分析所需的有关数据资料。但是，对系统进行动态测试的手段只对现有的实际系统适用，或者只能根据设计图纸试制出样机或模型后才能进行试验研究。

综上所述，理论分析计算和动态试验测量这两种手段各有优缺点及适用范围。把两种手段结合起来应用，是当前进行复杂系统动力分析和动态设计的有效途径。也就是说，在复杂系统的动力分析和动态设计的过程中，既要建立系统的数学模型来作理论分析计算，也要对实物模型或现有结构进行动态试验。此时，对试制的样机或实物模型进行的动态试验一方面为建立系统数学模型提供必要的数据，另一方面又可检查所建立的数学

模型是否正确可靠，从而使所建立的数学模型能确切模拟系统的动力特性。根据这样的数学模型进行分析计算，就能得出符合实际情况的结果。

第二章　机械阻抗及其应用

机械阻抗及其参数识别技术是近代分析和研究系统动力学问题的有效手段之一，是理论分析和试验研究密切结合的新技术，一般称这种技术为机械阻抗法。

在机电系统的动力分析中，除了应用传统的理论分析方法以外，现在还广泛应用机械阻抗法。应用这个方法，不需推导和求解系统的运动微分方程，而只需测试系统的激励及其相应的响应，再经必要的代数运算，就可对复杂的动态系统进行动力分析。应用这种方法还有利于使用电子计算机及先进的测试设备进行分析。本章主要介绍机械阻抗的基本概念、原理、分析方法及其应用。

§2·1　机械阻抗的概念

机械阻抗指的是线性动力学系统动力响应和激励量之间的关系。它可表示为线性动力学系统在各种激励的情况下，频域内响应量与激励量之比。

任何线性动力学系统在确定的激励（输入）作用下，就有确定的动力响应（输出）。理论与实验证明，激励、动力响应和系统动力特性三者之间有着确定的函数关系。对于确定的线性动力学系统受激励后的响应，一方面决定于激励的性质，一方面决定于系统本身的动力特性，当激励一定时，则响应仅仅决定于系统本身。所以，我们可以采用机械阻抗即响应量与激励量之比来分析和确定系统的动力特性。

在不同的激励情况下，机械阻抗的表达形式不同。随着机械阻抗技术的迅速发展，传统的机械阻抗概念与近代各种形式的广义机械阻抗概念之间也有差异。下面分别介绍机械阻抗的基本定义及广义机械阻抗的概念。

2.1.1　机械阻抗的基本定义

传统的机械阻抗概念是这样定义的：线性动力学系统的机械阻抗，即等于简谐激励与其所引起的稳态响应的复数比，或复幅值之比。

设系统的激励为简谐激振力 f

$$f = Fe^{i(\omega t+\varphi_1)} = \bar{F}e^{i\omega t} \tag{2-1}$$

其稳态响应为

$$x = Xe^{i(\omega t+\varphi_2)} = \bar{X}e^{i\omega t} \tag{2-2}$$

则该系统的机械阻抗 Z 可表示为

$$Z=\frac{f}{x}=\frac{F}{X}=\frac{F}{X}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \tag{2-3}$$

其幅值 $|Z|=F/X$ (2-4)

相位角 $\angle Z=\varphi_1-\varphi_2$

而机械阻抗的倒数称为机械导纳，可表示为

$$H=\frac{x}{f}=\frac{X}{F}=\frac{X}{F}e^{i(\varphi_2-\varphi_1)} \tag{2-5}$$

$$\left.\begin{array}{l}|H|=X/F\\ \angle H=\varphi_2-\varphi_1\end{array}\right\} \tag{2-6}$$

式(2-3)和式(2-5)就是机械阻抗的基本定义。可知，机械阻抗和导纳均为复数，是以 $i\omega$ 为参量的复变函数。它们都是频域函数，而不是时域函数。为了将实函数和复函数区别开，并与后面广义机械阻抗表达式一致，常用下列比较完整的公式来表示机械阻抗：

$$Z(i\omega)=\frac{F(i\omega)}{X(i\omega)}=\frac{F(\omega)}{X(\omega)}e^{i[\varphi_1(\omega)-\varphi_2(\omega)]} \tag{2-7}$$

$$\left.\begin{array}{l}|Z(i\omega)|=F(\omega)/X(\omega)=Z(\omega)\\ \angle Z(i\omega)=\varphi_1(\omega)-\varphi_2(\omega)=\varphi_z(\omega)\end{array}\right\} \tag{2-8}$$

而机械导纳则表示为

$$H(i\omega)=\frac{X(i\omega)}{F(i\omega)}=\frac{X(\omega)}{F(\omega)}e^{i[\varphi_2(\omega)-\varphi_1(\omega)]} \tag{2-9}$$

$$\left.\begin{array}{l}|H(i\omega)|=X(\omega)/F(\omega)=H(\omega)\\ \angle H(i(\omega))=\varphi_2(\omega)-\varphi_1(\omega)=\varphi_H(\omega)\end{array}\right\} \tag{2-10}$$

2.1.2 广义机械阻抗的概念

上述传统的机械阻抗概念是在简谐激励的情况下定义的。当系统的激励(输入)为任意激励时，我们引入广义机械阻抗的概念。在这种情况下，研究系统的激励与响应或输入与输出之间的关系，将采用拉普拉斯变换或傅里叶变换的方法。

激励与响应的拉氏变换或傅氏变换之比，一般称为广义阻抗。广义阻抗的倒数，称为广义导纳。

根据广义机械阻抗的概念，我们把系统在任意激励时的机械阻抗称为传递函数，而把系统在简谐激励时的机械阻抗称为频响函数。很显然，频响函数是简谐激励情况下的传递函数，它是传递函数的一种特例。

一、任意激励时的广义机械阻抗——传递函数

如图2－1所示的单输入、单输出的线性动力学系统。若系统在任意激励$f(t)$作用下所产生的动力响应为$x(t)$，则该系统的广义阻抗可表示为

$$Z(s)=\frac{L[f(t)]}{L[x(t)]}=\frac{F(s)}{X(s)} \qquad (2-11)$$

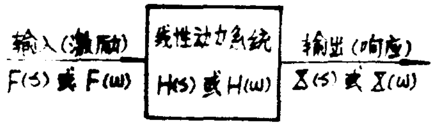

图2－1　线性系统及其输入和输出

式中　$F(s)=L[f(t)]=\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-st}dt$为$f(t)$的拉氏变换；$X(s)=L[x(t)]=\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$为$x(t)$的拉氏变换；$s=a+i\omega$为拉氏算子。

系统的广义导纳则可表示为

$$H(s)=\frac{X(s)}{F(s)} \qquad (2-12)$$

由上式可知，系统的广义导纳$H(s)$可定义为，初始条件为零时，输出的拉氏变换与输入的拉氏变换之比。一般就把系统的广义导纳$H(s)$称为系统的传递函数。

传递函数也可以从系统的运动微分方程导出。定常线性动力学系统的运动微分方程的一般形式可以写成

$$a_n\frac{d^n x(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dx(t)}{dt}+a_0x(t)$$
$$=b_m\frac{d^m f(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}f(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+b_1\frac{df(t)}{dt}+b_0f(t) \qquad (2-13)$$

式中　$x(t)$为系统的输出量；$f(t)$为系统的输入量；各a与b为与系统物理特性有关的常数。

对式(2－13)两边进行拉氏变换，并令其初始条件为零，则有

$$(a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0)X(s)$$
$$=(b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0)F(s)$$

由此可得系统的传递函数

$$H(s)=\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0}{a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0} \qquad (2-14)$$

传递函数表示了系统的输出和输入之间的关系，但它和输入量无关，因而描述了系统的动力特性。若令传递函数$H(s)$的分母多项式等于零，则得系统的特征方程为

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \qquad (2-15)$$

特征方程描述了系统的固有特性，将该方程的根表示在相平面上即为系统的极点，在极点处系统输出为无穷大，所以由特征方程的各个根可求出系统的各阶固有频率。另外，根据特征方程的根还可判别系统的稳定性。当特征方程所有的根都具有负实部，则系统的响应将是收敛的，表明系统是稳定的。如果方程的根中具有正实部，则系统的输出将随时间的增长而发散，表明系统是不稳定的。

若令传递函数H(s)的分子多项式等于零，则得方程

$$b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0 = 0 \qquad (2-16)$$

该方程的根称为系统的零点。在零点处系统输出为零，故由方程的各个根可求得系统的各阶反共振频率。

二、简谐激励时的广义机械阻抗——频响函数

当传递函数表达式中的$s = i\omega$时，拉氏变换即变为傅氏变换。在这种情况下，系统的广义阻抗与导纳，可以表示为激励的傅氏变换与响应的傅氏变换之比，即

$$Z(i\omega) = \frac{F[f(t)]}{F[x(t)]} = \frac{F(i\omega)}{X(i\omega)} \qquad (2-17)$$

$$H(i\omega) = \frac{F[x(t)]}{F[f(t)]} = \frac{X(i\omega)}{F(i\omega)} \qquad (2-18)$$

式中 $F(i\omega) = F[f(t)] = \int_0^\infty f(t) e^{-i\omega t} dt$ 为$f(t)$的傅氏变换；

$X(i\omega) = F[x(t)] = \int_0^\infty x(t) e^{-i\omega t} dt$ 为$x(t)$的傅氏变换。

广义导纳H($i\omega$)即为系统的频响函数。可知，单输入、单输出的线性定常系统的频响函数H($i\omega$)，就是系统输出的傅氏变换与输入（简谐激励）的傅氏变换之比。它是简谐激励情况下的传递函数，因而是传递函数当$s = i\omega$时的一种特殊情形，它也就是系统在简谐激励时机械阻抗的表达形式。

令传递函数表达式（2-14）中的$s = i\omega$，则该式成为

$$H(i\omega) = \frac{X(i\omega)}{F(i\omega)} = \frac{b_m (i\omega)^m + b_{m-1} (i\omega)^{m-1} + \cdots + b_1 (i\omega) + b_0}{a_n (i\omega)^n + a_{n-1} (i\omega)^{n-1} + \cdots + a_1 (i\omega) + a_0} \qquad (2-19)$$

与传递函数相似，令频响函数H($i\omega$)的表达式（2-19）的分母多项式等于零，可得系统的频率方程，求解该方程所得的各个根，即为系统的各阶固有频率。若令频响函数H($i\omega$)的分子多项式等于零，则得系统的反共振频率方程，求解该方程所得的各个根，即为系统的各阶反共振频率。

2.1.3 机械阻抗的各种表达形式

对于线性动力学系统，若其输入为激励力，则其输出即相应的响应量可以是位移、速度或加速度。因此，机械阻抗和导纳相应地亦有各种不同的表达形式，可分别称为位移、速度及加速度阻抗和导纳。另外，随着激励点和响应测量点的位置及方向不同，机械阻抗和导纳的数值也将不同，因此在表达时，应指明它们的位置和方向。于是有驱动点阻抗和导纳、传递阻抗和导纳等表达形式。

一、传递函数的不同表达形式

若系统的输入为任意激励力 $f(t)$，其输出为相应的响应量位移 $x(t)$、速度 $v(t)$、加速度 $a(t)$，则传递函数有下述六种不同的表达形式，结合其物理意义，用不同的术语及符号表示如下：

$$
\left.\begin{array}{ll}
\text{位移导纳（动柔度）} & W(s)=\dfrac{X(s)}{F(s)} \\[2ex]
\text{位移阻抗（动刚度）} & K_D(s)=\dfrac{1}{W(s)} \\[2ex]
\text{速度导纳（机械导纳）} & B(s)=\dfrac{V(s)}{F(s)} \\[2ex]
\text{速度阻抗（机械阻抗）} & Z(s)=\dfrac{1}{B(s)} \\[2ex]
\text{加速度导纳（机械惯量）} & J(s)=\dfrac{A(s)}{F(s)} \\[2ex]
\text{加速度阻抗（动态质量）} & Z_a(s)=\dfrac{1}{J(s)}
\end{array}\right\} \qquad (2-20)
$$

上述六种形式的阻抗与导纳，均有一定的量纲。由于位移阻抗和导纳，分别与力学中的刚度和柔度量纲相同，因此亦称为动刚度和动柔度。同理，加速度阻抗和导纳又称为动态质量和机械惯量。而按照机电比拟，力和速度可与电压和电流相比拟，因此一般窄义的所谓机械阻抗或导纳，指的仅是速度阻抗或导纳。

二、频响函数的不同表达形式

频响函数也有六种不同表达形式，其名词术语与传递函数的相应表达形式相同。为了简便起见，从本小节开始，我们将频响函数的符号 $H(i\omega)$ 简写为 $H(\omega)$，各不同表达形式及傅氏变换的符号中，也都省写 i，请注意各符号仍表示是以 $i\omega$ 为参量的复变函数。

若系统的输入为简谐激励力 $f(t)=Fe^{i\omega t}$，则其输出为相应的响应量，包括：

位移响应 $\qquad x=Xe^{i(\omega t-\varphi)}$

速度响应 $v = Ve^{i(\omega t + \frac{\pi}{2} - \varphi)}$

$$= \dot{x} = i\omega X e^{i(\omega t - \varphi)} = i\omega x$$

加速度响应 $a = Ae^{i(\omega t + \pi - \varphi)}$

$$= \ddot{x} = -\omega^2 X e^{i(\omega t - \varphi)} = -\omega^2 x$$

在简谐激励下，系统输出、输入的傅氏变换之比，也等于其输出、输入的时间函数之比。所以，当选用不同的响应表达式时，频响函数有以下不同的表达形式：

位移导纳（动柔度）$W(\omega)$

$$W(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} = \frac{x(t)}{f(t)} = \frac{Xe^{i(\omega t - \varphi)}}{Fe^{i\omega t}} = \frac{X}{F}e^{-i\varphi} \tag{2-21}$$

位移阻抗（动刚度）$K_D(\omega)$

$$K_D(\omega) = \frac{1}{W(\omega)} = \frac{F}{X}e^{i\varphi} \tag{2-22}$$

速度导纳（机械导纳）$B(\omega)$

$$B(\omega) = \frac{V(\omega)}{F(\omega)} = \frac{v(t)}{f(t)} = \frac{Ve^{i(\omega t + \frac{\pi}{2} - \varphi)}}{Fe^{i\omega t}}$$

$$= \frac{V}{F}e^{i(\frac{\pi}{2} - \varphi)} = \frac{i\omega x}{f} = i\omega W(\omega) \tag{2-23}$$

速度阻抗（机械阻抗）$Z(\omega)$

$$Z(\omega) = \frac{1}{B(\omega)} = \frac{F}{V}e^{-i(\frac{\pi}{2} - \varphi)} = \frac{1}{i\omega W(\omega)} \tag{2-24}$$

加速度导纳（机械惯量）$J(\omega)$

$$J(\omega) = \frac{A(\omega)}{F(\omega)} = \frac{a(t)}{f(t)} = \frac{Ae^{i(\omega t + \pi - \varphi)}}{Fe^{i\omega t}} = \frac{A}{F}e^{i(\pi - \varphi)}$$

$$=\frac{-\omega^2 x}{f}=-\omega^2 W(\omega) \qquad (2-25)$$

加速度阻抗（动态质量）$Z_a(\omega)$

$$Z_a(\omega)=\frac{1}{J(\omega)}=\frac{F}{A}e^{-i(\pi-\varphi)}=-\frac{1}{\omega^2 W(\omega)} \qquad (2-26)$$

三、驱动点阻抗和传递阻抗

在上述频响函数的不同表达形式中，若响应量就是激励点的，一般称为驱动点阻抗或称为原点阻抗。驱动点阻抗的倒数称为驱动点导纳或原点导纳。也就是说，在简谐力激励时，系统的同一点上，力与其响应（位移、速度、加速度）的复数比称为驱动点阻抗。

驱动点阻抗还可分为直接阻抗和交叉阻抗。当力与其响应同方向时，称为直接阻抗（或直接导纳）。当力与其响应不同方向时，称为交叉阻抗（或交叉导纳）。

若响应量不是激励点的，则称为传递阻抗或跨点阻抗。即传递阻抗是在简谐力激励时，系统上一点的力与另一点响应的复数比。传递阻抗的倒数称为传递导纳或跨点导纳。传递阻抗（导纳）也有直接阻抗（导纳）和交叉阻抗（导纳）之分。

系统上 i 点的驱动点阻抗可记为

$$Z_{ii}=\frac{F_i}{X_i} \qquad (2-27)$$

而传递阻抗则可采用下列符号：

$$Z_{ij}=\frac{F_i}{X_j} \qquad (2-28)$$

式中 F_i 代表作用在 i 点的激励力，X_j 代表 j 点的响应量。

四、机械阻抗不同表达形式的选用

由于阻抗与导纳之间，以及位移、速度、加速度阻抗（或导纳）之间，均有确定的、唯一的对应关系，因此在运用机械阻抗的概念分析系统的动力学问题时，采用哪一种表达形式都可以。但在实际选用时，应考虑具体问题的性质和条件，以及解决问题的方便。例如：

在分析系统的动力响应时，一般采用导纳形式，因为导纳乘以激励，即可求得响应。通过实验来确定系统的动态特性时，采用导纳形式也是比较方便的，实验中导纳易于测定。

在分析研究系统的动态特性时，一般均采用位移阻抗或导纳（即动刚度和动柔度）作为描述系统动态特性的数学模型。而速度阻抗和导纳用于机电模拟及理论推导是最合适和方便的。此外，实验测试的阻抗数据，一般是以加速度形式的阻抗与导纳曲线直接给出的，这是因为试验中大多采用加速度传感器。

还可以根据激励频率来选用不同表达形式的机械阻抗。如在低频准静态区，激励力主要和位移恢复力平衡，应选用位移导纳或阻抗；在高频惯性区，激励力主要和惯性力平衡，应选用加速度导纳或阻抗；在共振阻尼区，激励力主要和阻尼力平衡，而阻尼力与速度成正比，故应选用速度导纳或阻抗。又如在研究冲击时，由于冲击量是质量和速度的函数，也应选用速度导纳或阻抗。

2.1.4 频响函数的图示法

频响函数是以激励频率为参量的复变函数，并可用复平面内的一个矢量来表示。若将频响函数 $H(\omega)$ 表示为以频率 ω 为变量的复数形式，则可得

$$\begin{aligned} H(\omega) &= R_e H(\omega) + i I_m H(\omega) \\ &= |H(\omega)| e^{i\varphi(\omega)} \end{aligned} \tag{2-29}$$

式中 $R_e H(\omega)$ 和 $I_m H(\omega)$ 分别称为系统的实频与虚频特性；$|H(\omega)| = \sqrt{[R_e H(\omega)]^2 + [I_m H(\omega)]^2}$ 称为系统的幅频特性，它表示输出对输入的幅值比随频率而变化的关系。

$\varphi(\omega)$ 为系统的相频特性，它表示输出对输入的相位差随频率而变化的关系。可表示为

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg} \frac{I_m H(\omega)}{R_e H(\omega)}$$

以 ω 为自变量（横坐标），$|H(\omega)|$、$\varphi(\omega)$、$R_e H(\omega)$ 和 $I_m(\omega)$ 为因变量（纵坐标）画出的曲线，分别表示幅值、相角、实部与虚部的频率响应特性，可分别称为幅频、相频、实频和虚频特性曲线，亦称为幅频图、相频图、实频图和虚频图，如图2－2和图2－3所示。

在对数坐标上画出的幅频、相频图称为对数坐标图或对数幅频、相频曲线，通常称为伯德（Bode）图。伯德图是以 $\log\omega$ 为横坐标，$20\log|H(\omega)|$（以分贝 dB 为单位）和 $\varphi(\omega)$（以度为单位）分别为纵坐标画出的，如图2－4所示。

对数幅频曲线和相频曲线也可合并成一条曲线，这种曲线称为对数幅——相频曲线，通常称为尼柯尔斯（Nichols）图，如图2－5所示。

如果在一复平面上，作一个矢量，其长度等于某一输入频率 ω_i 时的幅值比 $|H(\omega_i)|$，而它的幅角取为相应的相位角 $\varphi(\omega_i)$，论此矢量就等于 $H(\omega_i)$。当频率 ω 由 $0 \to \infty$ 逐渐变化时，矢量端点的轨迹所描绘出来的曲线就是系统的幅相频率特性曲线，通常称为奈奎斯特（Nyquist）图，如图2－6所示。此图可以给出整个频率域内幅频和相频响应，对了解系统的动力特性比较直观。在实验测试中，描绘机械阻抗的奈奎斯特图时，一般均在矢量端点曲线上标明频率的分布情况。