初中数学竞赛题选

浙 江 教 育 出 版 社

1/3

初中数学竞赛题选

浙江师范大学数学系编

浙 江 教 育 出 版 社

初中数学竞赛题选

浙江师范大学数学系编

浙江教育出版社出版　　浙江嵊县印刷厂印刷
浙江省新华书店发行
开本787×1092　1/32　印张5　字数112000
1985年10月第1版　　印数00,000—100,000
1985年10月第1次印刷
统一书号：7346·331　定价：0.65元

前　　言

源源不断地涌现出优秀人才，这是任何一门科学赖以蓬勃发展的基础，数学也不例外。通过举办数学竞赛及早发现人才并加以培养，自然也是发展数学科学的一项应该重视的工作。近年来，我国青少年在各级竞赛中不断取得优异成绩，说明我国数学发展是有潜力的，令人欣喜的。

为了配合初中学生的数学竞赛，培养同学们的解题能力，开发智力，浙江师范大学数学系选编了这本小册子，把它奉献给广大初中同学和辛勤培育他们的园丁。本书分代数、几何、杂题和综合题三部分，各部分又按难易程度分A、B、C三组。A组是基本题，侧重于基本知识的运用；B组是提高题，具有一定难度；C组是竞赛题，具有较大的灵活性，接近于一般竞赛试题。读者可以根据自己的情况，切合实际地使用本书，如果自己觉得已具有扎实的初中数学基础和灵活的解题技巧，可以跳过A组甚至B组，直接钻研C组。但对一般同学来说，建议还是从基本的出发，先在A组上多下些功夫，不要贪快，欲速则不达，急于求成是没有好处的。对于不参加竞赛的同学，A组、B组题也可作为检查巩固知识和培养解题能力的有益材料。

本书选题在知识上不超越初中大纲，但在解题思路上是多变的，有的题目具有相当的灵活性和难度，如果读者自己一时做不出，也不必气馁。为了提供参考，在本书后半部分附有解

答和提示。但我们希望同学们不要急于去看题解，最好根据题目自己先动脑筋，想想有什么思路可循，用什么办法可解，然后动动手，仔细计算或推证一番，看看自己的思路是否对头、走不走得通，最后还得好好思索一番，想想自己运用了哪些知识和什么方法解出了该题。纵使思路不对、解题失败，也要想想为什么不对，吃一堑长一智，在解题中接受教训和总结经验是具有同等重要意义的。我们相信，通过想算结合，不断总结经验和吸取教训，同学们解题能力是会不断提高的。

在本书的编写过程中，朱钦周、陈建华、蔡乘湘、佘新跃、黄关汉等中学老师和本系的一些教师为我们提供了较多的原始素材，对同志们的帮助，我们表示衷心感谢。为配合1985年全国数学竞赛，应广大中学师生的要求，本书曾于1985年1月内部发行。正式出版前，我们又组织力量对全书作了比较细致的校订，改正了原书中的疏忽和错误，删除了平凡的题目，增添了一些有一定难度和意义较大的题目，补充了一批1985年的竞赛试卷。限于时间和水平，本书缺点和错误一定不少，我们诚恳地欢迎来自各方面的意见和批评。如果这本小册子能够为提高初中同学的解题能力和促进数学竞赛的良好开展，起到一点菲薄的作用，这将是我们最大的欣慰。

徐士英

1985年5月

目　录

一、代数部分习题

A

1．填充：

①$\log_{25}($　　　　$)=1.5$；

②$\log_{(\quad)}4=4$；

③$5^{\log_5 2}=($　　　　$)$；

④$\sin^2 1°+\sin^2 2°+\sin^2 3°+\cdots+\sin^2 88°+\sin 89°$

$=($　　　　$)$。

2．填充：

①若$a<0$，则$|a-|a||=($　　　　$)$；

②$(\sqrt{5}+1)^{1985}-2(\sqrt{5}+1)^{1984}-4(\sqrt{5}+1)^{1983}$

$+1985=($　　　　$)$；

③$a^2-2ab+2b^2-2bc+2c^2-6c+9=0$，

则$a=($　　　　$)$，$b=($　　　　$)$，$c=($　　　　$)$；

④命题：“如果a、b都是奇数，那么$a+b$是偶数”的否命题是(　　　　)，这个否命题是(　　　) 命题。(此空格填上“真”或“假”)。

3．计算：$-\log_3(\log_3\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}})$。

4．求$\lg(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})$的值。

5．已知$\lg 5=0.6990$，问$8^{34}\times 25^{11}$是多少位数？(整数)位

6．计算：$\underbrace{99\cdots9}_{n个}\times\underbrace{99\cdots9}_{n个}+1\underbrace{99\cdots9}_{n-1个}$。

7．设A是锐角三角形的一个内角，且

$$\begin{cases}2\sin A\cdot\cos A-p\cos A=0\\2\cos^2 A-1-p\sin A=0,\end{cases}$$ 求A的度数。

8．化简：$\sqrt{x^2-4x+4}-\dfrac{|1-x|}{1-x}$.

9．当$0<x<1$时，化简：

$$\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-x+\sqrt{1-x}}+\frac{1-\sqrt{1+x}}{1+x-\sqrt{1+x}}\right)^2\cdot\frac{x^2-1}{2}+1。$$

10．化简：

$$\left(\frac{2a+\sqrt{ab}}{3a}\right)^{-1}\left(\frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{a-\sqrt{ab}}-\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right).$$

11．已知$1<a<b+c<a+1, b<c$，证明$b<a$。

12．设m，n，c为实数，解不等式$mx>c-nx$。

13．当$a+b+c=1, a^2+b^2+c^2=2$，$a^3+b^3+c^3=3$时，求下列各式的值：

(1) $ab+bc+ca$；

(2) $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$；

(3) abc。

14．$x^2+2x+3=0$的两根是α,β，若以$\alpha^n+\beta^n$表示S_n，求S_1，S_2，S_3，S_4，S_5的值。

15．设y是与$\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}+\sqrt[3]{2}}$最接近的整数，试求$\sqrt{3-2\sqrt{y}}$的值。

16．求下列函数的定义域

(1) $y=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$；　(2) $y=\dfrac{\lg(1-x)}{|x|-2}$；

(3) $y=\dfrac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}-(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{x+1}$；

17. 求使$\dfrac{1}{3}-0.33333=\dfrac{1}{3\times10^x}$成立的$x$的值。

18. 若x，y分别是$6-\sqrt{13}$的整数部分和小数部分。求$8xy-y^2$的值。

19. 已知：$9+\sqrt{11}$与$9-\sqrt{11}$的小数部分分别是a、b，求$ab-3a+4b-7$的值。

20. 计算$\dfrac{1}{x_1^3}+\dfrac{1}{x_2^3}$，这里$x_1$，$x_2$是方程$2x^2-3ax-2=0$的两个根。

21. 设方程$x^2+x-1=0$的两根为α，β，求以$\alpha^2+\beta^2$和$(\alpha+\beta)^2$为根的二次方程。

22. m为何值时，方程$9x^2-18mx-8m+16=0$的一个根是另一个根的二次方程。

23. 已知方程$x^2-2x-m=0$没有实根，这里m是实数，试判定关于x的二次方程

$$x^2+2mx+1+2(m^2-1)(x^2+1)=0$$

有没有实根，给出你的证明。

24. 已知$\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a$。求证：

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

25. 已知：$x=a^2-bc$，$y=b^2-ac$，$z=c^2-ab$。求证：

$$ax+by+cz=(a+b+c)(x+y+z).$$

26. 已知：$a_1a_2=b_1b_2$，a_1，a_2，b_1，b_2都是正实数，求证：$\dfrac{a_1}{b_1}+\dfrac{a_2}{b_2}\geqslant2$。

27。因式分解：$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$。

28。证明恒等式：

$(a+b+c+d)^2+(a+b-c-d)^3+(a+c-b-d)^3+(a+d-b-c)^2=4(a^2+b^2+c^2+d^2)$。

29。证明：$\lg^2 9>\lg 8.1$。

30。已知：$a-b=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$，　$b-c=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$，求：$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$的值。

31。若$\dfrac{\lg b}{\lg a}+\dfrac{\lg a}{\lg b}=\dfrac{5}{2}$，求$\dfrac{a^3+b^3}{ab+a^2b^2}$的值。

32。求$\lg 2x+\lg(6-x)$的最大值。

33。已知方程组$\begin{cases}ax+3by=c\\2ax-by=5c\end{cases}$的解是$\begin{cases}x-1\\y=-2,\end{cases}$求$a:b:c$。

34。证明：当$a>0$，$b>0$时成立不等式

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)\geqslant 4.$$

35。解方程：$x|x|-3|x|-4=0$。

36。解方程：$\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+6}{x+7}=\dfrac{x+2}{x+3}+\dfrac{x+5}{x+6}$。

37。如果某个两位数与它的各位数字的和的积是405，交换这个数的十位数字与个位数字得到的数与其各位数字和的积是486，求此数。

38。一个三位数，它的十位数字比百位数字小2，个位数字比百位数字的算术平方根大7，求这三位数。

39。若a为自然数，证明：$a(a+1)+1$必不是平方数，而$a(a+1)(a+2)(a+3)+1$必为平方数。

40．设 $\begin{cases}x=\alpha\\y=\beta\end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases}3x^2+5y^2=15\\y=mx\end{cases}$ 的解，

$\begin{cases}x=\gamma\\y=\delta\end{cases}$ 是 $\begin{cases}3x^2+5y^2=15\\3x-5my=0\end{cases}$ 的解。

求证：$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ 是与 m 无关的定值。

41．把 $5+\sqrt{7}$、$5-\sqrt{7}$ 这两个数的整数部分和小数部分分开，设这两个数各自的小数部分分别为 a、b，求 $ab-2a+3b-21$ 的值。

42．甲乙两农场土地面积之比为2：1，去年两农场共收粮食490万斤，其亩产之比为2：3，求去年两农场各收粮食多少万斤？

43．如果每人的工效相同，a个人b天可做c个零件时，b个人做a个零件需要多少天？

44．从能容纳a升且装满酒精的器皿，以代替这部分酒精；以后又倒出同样部分混和液，且再用水倒满，此时器皿中还留有b升酒精，问每次倒出多少升的液体？

45．汽车从A开往B地上行的速度为30公里/小时，从B地返回A地下行的速度为60公里/小时，求汽车往返的平均速度。

46．汽艇与木筏同时离开码头A顺水出发，汽艇顺水航行了96千米再掉转头返回A共需14小时，若已知汽艇在返回途中离码头24千米处与木筏相遇，求汽艇在静水中速度和顺水中速度。

47．某人骑自行车由A城向B城出发，到B城后立即返回，他以同样速度往回骑了一小时后，休息20分钟，继续上路时速度增加4公里/小时，已知A、B两城间的距离为60公

里，他从B返回A所用时间和从A到B的时间一样，问自行车的原速度是多少？

B

48．在$f(x)=\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}}{a^x+b^x}$中，设$a$，$b$为正数，当$x>y$时，试比较$f(x)$和$f(y)$的大小。

49．比较$\sqrt[n-1]{a^n}$，$\sqrt[n]{a^{n+1}}$的大小，其中的$a>0$，$a\neq 1$ n是大于1的整数。

50．如$\dfrac{3}{2}<x<\dfrac{5}{2}$，化简：$\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}$。

51．因式分解：（在实数范围内）

(1)$x^{5n}+x^n+1$；　　(2)$a^2+(a+1)^2+(a^2+a)^2$。

52．因式分解：$x^3-(a+2)x+\sqrt{a+1}$。

53．满足等式$p^2+q^2=7pq$的正实数p、q，能使关于x、y的多项式$xy+px+qy+1$分解成两个一次因式的积，求p，q的值。

54．设a是正整数．证明分式$\dfrac{a^2-a+1}{a^2+a-1}$的分子和分母不含公因数2和3．

55．证明：大于7的整数N，一定可以表示成若干个3和5的和。

56．设从六位的正整数x正中截出两个三位的整数y和z，若37能整除$y+z$，则37也能整除x。

57．设a、b、c、d为整数，且ac，$bc+ad$，bd都能被整数

n整除，试证bc和ad也能被n整除。

58。证明： 对任意自然数n，$n^2(n^2-1)(n^2-4)$能被360整除。

59。设a，b，c为实数，且$a^2+b^2+c^2=bc+ac+ab$，则$a=b=c$。

60。设$x=by+cz$，$y=cz+ax$，$z=ax+by$，

(1)证明：$(a+1)x=(b+1)y=(c+1)z$；

(2)化简：$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}$。

61。若$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}=1$，

求证：$x=1$或$y=1$或$z=1$。

62。假设x、y、z都是实数，且满足$x+y+z=a$，$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2}(a>0)$，试证：$x$、$y$、$z$都不能为负且都不能大于$\frac{2}{3}a$。

63。已知：$p^3+q^3=2$，求证：$p+q\leqslant2$。

64。设a为$\sqrt{2}$的近似值，若$b=\frac{a+2}{a+1}$，试证$\sqrt{2}$在a与b之间，且b比a更接近$\sqrt{2}$。

65。已知$A=\sqrt{3+\sqrt{5}}$，$B=\sqrt{3-\sqrt{5}}$，

求证：$11<A^3-B^3<12<A^3+B^3<13$。

66。证明恒等式：

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

67. 证明不等式：$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{n-1}{n}$。

68. 已知θ满足 $\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=a\\ \sin\theta-\mathrm{co}\theta=b\end{cases}$，且$0^\circ<\theta<45^\circ$，求：$a$和$b$的符号，以及$a$和$b$之间的关系式。

69. 若$abc=1$，试求：

$$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}$$之值。

70. $\frac{x}{x^2+x+1}=a\ \left(a\neq 0,\ a\neq\frac{1}{2}\right)$，求$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$的值。

71. 已知：$\lg(x^2+4)+\lg(y^2+1)-\lg 8=\lg x+\lg y$，求$x$与$y$的值。

72. 解方程$x^4+(x-1)^4=97$。

73. 当a取什么值时，方程$|ax-2y-3|+|5x+9|=0$的的解满足条件：x和y同号。

74. 已知方程$2x^2-9x+8=0$，求作一个二次方程，使它的一个根是原方程两个根的和的倒数，另一根为原方程两根差的平方。

75. 求使得方程$2x^2-(a+1)x+a+3=0$的两根之差等于1的所有a值。

76. Δ是以整数a、b、c为系数的二次方程$ax^2+bx+c=0$的判别式，能否适当地选择a、b、c，使$\Delta=18$?

77. 已知方程$x^2-8x+15=0$的两根可以写成a^2+b^2与a^2 b^2。其中a与b是方程$x^2+px=q$的根，试确定p知q的数值。

78. 已知方程$x^3+(a+b)^2x^2+(1+2a)x+b^2=0$的一个

根为1，求实数a、b的值及另外两个根。

79．解方程$\sqrt{x^2+2x+1}-2|x-2|=5-x$。

80．求$x^2+xy+y^2-3x-3y+3=0$的实数解。

81．如果a、b、k是有理数，且$b=ak+\frac{c}{k}$，证明二次方程$ax^2+bx+c=0$的两根也是有理数。

82．设方程$ax^2+bx+c=0$的系数a、b、c都是奇数，证明这个方程没有整数根。

83．要使抛物线$y=x^2+(a+4)x+(a^2+a+3)$在两个不同点上与x轴相交，实数a值必须在什么范围？

84．求$\log_2(\log_2 32+\log_{\frac{1}{2}}\frac{3}{4}+\log_{\frac{1}{4}}36)$的值。

85．已知$\lg 1.4=0.15$，$\lg 3.5=0.55$，求$\lg 7$。

86．已知：$y=c\sqrt{ax-b}+d\sqrt{b-ax}+ab$，求$\log_b(xy)$的值。

87．$x+2y=10$时，求$\lg x+\lg y$的极大值。

88．已知$f(x)=\frac{x}{1+x^2}$，求$f(x)$的最大值和最小值。

89．已知x，y是满足于$x^2-2xy+y^2-\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+6=0$的实数，求$x+y$的最小值。

90．设$f(x)=|x-p|+|x-15|+|x-p-15|$，其中$0\leqslant p\leqslant 15$，则对于区间$p\leqslant x\leqslant 15$中的$x$来说，$f(x)$的最小值是多少？

91．n个空格排成一行，两人在第一格各放入一枚棋子，每步可向前移1、2或3格，两个人交替走，以先到第n格(最后一格)为胜．问：是先走者还是后走者必胜？怎样取胜？

92．$n(n\geqslant 3)$个学生坐成一圈，依一个指定方向顺次编为1、2、…n号，老师按下述规则叫号：设某一次叫到

第i号，则下一次被叫到的是第i号后面的第i个学生。试证：不论第一次叫到哪一号，至少有一个学生永远叫不到。

93。某厂的三年生产计划，每年比上一年增产机器的台数相同。如果第三年比原计划多生产一千台，那么，每年比上一年增长的百分数就相同，并且第三年生产计划数恰好等于原计划的三年生产总台数的一半，试问原计划每年各生产机器多少台？

94。在一场摩托车比赛中，三辆摩托车同时开动，其中第二辆每小时比第一辆少走15公里，而比第三辆多走3公里，到达终点时第二辆比第一辆迟12分钟，而比第三辆早3分钟，它们在路上没有停留过，求比赛路程是多少？

95。如图，岛屿A和B处在南北方向上，相距为30浬，甲、乙两船分别从A、B两岛同时启航，甲的航速是每小时3浬，航向为方位角120°，乙的航速是每小时6浬，航向为方位角60°，问两船启航后经过多少时间它们的距离为最近？最近距离是多少？

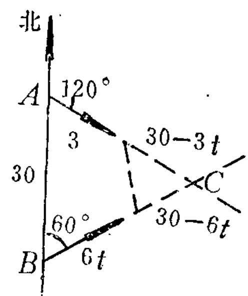

图 1

96。甲乙两人同时从A地出发前往B地，甲前半程用速度a行走，后半程用速度b行走，乙前半时间用速度a行走，后半时间用速度b行走，问甲、乙两人谁先达到？

97。有两种重量（设分别为p与q，且$p>q$）的球五个，涂红、白、黑三种颜色。其中，两个红球重量不同；两个白球重量也不同；一个黑球不知它的重量是p还是q。由于外形上不能

确定球的轻重，请你用一台无砝码的天平（只能比较轻重，不能称出具体重量）称两次，将五个球的轻重都区分出来。试叙述你的称球办法，并说明理由。

C

98. 求平方差等于45的所有自然数对。

99. 证明对于任意正整数N，可以找到这样两个正整数a和b，使$N=\dfrac{b-2a+1}{a^2-b}$。

100. 证明$n^3+\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{1}{2}n-1$对任何正整数$n$都是整数，并且用3除时余2。

101. a、b、c、d是四个有理数，而且满足下列条件：

(1)$d>c$，(2)$a+b=c+d$，(3)$a+d=b+c$。

比较这四个数的大小，并且用不等式表示出来。

102. a，b，c是适合$1<a<b<c$的整数，设$(ab-1)(bc-1)(ca-1)$能被abc整除，回答下列问题：

(1)证明$ab+bc+ca-1$能被abc整除；

(2)求a、b、c。

103. 若a、b、c是非零实数，满足$\dfrac{a+b-c}{c}=\dfrac{a-b+c}{b}=\dfrac{-a+b+c}{a}$，求$\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$的值。

104. 已知a、b、c为非零实数，$a^2+b^2+c^2=1$，