高　等　学　校　教　材

同调代数引论

佟文廷

高等教育出版社

高等学校教材

同调代数引论

佟文廷

高等教育出版社

(京)112号

图书在版编目(CIP)数据

同调代数引论/佟文廷.-北京:高等教育出版社,
1998.5
ISBN 7-04-006239-9

Ⅰ.同… Ⅱ.佟… Ⅲ.同调代数 Ⅳ.O154

中国版本图书馆CIP数据核字(97)第09011号

*

高等教育出版社出版
北京沙滩后街55号
邮政编码:100009 传真:64014048 电话:64054588
新华书店总店北京发行所发行
高等教育出版社印刷厂印装

*

开本850×1168 1/32 印张10.625 字数270 000
1998年5月第1版 1998年5月第1次印刷
印数0 001-3 169

定价10.60元

内容提要

同调代数的思想方法主要来自代数拓扑学中复形的同调理论.它的研究对象主要是环模以及环模上的复形.本书的目的是介绍同调代数中最基础性的也是最精彩的内容.全书分四章:范畴与函子及其在模论中的应用;特殊模与相应的维数;环模复形的同调理论;谱序列.本书可供数学系的本科生、研究生作为学习本课程的教材,也可供希望了解或用到同调代数的高校教师与数学工作者参考.

目　　录

引言 …… 1

第一章　范畴与函子及其在模论中的应用 …… 3

§1 范畴 …… 3

§2 函子与自然变换 …… 17

§3 环模的张量积与函子⊗ …… 29

§4 模正合列与图追踪法 …… 46

§5 函子 Hom 与⊗的正合性 …… 58

§6 直和与直积 …… 68

§7 预加法范畴中 Hom、⊗与直和、直积的关系 …… 81

第二章　特殊模与相应的维数 …… 102

§1 投射模与投射维数 …… 102

§2 内射模与内射维数 …… 118

§3 平坦模与弱维数 …… 143

第三章　环模复形的同调理论 …… 166

§1 复形的同调函子与连接同态 …… 166

§2 导出函子与长正合列 …… 183

§3 右导出函子 Ext 及其应用 …… 202

§4 左导出函子 Tor 及其应用 …… 227

§5 泛系数定理及其应用 …… 246

第四章　谱序列 …… 259

§1 过滤与谱序列 …… 259

§2 谱序列的收敛及对双复形的应用 …… 270

§3Grothendieck 谱序列及其对群同调理论的应用 …… 283

§4Grothendieck 谱序列对环模同调的应用 …… 295

参考文献 …… 314

索引 317
常用记号说明 331

引　言

同调代数初成于本世纪 40 年代中期,是由著名数学家 S. Eilenberg 与 S. MacLane 等人的一系列重要工作奠基而成的一门学科.它的思想方法主要来自代数拓扑学中复形的同调理论,它的研究对象主要是环模以及环模上的复形.在发展的过程中,同调代数充分地使用了范畴论中的方法与理论(因此使同调代数的一些结果可应用于更广的对象),并以 Hom、$\otimes$以及它们的导出函子 Ext、Tor 作为最基本的函子.所以它能有效地给出环类的一些同调不变量(同调维数),使同类的环(尤其是同构的环)具有相同的同调不变量,从而给环论的研究提供了一个有力的新工具.最先引人注目的纯环论形式的 Krull 猜测——正则局部环为 UFD(唯一分解整环)——于 50 年代末以同调方法成功地得以解决,由此给出十分重要的一条定理(Auslander－Buchsbaum－Nagata 定理). 70 年代以后的一些有名的抽象代数书,如 N. Jacobson 的[Jac, 80]、S. Lang 的[L,84]、P. M. Cohn 的[Co,79]等,都设专章较全面地介绍同调代数的基本内容.现在,同调代数作为一种有用的工具已被应用于群论、交换代数、代数几何、微分几何、代数拓扑、微分拓扑、数论、偏微分方程、非交换调和分析等学科,并越来越受到重视.基于这些应用与同调代数理论本身的需要,通常总是约定所研究的环都有单位元且为结合环(对乘法满足结合律的环),研究的模都是酉模(即环的单位元 1 与模的任意元 x 之积都仍为 x).我们在本书中也遵从这些约定.同时,在不指明左模或右模时都指左模.

本书的目的是介绍同调代数中最基础性的,也是最精彩的内

容,可供数学系的本科生、研究生作为学习本课程的教材.大体上说,作为同调代数最基础部分的前两章可作为数学系高年级本科生选修课教材,前三章则可作为非代数方向或非专攻同调代数的代数方向的硕士生与博士生的教材.作者于1993年秋曾用前三章为南开数学所与南开大学数学系八个方向的硕士生与博士生讲过此课,计用48学时,效果是很好的.第四章(谱序列)有一定的难度.作者根据十余年来在南京大学积下的讲稿尽量地将这一部分写得易于为读者接受,希望代数方向、拓扑方向以及对同调代数有兴趣的研究生能基本掌握这一章的内容.本书也可供希望了解同调代数的有关高校教师与数学工作者参考.由于本书的目的主要是介绍同调代数的基本理论与方法,尽管对环的同调理论已比国外大多数同调代数书介绍得更多,也吸收了不少近几年的新结果,但还有一些更进一步的内容没能详细写入.有兴趣的读者可参看周伯壎先生的专著[周,88].

本书的各节都力求系统性与完整性.比如第二章的三节,每节中都是完整地介绍一种重要的模类以及相应的同调维数,可视为是三个较完整的讲座.在用作教材时,较长的节可分两次讲授,对程度较高的学生也可一次讲完.根据我们过去的经验,这是有一定的优点的,尤其是便于读者查阅或复习.

本书各节后面都附有少量经我们精选的习题,大部分难度不大,但用到的方法却是最基本的.根据作者十余年的教学体会,认真地做这些习题对读者是很有益处的.做完这些习题仍有余力的读者还可在书末列出的参考书中再选做一些.

本书是在丁石孙教授、刘绍学教授以及国家教育委员会首届高等学校数学与力学教学指导委员会代数与数论教材建设组诸先生的鼓励下完成的.在书写过程中经常受到业师周伯壎教授的教诲与帮助,在此表示衷心的感谢.

佟文廷

1996年6月23日于南京大学

第一章　范畴与函子及其在模论中的应用

在本章中,我们将介绍范畴论中最基本的一些概念与基本结果.为了不使新概念过分集中,有关范畴与函子的其他内容将穿插到本书后面各有关章节中,边介绍边应用.本章中的重点是:范畴与函子的定义及基本结果、正合列与图追踪法、Hom 与$\otimes$函子.尤其是正合列与图追踪法,这是同调代数最基本的技巧,读者宜熟习之.

§1　范　　畴

数学的各分支都是研究一些对象类以及对象间的联系与分类.范畴的概念与理论给出了这方面最好的概括.

最早为范畴论奠基的是 1945 年 S. Eilenberg 与 S. MacLane 的论文[EM,45](自然等价性的一般理论).1971 年 S. MacLane 又写出一本适用于各个方向数学家的范畴论专著[M,71].目前,范畴论在计算机科学中得到了成功的应用,国内外不少大学的计算机系已开设了范畴方面的课程.

本节中为避免新概念过多的集中,只介绍最基本的概念与理论,其他的一些重要概念将分散到用到它们的章节.

先介绍范畴的定义.一般的读者将它联系到线性代数中线性空间的理论,就不会觉得太抽象了.

定义 1　称 $\mathscr{C}$ 是一个范畴(category)是指 $\mathscr{C}$ 有如下的三个组成部分 1,2,3,并满足下面的三条公理 C_1,C_2,C_3:

1. $\mathscr{C}$ 有由**对象**(object)$A,B,C,\cdots$组成的类 $\mathrm{Ob}\mathscr{C}$,称为 $\mathscr{C}$ 的对

象类;

2. 对 $\mathscr{C}$ 的任两个对象 A,B,都对应一个集合 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$(常简记为 $\mathrm{Hom}(A,B)$ 或 $\mathscr{C}(A,B)$,$\mathrm{Mor}(A,B)$),其元素称为(由 A 到 B 的)**态射**(morphism)或箭头(arrow);

3. 有态射的合成法则:对任意的对象 A,B,C 与 $\sigma\in\mathrm{Hom}(A,B)$ 以及 $\tau\in\mathrm{Hom}(B,C)$,有唯一的 $\varphi\in\mathrm{Hom}(A,C)$,记为 $\varphi=\tau\sigma$,称为 σ 与 τ 的合成;

C_1　不相交性:除非 $A=C$ 且 $B=D$,$\mathrm{Hom}(A,B)\cap\mathrm{Hom}(C,D)=\varnothing$;

C_2　结合性:对任意的对象 A,B,C,D 与任意的 $\sigma\in\mathrm{Hom}(A,B)$,$\tau\in\mathrm{Hom}(B,C)$,$\psi\in\mathrm{Hom}(C,D)$,

$$\psi(\tau\sigma)=(\psi\tau)\sigma;$$

C_3　恒等态射的存在性:对任意的对象 A,必有 $I_A\in\mathrm{Hom}(A,A)$ 使对任意的对象 B,C 及 $\sigma\in\mathrm{Hom}(A,B)$,$\tau\in\mathrm{Hom}(C,A)$,必有

$$\sigma I_A=\sigma$$

$$I_A\tau=\tau$$

若 $\mathscr{C},\mathscr{D}$ 为两个范畴,满足 $\mathrm{Ob}\mathscr{D}\subseteq\mathrm{Ob}\mathscr{C}$ 且对任意的 $A,B\in\mathrm{Ob}\mathscr{D}$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A,B)\subseteq\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$$

则称 $\mathscr{D}$ 为 $\mathscr{C}$ 的**子范畴**(subcategory).若又有

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A,B)=\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$$

则 $\mathscr{D}$ 又称为 $\mathscr{C}$ 的**全(满)子范畴**(full subcategory).

为了说明这个基本定义,我们提出几点"注".

注 1　今后我们以"$\forall A\in\mathrm{Ob}\mathscr{C}$"或"$\forall A\in\mathscr{C}$"表示"$A$ 为范畴 $\mathscr{C}$ 的任意对象".从定义 1 中可看出:$\forall A\in\mathscr{C}$,$I_A\ \exists\,|$("$\exists\,|$"表"存在唯一",如只用"$\exists$"则只表"存在").事实上,设 I'_A 也是对象 A 的恒等态射,则由 C_3 知

$$I'_A = I'_A I_A = I_A$$

注 2　容易看出,在范畴 $\mathscr{C}$ 中对象类 $\mathrm{Ob}\mathscr{C}$ 与 $\{I_A \mid A \in \mathrm{Ob}\mathscr{C}\}$ 是一一对应的.因此,在范畴论中有时只研究态射及其合成而忽略对象.于是范畴论又被称为"箭头理论".

注 3　注意集合与类(class)的区别.集合可看成是有基数的"小类".我们可以说"一切 Abel 群组成的类",而不能说"一切 Abel 群组成的集合".否则,因一切 Abel 群之直和仍为 Abel 群,会导致矛盾.

当范畴 $\mathscr{C}$ 的对象类 $\mathrm{Ob}\mathscr{C}$ 为集合时,又称 $\mathscr{C}$ 为**小范畴**(small category).

注 4　即使对小范畴,态射也未必为映射,更未必为同态(但映射或同态都是适当范畴中的态射).因此,定义单态射、满态射需用它法(见后).我们来看一个例子.

例 1　令 S 为乘法幺半群(monoid),则 S 为一个集合.定义范畴 $\mathscr{C}$ 使 $\mathrm{Ob}\mathscr{C}=\{*\}$,$\mathrm{Hom}(*,*)=S$,态射合成由 S 中的乘法给出(容易验证 $\mathscr{C}$ 满足范畴定义的一切要求).由于 $*$ 仅是一个记号,它不是由元素组成的集合,因此 $\tau \in \mathrm{Hom}(*,*)$ 不是通常的映射,更不是同态.

尽管如此,在范畴论中对态射 $\sigma \in \mathrm{Hom}(A,B)$(也记为 $A \xrightarrow{\sigma} B$ 或 $\sigma: A \to B$),仍称 A 为 σ 的**定义域**(domain),称 B 为 σ 的**值域**(codomain).

注 5　在范畴 $\mathscr{C}$ 中,$\mathrm{Hom}(A,B)$ 可为空集.

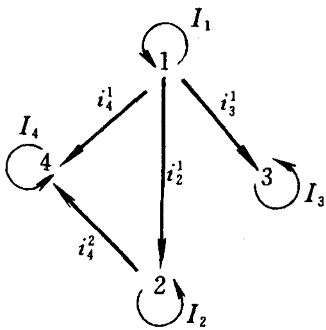
例 2　设 X 为一个偏序集(poset)(即有关系"$\leqslant$"使(1) $x \leqslant x$, $\forall x \in X$; (2) $x \leqslant y$, $y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$, $\forall x, y, z \in X$; (3) $x \leqslant y$, $y \leqslant x \Rightarrow x = y$, $\forall x, y \in X$.比如取 X 为正整数集,用"$\leqslant$"表"整除"即可).取 $\mathrm{Ob}\mathscr{C} = X$,定义

$$\mathrm{Hom}(x,y) = \begin{cases} \{i_y^x\}, & \text{若 } x \leqslant y \\ \varnothing, & \text{其他情况} \end{cases}$$

且

$$i_z^y i_y^x = i_z^x, \quad \text{当 } x \leqslant y \leqslant z \text{ 时}.$$

对这个范畴 $\mathscr{C}$,若 $x \leqslant y$ 不成立,则 $\mathrm{Hom}(x,y)=\varnothing$. 比如取 $X=\{1,2,3,4\}$,“$\leqslant$”表整除,则相应的范畴 $\mathscr{C}$ 可用如下的有向图表出:



容易看出,$\mathrm{Hom}(j,1)$,$j=2,3,4$,$\mathrm{Hom}(2,3)$,$\mathrm{Hom}(3,2)$,$\mathrm{Hom}(3,4)$等都是空集. 当然,在一般的范畴 $\mathscr{C}$ 中,$\mathrm{Hom}(A,A)$为一个幺半群,其幺元素(单位元)为 I_A.

下面列出几个常见的范畴例子:

范畴	对象类	态射
$\mathbb{AG}$(Abel 群范畴)	全体 Abel 群	群同态
$\mathbb{G}$(群范畴)	全体群	群同态
$\mathbb{R}$ing(环范畴)	全体环	环同态
$\mathbb{S}$(集范畴)	全体集合	映射
$\mathbb{T}$op(拓扑空间范畴)	全体拓扑空间	连续映射
${}_R\mathfrak{M}$(环 R 上的左模范畴)	全体左 R－模	左 R－模同态
$\mathbb{LS}_F$(域 F 上线性空间范畴)	全体 F－线性空间	F－线性空间同态
$\mathbb{TG}$(拓扑群范畴)	全体拓扑群	连续群同态

注 6　不难看出 $\mathbb{AG} = {}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$. 因此环模的理论是 Abel 群论的推广.(不熟悉环模的读者可先参见本章后面 § 3 中的定义)

下面我们来定义同构态射、满态射与单态射.

定义 2　设 $\mathscr{C}$ 为一个范畴, $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$, $\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A)$ 使 $\sigma\tau = I_B$ 且 $\tau\sigma = I_A$, 则称 σ, τ 为**同构**(态射), 也称为**等价**(态射)或**可逆态射**, 且称对象 A, B 为**同构的**(等价的), σ, τ 又互称为**逆态射**.

设 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$, 若对使 $gf = hf$ 的 $g, h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, C)$ 都必有 $g = h$(即 f 右可消), 则称 f 为**满态射**(epic morphism), 常记为 $A \overset{f}{\twoheadrightarrow} B$.

设 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A)$, 若对使 $fg = fh$ 的 $g, h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, B)$ 都必有 $g = h$(即 f 左可消), 则称 f 为**单态射**(monic morphism), 常记为 $B \overset{f}{\rightarrowtail} A$.

这两个定义可分别图示如下(注意二者的区别只在于"箭头改号"而已!):

f 为满态射 $(A \overset{f}{\twoheadrightarrow} B)$: 交换图

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[dr, "gf=hf"'] & B \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "h"] \\
& C
\end{tikzcd}
\Rightarrow g = h
$$

f 为单态射 $(A \overset{f}{\rightarrowtail} B)$: 交换图

$$
\begin{tikzcd}
A & B \arrow[l, tail, "f"'] \\
& C \arrow[u, shift right, "g"] \arrow[u, shift left, "h"'] \arrow[ul, "fg=fh"]
\end{tikzcd}
\Rightarrow g = h
$$

这里顺便地明确一下交换图(可换图, 交换图表)(commutative diagram)的含意. 在一个含对象与态射的箭头图中, 若从图中

任一对象出发到另一对象有两条或更多的(由同向箭头接起来的)路径相通,则顺着这些路径(沿箭头方向)的态射合成都相等,这样的图就称为交换图.对比较复杂的图只需检查各网孔(如三角形、四边形网孔等)是否为交换图,即知该图是否交换.

本书中出现的图都指交换图.

现在我们来看看同构与满态射、单态射的关系如何.先来证明如下定理.

定理 1　在任意范畴中,同构(等价)必为满态射与单态射.

证　在一个范畴中,若 $\sigma: A\to B$ 为同构,则有 $\tau: B\to A$ 使 $\sigma\tau = I_B$, $\tau\sigma = I_A$. 注意到对 $\forall h, g\in \mathrm{Hom}(B, C)$,若有 $h\sigma = g\sigma$,两端右合成于 τ 则得

$$h(\sigma\tau) = g(\sigma\tau)$$

即 $hI_B = gI_B$,故 $h = g$. 于是 σ 为满同态.类似地,可证 σ 为单态射. □

注 7　定理 1 之逆不真.这由下例即知.

例 3　在$\mathbb{T}$op(拓扑空间范畴)中取 $X=\mathbb{R}$(带离散拓扑的实数集), $X'=\mathbb{R}$(带通常的绝对值给出的拓扑).令 $\sigma: x\longmapsto x'=x$,则 $\sigma: X\to X'$ 为连续映射(开集的原象仍为开集),因此 $\sigma\in \mathrm{Hom}(X, X')$,且为满、单态射.但 σ 不是$\mathbb{T}$op 中的同构.因为其逆态射不存在($[0,1]$在 X 中为开集,它对 σ 之逆映射的原象仍为$[0,1]$,但$[0,1]$在 X' 中不是开集).

由定理 1 与此例知,在一般范畴 $\mathscr{C}$ 中,

$$f \text{ 为同构(态射)} \gneqq f \text{ 为满、单态射}.$$

注 8　容易证明:在$\mathbb{S}$、$\mathbb{AG}$、$\mathbb{G}$、${}_R\mathfrak{M}$ 诸范畴中,

$$f \text{ 为单态射} \Leftrightarrow f \text{ 为单映射(同态)}$$

$$f \text{ 为满态射} \Leftrightarrow f \text{ 为满映射(同态)}$$

(对这些范畴,单、满映射(同态)的定义如常,即对 $f: A\to B$,若 $\forall x\neq y\in A$, $f(x)\neq f(y)$,则称 f 为单映射(同态).若 $\forall b\in B$ 都 $\exists a\in A$ 使 $f(a)=b$,则称 f 为满映射(同态)).

值得注意的是，在有些范畴中，并不完全如此．比如在环范畴 $\mathbb{R}\mathrm{ing}$ 中，

$$f\text{ 为单态射}\Leftrightarrow f\text{ 为单同态}$$

$$f\text{ 为满态射}\underset{\Leftarrow}{\not\Rightarrow} f\text{ 为满同态}$$

为说明这里的“$\not\Rightarrow$”，给出一个具体例子即可．

例 4　考察整数环 $\mathbb{Z}$、有理数域(环) $\mathbb{Q}$ 与实数域(环) $\mathbb{R}$．设 $f: \mathbb{Z} \rightarrowtail \mathbb{Q}$ 为嵌入映射．显然 f 为环的(单)同态，但不是满同态．由于对任意的环同态 $g,h:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ 分别由限制同态 $g|_{\mathbb{Z}}$，$h|_{\mathbb{Z}}$ 唯一确定．由此，$gf=hf$ 时必有 $g=h$，即 f 为满态射．这说明 f 为 $\mathbb{R}\mathrm{ing}$ 的满态射但非(环的)满同态．

注意这个 f 是 $\mathbb{R}\mathrm{ing}$ 的满、单态射，但不是环对象间的同构．这又一次地说明定理 1 之逆不真．

有了定义满、单态射的经验(主要是“箭头改号”)，我们可以较容易地介绍反范畴与对偶原理．

定义 3　设 $\mathscr{C}$，$\mathscr{C}^{\circ}$ 为两个范畴，它们满足如下条件：

(i) $\mathrm{Ob}\mathscr{C}=\mathrm{Ob}\mathscr{C}^{\circ}$，当 $A,B,C,\cdots\in\mathrm{Ob}\mathscr{C}$ 作为 $\mathscr{C}^{\circ}$ 中的对象时，分别记为 $A^{\circ},B^{\circ},C^{\circ},\cdots$；

(ii) $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)=\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\circ}}(B^{\circ},A^{\circ})$，$\mathscr{C}$ 中的 $A\xrightarrow{\sigma}B$ 即 $\mathscr{C}^{\circ}$ 中的 $A^{\circ}\xleftarrow{\sigma^{\circ}}B^{\circ}$(反转箭头)；

(iii) $\mathscr{C}$ 中的交换图：

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, "\tau\sigma"'] & B \arrow[d, "\tau"] \\
 & C
\end{tikzcd}$$

即 $\mathscr{C}^{\circ}$ 中的交换图：

$$
\begin{tikzcd}
A^\circ & B^\circ \arrow[l, "\sigma^\circ"'] \\
& C^\circ \arrow[u, "\tau^\circ"'] \arrow[ul, "\sigma^\circ\tau^\circ"]
\end{tikzcd}
$$

即

$$\sigma^\circ\tau^\circ=(\tau\sigma)^\circ$$

则称 $\mathscr{C}^\circ$ 为 $\mathscr{C}$ 的**反范畴**(opposite category),也称 $\mathscr{C}^\circ$ 为 $\mathscr{C}$ 的**逆范畴**或**对偶范畴**(dual category).

容易看出:$(\mathscr{C}^\circ)^\circ=\mathscr{C}$ 且 $\mathscr{C}$ 中的交换图经"对象、态射加圈,反转箭头"后即得 $\mathscr{C}^\circ$ 中相应的交换图.

反范畴的重要性主要在于它提供了如下的**对偶原理**(duality principle):

设 S 为一句对 $\mathscr{C}$ 与 $\mathscr{C}^\circ$ 都有意义的陈述(说明概念,提出命题等),$S(\mathscr{C})$,$S(\mathscr{C}^\circ)$ 分别为 S 在 $\mathscr{C}$,$\mathscr{C}^\circ$ 中的具体体现.将 $S(\mathscr{C}^\circ)$ 经"$\mathscr{C}^\circ$ 中对象与态射去掉圈'$\circ$',$\mathscr{C}$ 中对象与态射加圈'$\circ$',并反转箭头"后所得的陈述记为 $S^\circ(\mathscr{C})$.我们称 $S^\circ(\mathscr{C})$ 为 $S(\mathscr{C})$ 的**对偶陈述**.

由此可产生对偶概念(如单态射与满态射为对偶概念)、对偶命题、对偶方法等.常称此为对偶原理.它主要有如下的两个作用:

(1) 若 $S(\mathscr{C})$ 与 $S(\mathscr{C}^\circ)$ 都是成立的定理,则 $S^\circ(\mathscr{C})$ 与 $S^\circ(\mathscr{C}^\circ)$ 也是成立的定理,无需再证.常能"举一反二".

事实上,由 $S(\mathscr{C}^\circ)$ 与 $S^\circ(\mathscr{C})$ 等价知 $S^\circ(\mathscr{C})$ 成立,由 $S(\mathscr{C})$ 与 $S^\circ(\mathscr{C}^\circ)$ 等价知 $S^\circ(\mathscr{C}^\circ)$ 成立(将 $\mathscr{C}^\circ$ 看作 $\mathscr{C}^{\circ\circ}$).

(2) 有了 $\mathscr{C}$ 中的定理 S 常可启发我们得出 $\mathscr{C}$ 中的定理 S°(比如检查 S 的证明,看看经对偶翻译后是否仍有效或另用它法去证.**在对偶翻译证明有效时,S° 的证明不必写出,指出"对偶地可证"即可).同样地由一个概念可引出一个对偶概念.**

以处理下述定义作例.

定义 4　设$\mathscr{C}$为范畴.若$I\in \mathrm{Ob}\mathscr{C}$满足

$$|\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(I,A)|=1,\quad \forall A\in \mathrm{Ob}\mathscr{C}$$

则称 I 为$\mathscr{C}$的一个**始对象**(initial object),这里$|X|$表示集合 X 的元素数或基数.

令 $S(\mathscr{C})$为定义 4,$S(\mathscr{C}^\circ)$为$\mathscr{C}^\circ$中始对象的定义,即“若 $I^\circ\in \mathrm{Ob}\mathscr{C}^\circ$满足$|\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^\circ}(I^\circ,A^\circ)|=1,\forall A^\circ\in \mathrm{Ob}\mathscr{C}^\circ$,则称 I°为$\mathscr{C}^\circ$的一个始对象”.注意到

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^\circ}(I^\circ,A^\circ)=\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,I)$$

经对偶翻译即得 $S^\circ(\mathscr{C})$,这就得到一个对偶定义.今后对于对偶定义、对偶定理(命题)采用相同的编号,但其中之一的编号数码的右上角加“∘”,以便于读者对照.

定义 4°　设$\mathscr{C}$为范畴.若$I\in \mathrm{Ob}\mathscr{C}$满足

$$|\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,I)|=1,\quad \forall A\in \mathrm{Ob}\mathscr{C}$$

则称 I 为$\mathscr{C}$的一个**终对象**(terminal object).

若 Z 同时为$\mathscr{C}$中的始对象与终对象,则称 Z 为$\mathscr{C}$的一个**零对象**(null object).

这样,我们就得到一对对偶概念(始对象与终对象)以及一个自对偶的概念(零对象).

再来看几个例子.

例 5

$\mathbb{S}$(集范畴)无始对象与零对象,有 1 个终对象(单元集);

$\mathbb{N}$(正整数集以“整除”作为“$\leqslant$”,用例 2 的方法给出的范畴)有 1 个始对象,无 终对象,因此也无零对象;

$\mathbb{N}^\circ$有 1 个终对象,无始对象,因此也无零对象;

$\mathbb{G}$(群范畴)有 1 个始对象,1 个终对象与 1 个零对象,即单位元群.

对下图给出的范畴(点表对象,箭头表态射,箭头全体即态射全体,但省去各对象到自身的恒等态射):