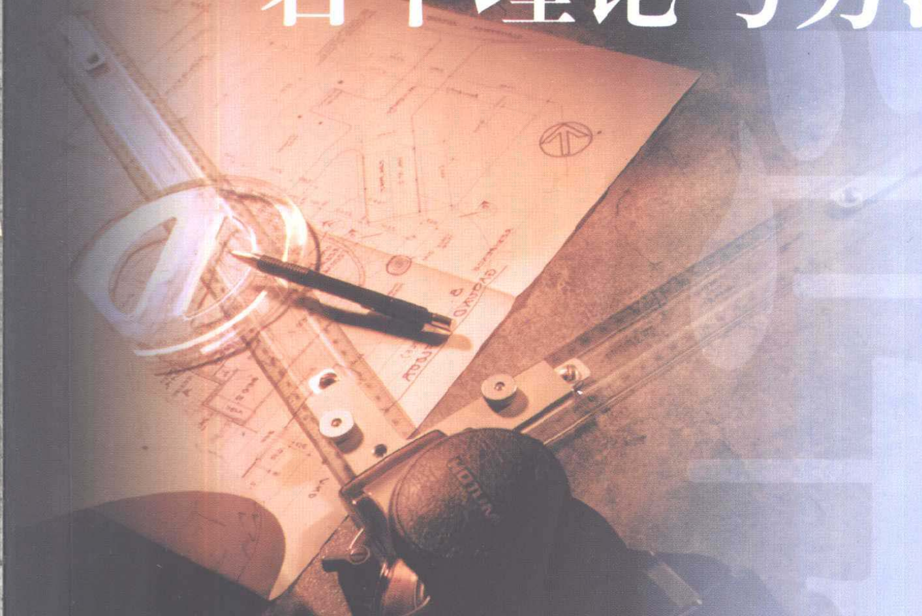
大学教材系列

当代数学的若干理论与方法

郑 鍊/编著

华东理工大学出版社



当代数学的若干理论与方法

郑　铼　编著

华东理工大学出版社

内 容 提 要

本书分两篇，共六章。第一篇即 1 ~ 3 章，回顾数学基础问题的背景，阐明 20 世纪前半叶数学基础理论的主要成果，即无穷集合论的创立、形式公理化方法的产生和结构主义数学观的形成。本书第二篇即 4 ~ 6 章，从三组关系着手，即连续与离散、确定与随机、演绎与算法，阐述 20 世纪后半叶数学发展的特点和趋势。

就所论专题，本书仅考察并讨论最基本的概念、原理和方法，希望读者对当代数学有一个整体的、发展的认识与理解，逐步更新数学观念。有兴趣的读者可结合有关学科的教材及所列参考文献作更深入的研究。

本书可用作高等师范院校数学系本科高年级的选修课教材、数学系研究生的基础课教材和中小学数学教师的进修教材。

图书在版编目(CIP)数据

当代数学的若干理论与方法/郑锞编著．—上海：华东理工大学出版社，2002.11

ISBN 7 - 5628 - 1321 - 3

Ⅰ.当…　Ⅱ.郑…　Ⅲ.①数学理论②数学方法

Ⅳ.01 - 0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 075884 号

当代数学的若干理论与方法

dang dai shu xue de ruo gan li lun yu fang fa

郑锞 编著

出版	华东理工大学出版社	开本	850×1168　1/32
社址	上海市梅陇路 130 号	印张	5
邮编	200237　电话 (021)64250306	字数	112 千字
网址	www.hdlgpress.com.cn	版次	2002 年 11 月第 1 版
经销	新华书店上海发行所	印次	2002 年 11 月第 1 次
印刷	上海市崇明县裕安印刷厂	印数	1 - 3050 册

ISBN 7 - 5628 - 1321 - 3/O·67　　定价：12.00 元

序

这是一本很有特色的高等师范院校数学教科书。

我国能否在21世纪跻身于世界数学强国之列，中小学数学教育是一个重要环节。所以，对于当代数学基本的理论与方法，中小学数学教师应有必要的认识与理解。作者编写本书的目的正在于此。

本书第一篇（1～3章）是关于数学基础理论的讨论。对数学教师而言，数学基础的意义是不言而喻的。除集合论与公理化外，本篇还包含了“结构主义”的内容。20世纪六七十年代是“结构主义”鼎盛时期。受其影响，曾有西方国家和前苏联的“新数学”运动。虽然这场运动一波三折，未能实现预期的目标，但这场运动倡导了新的数学观、新的数学能力观和数学人才观，其意义是深远的。

本书第二篇（4～6章）涉及数学建模和计算机技术，特别是用离散的或随机的方法解决一些非传统领域的问题。这确是20世纪后半叶数学发展的

重要内容之一,以此来体现当代数学的观念与方法,见微而可以知著。考虑到读者的专业基础和数学教师应有的知识结构,作者对本篇题材的选择显然颇费思索。作者从若干具体问题出发来组织内容,综合地处理,并充分结合计算机上的操作实践。

与大多数教科书不同,本书不是就数学的某一分支或某一理论展开,而是力求使读者领略数学的整体和数学自身的规律。如果说数学是一片茂林,则本书不是引导读者去攀缘一棵棵参天大树,而是陪伴读者在林中漫步,让读者自己去体验数学。

郭本瑜

目　录

第一篇　数学基础理论的发展

1　集合论 ……………………………………（3）

1.1　康托集合论的建立 ……………………………（3）

1.2　康托集合论的基本内容 ………………………（8）

1.3　公理集合论简介 ……………………………（25）

练习与思考 ……………………………………（28）

2　公理化 ……………………………………（30）

2.1　实质公理化 …………………………………（31）

2.2　形式公理化 …………………………………（33）

2.3　公理化的意义与局限 ………………………（52）

练习与思考 ……………………………………（54）

3　结构主义 …………………………………（55）

3.1　结构主义理论的背景 ………………………（56）

3.2　数学结构 ……………………………………（57）

3.3　布尔巴基学派的兴衰 ………………………（78）

练习与思考 ……………………………………（79）

第二篇　数学应用方向的开拓

4　差分方程 …………………………………（83）

4.1　差分方程概念 ………………………………（83）

4.2　差分方程的建立 ……………………………（86）

4.3　差分方程的求解 ……………………………（90）

练习与思考 ……………………………………（105）

5 随机性模型…………………………………（107）
5.1 根据概率分布建模…………………………（107）
5.2 马尔可夫链模型……………………………（113）
5.3 排队论模型…………………………………（116）
练习与思考 ……………………………………（123）
6 算法与算法分析……………………………（125）
6.1 算法与计算机程序…………………………（125）
6.2 算法的时间复杂性函数……………………（141）
6.3 算法有效性与算法的比较…………………（144）
练习与思考 ……………………………………（149）

第一篇

数学基础理论的发展

在很长的历史时期里，人们把数学看作是关于现实世界数量关系与空间形式的经验，以及对经验的归纳、总结与抽象；而这些经验和在经验之上生成的理论则如实地反映世界。

直至19世纪罗巴契夫斯基几何建立，人们的数学观开始发生变化。藉助于逻辑，人们不仅研究那些已知其存在的关系与形式，而且研究可能存在的关系与形式。为使研究具有意义而不至成为形式推演的游戏，人们寻求数学统一的理论基础。

我们从无限集合论的创立、形式公理化思想的发展和结构主义数学观的产生三个方面讨论上述问题。

1 集　合　论

19 世纪末,德国数学家格奥尔格·康托(Georg Cantor,1845—1918)创立了无限集合论(Infinite Set Theory),简称集合论。

集合论的根本思想是实无限思想。康托的实无限思想以其明确性、一致性和系统性而区别于以往的任何实无限思想。康托的实无限思想的载体,或者说康托用以思考和阐述他的实无限思想的方法通常被称为集合论方法。集合论方法使实无限概念有了一个统一的逻辑基础,使康托关于实无限的理论得以形式化而成其为一门数学科学。希尔伯特(D. Hilbert)认为"在严格意义上说,只有在康托的集合论中,才开始了对无限真正的研究"。

1.1　康托集合论的建立

人类生活于无限之中。几千年来,人类孜孜不倦地探求着"无限"的真谛,"无限"成为哲学和数学的重要范畴。

人类的无限观虽在细节和表述上有种种形式,但不外乎潜无限(potentially infinite)、实无限(actual infinite)两种观念。一般地、通俗地说,潜无限观念认为无限是不可被"达到"的,正如我们无法"遍历"时空,无法"数尽"一条直线或一段线节上的点,甚至无法"数尽"自然数序列,无限仅仅是

一种永无终结的进程;实无限观念则主张无限可以被“实现”,无论我们能否“遍历”时空,能否“数尽”自然数序列或其他什么无限对象,它们作为一个固定的整体而确实存在着。

据文字记载,潜无限、实无限两种观念的产生,当可追溯到古代希腊的哲学和数学。古希腊人的无限观直接联系于他们的自然观。

爱奥尼亚(Ionia)学派哲学认为物质无限可分,因而永远处于分割的过程中。

德谟克里特(Democritus)的朴素原子论则认为存在着物质的最小不可分粒子,而视物质为这些粒子的无限堆积。

埃里亚(Elea)学派的芝诺(Zeno)以悖论(paradox)形式表达了他对两种无限观的异议。可以认为,他的二分悖论和阿契里斯与龟赛跑悖论是对潜无限观的责难,而飞箭不动悖论和队列悖论则是对实无限观的批评。

此后,柏拉图(Plato)从唯理主义出发,倾向于“不能以经验方法证明而须借助思维才能把握”的实无限思想。亚里士多德(Aristotle)则明确主张无限“只可能是一种潜在的存在而不可能是实在的存在”。

在数学领域,实无限思想表现为视几何形体为原子的行、列、层的总和,德谟克里特曾藉此而求得锥体体积。潜无限观念反映为通过不断增加圆内接(外切)正多边形的边数而计算其面积的方法来求得圆面积,诡辩学派安提丰(Antiphon)的设想为欧多克斯(Eudoxus)著名的穷竭法奠定了基础。

无限观本身在逻辑上的混乱,使在欧几里得之后,古希腊数学对无限概念采取了笼统的回避与排斥的态度。

芝诺(约公元前450年)针对当时关于时间和空间的两种观点——认为时、空是无限可分的和认为时、空是由不可分的微小片段组成的——提出异议,即所谓芝诺悖论。以下陈述引自于亚里士多德的作品《物理》(Physics)。

二分悖论(The Dichotomy):若一条直线段是无限可分的,则为了越过该线段必须先经过其中点,为此又必须先经过其四分之一点,而为此又必须先经过其八分之一点……如此而至于无穷。因此,运动永远无法开始,运动成为不可能。

阿契里斯(Achilles)与龟赛跑:阿契里斯追赶乌龟,当阿契里斯到达乌龟原先出发的地点时,乌龟已到达新的地点;当阿契里斯到达这个新的地点时,乌龟又已到达下一个新地点……阿契里斯永远赶不上乌龟。

飞箭悖论(The Flying Arrow):若时间由不可分的瞬间组成,则在任何瞬间,箭都处于一个固定的位置。因而,箭永远静止不动。

队列悖论(The Formation):两列人数相同的队伍以相同速度相向移动,一列从末端出发,另一列从中间出发,由此得一半的时间等于两倍的时间。

近代极限理论与无穷级数理论固然能给芝诺悖论以数学的、逻辑的阐释,但却又演绎出新的悖论,有所谓抛球悖论:A、B两人相向抛球,A用1/2分钟将球抛给B,B用1/4分钟将球抛给A,A再用1/8分钟将球抛给B,B又用1/16分钟将球抛给A,如此往复无穷。由 $1/2 + 1/4 + \cdots + 1/2^n + \cdots = 1$,问抛球一分钟时,球在谁手中?潜无限论者不承认任何无限过程能够“进行完毕”,所以对此不必作答;实无限论者则不能规避这个问题,却又无从作答。

整个中世纪,哲学和数学领域始终存在着两种无限观。

值得一提的是伽利略(G. Galilei)发现不等长线段上的点之间、自然数与平方数之间可建立一一对应,他认为这是不可思议的,而反对实无限观。

15 世纪前后,作为文艺复兴的一部分,柏拉图的数理哲学重新获得关注,在实无限观基础上建立了数学无穷小方法,并以此方法解决了若干求积问题。17 世纪末,牛顿(H. Newton)和莱布尼兹(G. Leibniz)成功地运用无穷小方法建立了微积分,但他们对无穷小量的解释却是失败的。

进入 19 世纪以后,不少哲学家对那种把无限归结为同一事物之不断重复的观念提出批评。黑格尔(G. Hegel)称这种意义下的无限为消极无限:由 1 过渡为 2,由 2 过渡为 3,一般地由 n 过渡为 $n+1$,在此过程中,无法扬弃有限,无力飞跃到反映真正无限的自然数无限总体。黑格尔认为,真正的无限不停留在有限之不断重复的阶段,不断过渡的进程能够穷竭,而成为一个自我完成了的无限总体。黑格尔称这种无限为积极无限。他又把积极无限表达为"否定之否定"公式。作为积极无限的自然数全体便是一个否定之否定:首先否定了有限的常住性,即肯定了进展;第二个否定是进展之完成,从而真正扬弃了有限;而这个真正的无限同时在更高形式上回复到有限,即高一层次的单体对象。黑格尔的这种观点后来给康托以深刻的影响。

数学家们则态度各异。高斯(C. Gauss)坚持潜无限观:"……我反对把一个无限量当作实体。无限只是无限制地增长。"波尔查诺(B. Bolzano)则维护实无限观,并指出,对无限整体来说,部分可以同总体建立一一对应。但他关于无限之研究的哲学意义远远胜于其数学意义。当时的大多数数学家避免对实无限的明确承认,尽管他们每天在使用无穷级数和实数系。不过就古典分析的要求而言,这种态度

还不至于妨碍他们的具体研究。

柯西(A. Cauchy)是19世纪前半叶坚决的潜无限论者，但恰恰是他关于微积分基础的工作最终导致无限集合论的建立。柯西用极限定义微积分中的无穷小量，朝分析基础精确化迈出关键的一步。继之，魏尔斯特拉斯(K. Weierstrass)给出极限的 $\varepsilon-\delta$ 准则，使极限概念完全摆脱了几何直观而纯粹以实数为基础。但实数系结构问题至此尚未解决。显然，如何认识、解释无限已成为无法规避的问题。

与此同时，数学其他部门的观念也发生了深刻的变化：非欧几何的建立使几何学的对象、方法和应用得到扩展，关于抽象空间的研究开始兴起；群论方法的产生开辟了代数学的新方向，即考察诸如向量、四元数、矩阵、逻辑命题等更一般对象的运算性质。在此情况下，数学迫切需要一门新的理论，来统一地、合理地从整体上看待和处理数学中千差万别的对象。数学的这种需要孕育了无限集合论。

康托在19世纪70年代关于三角级数的工作是他建立集合论的直接动因。康托致力于寻找函数的三角级数表示的唯一性准则。他证明了：若对一切 x，有一个收敛的三角级数表示零，则富里埃系数 a_n、b_n 必俱为零。随后他又证明了，即使在有限个 x 值上级数不收敛，上述结果仍成立，他称使级数不收敛的 x 值为例外值。1872年，他更把研究推广到有无限多个例外值的情形：当这些例外值的分布满足一定条件时，零函数没有非零的富里埃展开式，即函数在 $[-\pi,\pi]$ 上的三角级数表示唯一。为说明无限多个例外值分布上应满足的条件，康托引入了聚点、导集等概念，而这些概念的建立必须以承认无限多个点(数)所作成的整体的存在性为前提。为此，在总结前人关于无限的认识的基础上，特别是汲取了黑格尔的哲学实无限思想，康托以无限集

合的形式给出实无限概念。从 1874 到 1897 年，康托在发表于《数学年鉴》(Mathematische Annalen)和《数学杂志》(Journal für Mathemathik)的一系列文章(这些文章纳入同一个标题：关于无穷的线性点集 Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten)中，建立了集合论的概念体系，创立了无限集合论。

按无限集理论，康托用有理数的无限序列，戴特金(R. Dedekind)用分割分别构造了实数，最终完成了分析基础的精确化；在集合论基础上，先后建立了实变函数论、点集拓扑学等数学的新部门；集合论的思想和方法使几何学、代数学得以迅速发展。时至今日，集合论已深入数学的几乎所有领域，成为整个数学的基础。而集合论的基础作用正是当代数学的特点之一。[1,2]

1.2 康托集合论的基本内容

我们从集合论方法和实无限思想两个角度来考察康托的集合论。诚如前述，集合论的思想和方法是一个统一体，因此，我们对二者的分别考察只能是在完全相对的技术意义之下。

1.2.1 集合论方法

(1) 集合的生成

集合论方法首先是指集合的生成。康托用描述的方法给出集合概念："把在我们直观或思维中的某些确定的、彼此区别的对象作为一个整体来考虑，称之为(这些对象的)集合(set)，而称这些对象为该集合的元素(element)。"康托用记号 $x \in S$ 表示对象 x 是集合 S 的元素，或元素 x 属于(belong)集合 S。康托称不含元素的集合为空集(empty set),记为 $\varnothing$。

显然,集合概念是经离散化等置抽象而获得的。康托把对象整体离散化,对任何对象的整体不予区别。换言之,康托舍弃了物质世界的和数学对象的所有性质、形式和关系的具体限定性,把它们的任意确定的汇集抽象为集合模型。于是,无论什么数学对象的某个确定的整体都可被视为元素的某个集合而遵循联系于集合概念的一切思维原则。

集合概念又是对于使对象组成一个整体的"汇集作用"的存在性抽象。苏联数学家鲁金(Н. Лузин)指出"我们想像有一只封闭的袋子,其中装有某些确定的对象,除此而外别无一物,这只袋子足以表示将对象汇集在一起的作用,由于这个作用才产生了集合。"

集合可按概括性原则(principle of comprehension)生成:$S=\{x \mid p(x)\}$,即任给一个性质 p,所有具有该性质的对象就组成一个集合;集合又可按外延原则(principle of denotation)生成:$S=\{a, b, c, \cdots\}$,由此给出确定其元素的准则,即对象的某种性质或特征,而无论这种性质或特征能否被"显性"地表示出来。于是,给出某集合同给出事物的某种性质、特征具有完全相当的意义。

通常按外延原则定义集合相等概念和子集概念:

定义 1 若对任意的 $x \in S_1$ 有 $x \in S_2$,反之,对任意的 $x \in S_2$ 有 $x \in S_1$(即集合 S_1、S_2 含有完全相同的元素),则称这两个集合相等,记为 $S_1=S_2$;若对任意的 $x \in S_1$ 有 $x \in S_2$(即集合 S_1 的元素都是集合 S_2 的元素),则称 S_1 是 S_2 的子集(subset),或 S_1 含于 S_2(S_2 包含 S_1),记为 $S_1 \subset S_2$ 或 $S_2 \supset$

S_1。

定理 1 若 $S_1 \subset S_2$ 且 $S_2 \subset S_1$，则 $S_1 = S_2$。（证明略）

(2) 集合的运算

集合论方法又指定义集合的运算，从而由给定集合生成新的集合。

集合的并、交、补运算或曰生成集合的并、交、补：

定义 2 设 A、B 是集合，称集合 $\{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$ 为 A 与 B 的并(union)，记为 $A \cup B$。

定义 3 设 A、B 是集合，称集合 $\{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$ 为 A 与 B 的交(intersection)，记为 $A \cap B$。

定义 4 设 A、B 是集合，称集合 $\{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$ 为 A 与 B 的差(difference)，记为 $A - B$；当 $A \supset B$，称 $A - B$ 为 B 对于 A 的补(complement)；设 I 为全集(universal set)，记 A 对于 I 的补为 A^C。

并、交概念可推广至任意多个集合。

集合的并、交、补运算满足一系列算律。这些算律以古典逻辑为基础。

定理 2 集合的并、交、补运算满足算律：

交换律(commutative law) $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$；

结合律(associative law) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

分配律(distributive law) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$，

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

吸收律(absorption law)

$$A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A;$$

$A \cup A^C = I, A \cap A^C = \varnothing, (A^C)^C = A$；

de Morgan 法则 $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$，

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C。$$