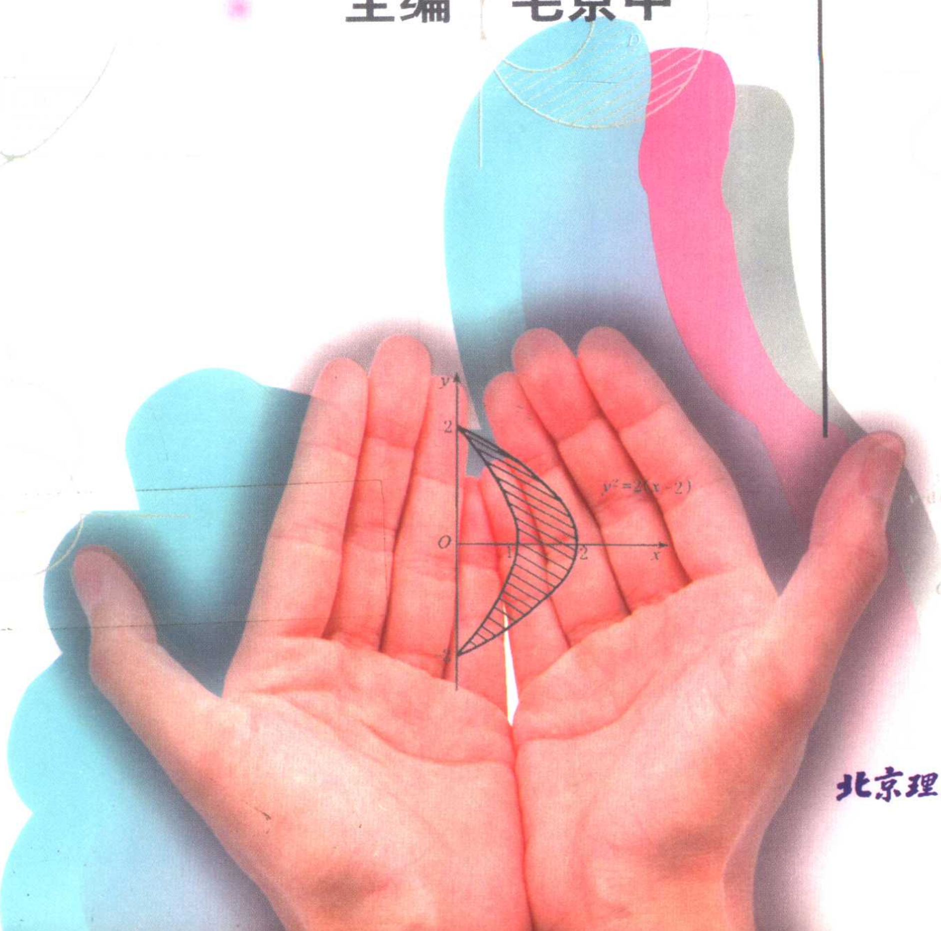
高等数学学习指导

主编　毛京中



北京理工大学出版社

高等数学学习指导

主编　毛京中
编者　陈一宏　崔小弟
　　　李翠哲　苏伟宏

北京理工大学出版社

内 容 简 介

本书是根据原国家教委1995年颁布的高等学校工科生《高等数学课程教学基本要求》编写的。全书共十章，包含函数的极限和连续，一元函数微积分，常微分方程，向量代数与空间解析几何，多元函数微积分，级数。在每章中都叙述了重点内容，运用典型例题讲述了本章的基本概念、方法，相关理论和应用。并且结合例题说明学习中应注意的各种问题，引导学生深入理解高等数学的基本思想和方法。书中有较多的综合题，其中有些是近年来研究生入学考试试题。通过对这类习题的分析研究，可以提高学生的综合解题能力。书中大量的实际应用题，有利于培养学生分析问题、解决问题的能力和应用意识。

本书可作为高等数学课程的辅导教材，也可供从事工科高等数学教学的教师及参加全国研究生入学考试的考生参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/毛京中主编. —北京：北京理工大学出版社，2001.8

ISBN 7-81045-823-X

Ⅰ. 高… Ⅱ. 毛… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2001）第029432号

责任印制：王 军　　责任校对：陈玉梅

北京理工大学出版社出版发行

（北京市海淀区中关村南大街5号）

邮政编码100081　电话(010)68912824

各地新华书店经售

北京国马印刷厂印刷

*

787毫米×1092毫米　16开本　21.25印张　519千字

2001年8月第1版　2001年8月第1次印刷

印数：1--6000册　定价：26.50元

前　言

本书是工科高等数学的学习指导书。编写本书的目的是帮助学生正确理解和掌握高等数学的基本理论，学会对所学知识进行概括和总结，提高学生分析问题和解决问题的能力。

全书共分十章，每章有五部分内容，包括基本要求、主要内容概述、学习中应注意的问题、典型例题、自测题及其解答。我们在编写时力求内容完善，叙述简洁，重点突出。主要内容概述部分不是教材的简单重复与压缩，而是对有关概念、理论及运算进行了系统的归纳和总结，并注意揭示知识的内在联系，典型例题部分包括基本例题和综合例题，侧重于启发学生的解题思路，总结解题规律，提高综合运用所学知识的能力。

建议读者在使用本书时，先看一下每一章的主要内容概述及学习中应注意的问题，正确理解有关概念、定理及其内在联系，掌握各种基本运算的方法，将所学知识的脉络整理清楚，然后再去看典型例题。而看例题时不要急于看解答，最好自己先动脑子想一想，自己动手算一算，实在做不出来再看解答。看完解答后不妨将解答盖上，自己再独立将解答过程写一写，并考虑一下是否还有其他解法。这样，解题能力会提高得较快。

由于我们水平有限，书中缺点和错误在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2001 年 3 月

目 录

第一章　函数的极限和连续

一、基本要求

(1) 理解函数的概念，掌握函数的表示方法.

(2) 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.

(3) 理解复合函数、分段函数及反函数的概念.

(4) 掌握基本初等函数的性质及其图形.

(5) 会建立简单应用问题中的函数关系式.

(6) 理解极限的概念，理解函数左、右极限的概念，以及极限存在与左、右极限之间的关系.

(7) 掌握极限的性质及四则运算法则.

(8) 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

(9) 理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限.

(10) 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.

(11) 了解连续函数的性质，初等函数的连续性，了解闭区间上连续函数的性质(有界性，最大值、最小值定理和介值定理)，并会应用这些性质.

二、主要内容概述

1. 函数概念

(略)

2. 函数的特性

(1) *有界性*　若存在正数 M，对于 (a,b) 内任意一点 x 都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内为有界函数，否则称为无界函数.

(2) *单调性*　若对区间 (a,b) 内任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ (或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$)，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内为单调增加(或减少)函数.

(3) *奇偶性*　设函数 $f(x)$ 在对称区间 $(-l,l)$ 内有定义，若对区间 $(-l,l)$ 内任意点 x，都有

$$f(-x)=-f(x)\qquad (\text{或 } f(-x)=f(x)).$$

则称函数 $y=f(x)$ 在 $(-l,l)$ 内为奇函数(或偶函数).

奇函数的图形关于原点对称；偶函数的图形关于 y 轴对称.

(4) *周期性*　设函数 $y=f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，若存在不等于零的常数 T，对每一个 x 都有

$$f(x+T)=f(x),$$
则称函数 $y=f(x)$为周期函数，一般称 T 中的最小正数为 $y=f(x)$的周期.

3. 基本初等函数、复合函数和初等函数

（1）*基本初等函数* 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

（2）*复合函数* 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，若 $y=f(u)$的定义域包含 $u=\varphi(x)$的值域，则在 $u=\varphi(x)$的定义域 X 上确定的函数
$$y=f(\varphi(x)) \qquad (x\in X)$$
称为由函数 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数，u 称为中间变量.

（3）*初等函数* 由常数和五类基本初等函数经过有限次的四则运算以及有限次的复合步骤并且能用一个式子表示的函数称为初等函数.

4. 极限的定义

（1）*数列的极限* 设有数列$\{x_n\}$和常数 A，如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，有
$$|x_n-A|<\varepsilon,$$
则称数列$\{x_n\}$以 A 为极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，此时称数列$\{x_n\}$是收敛的. 如果数列没有极限，称数列是发散的.

（2）*函数的极限* 设函数 $f(x)$在$(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)(a>0)$内有定义，$A$ 为一常数，如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在正数 X，使当$|x|>X$ 时，有
$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$
则称常数 A 为当 $x\to\infty$时函数 $f(x)$的极限，记为
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A.$$
设函数 $f(x)$在点 a 的某去心邻域内有定义，A 为一常数，如果对于给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有
$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$
则称常数 A 为函数 $f(x)$在点 a 处的极限，记为
$$\lim_{x\to a}f(x)=A.$$
（3）*单侧极限* 如果对$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使当 $0<x-a<\delta$ （$0<a-x<\delta$） 时，有
$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$
则称常数 A 为函数 $f(x)$在点 a 处的右(左)极限，记为
$$\lim_{x\to a^+}f(x)=A \quad \left(\lim_{x\to a^-}f(x)=A\right).$$
类似地可定义 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

单侧极限与双侧极限的关系：
$$\lim_{x\to a}f(x)=A \Longleftrightarrow \lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)=A;$$
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \Longleftrightarrow \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A.$$

5. 无穷小与无穷大

如果在自变量 x 的某种趋向下，函数 $f(x)$ 的极限为零，则称函数 $f(x)$ 在自变量的该趋向下是无穷小.

(1) 极限与无穷小的关系

$$\lim f(x)=A \Longleftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$$

其中 $\lim\alpha(x)=0$.

(2) 无穷小的运算　有限个无穷小的代数和仍是无穷小；有界函数与无穷小的乘积是无穷小；无穷小的乘积是无穷小.

(3) 无穷小的阶及无穷小替换定理　设在自变量的某一趋向下，α 与 β 都是不等于零的无穷小.

① 若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$，则称在该趋向下，$\alpha$ 是 β 的高阶无穷小，记为 $\alpha=o(\beta)$.

② 若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=A(A\neq 0)$，则称在该趋向下，$\alpha$ 是 β 的同阶无穷小，当 $A=1$ 时，称 α 是 β 的等价无穷小，记为 $\alpha\sim\beta$.

③ 若 $\lim\frac{\alpha}{\beta^k}=A\quad(A\neq 0,k>0)$，则称在该趋向下，$\alpha$ 是 β 的 k 阶无穷小.

④ 设 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，若 $\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$ 存在，则 $\lim\frac{\alpha}{\beta}$ 也存在，且 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$；若 $\lim\frac{\alpha' f(x)}{\beta'}$ 存在，则 $\lim\frac{\alpha f(x)}{\beta}$ 也存在，且 $\lim\frac{\alpha f(x)}{\beta}=\lim\frac{\alpha' f(x)}{\beta'}$.

⑤ 几个常用的等价无穷小：当 $x\to 0$ 时，有

$$\sin x\sim x,\ \mathrm{tg}x\sim x,\ \arcsin x\sim x,$$

$$\mathrm{arctg}x\sim x,\ \ln(1+x)\sim x,\ 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$$

$$\mathrm{e}^x-1\sim x,\qquad a^x-1\sim x\cdot\ln a,$$

$$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x.$$

(4) 无穷大　设函数 $f(x)$ 在 a 的某一邻域内有定义，若对于任给的 $M>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $|f(x)|>M$，则称当 $x\to a$ 时，函数 $f(x)$ 是无穷大量，简称无穷大. 记作 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$.

(5) 无穷大与无穷小的关系　在自变量的某种变化趋势之下，若 $f(x)$ 为无穷大，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小；若 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷大.

6. 极限的性质

(1) 有界性　若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，则总存在常数 $\delta>0$ 及 $M>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)|\leqslant M$.

(2) 惟一性　若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a}f(x)=B$，则 $A=B$.

(3) 保号性　设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，若 $A>0$(或 $A<0$)，则在 a 点的某一去心邻域内，有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$)；若在 a 的某一去心邻域内有 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$)，则必有 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$).

7. 极限的运算法则

设$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$；

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}\quad(B\neq 0)$.

复合函数的极限运算法则：

设 $u=\varphi(x)$在 $x=a$ 的某个去心邻域内有定义，且 $\varphi(x)\neq u_0$，有

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=u_0;$$

又

$$\lim_{u\to u_0}f(x)=A,$$

则

$$\lim_{x\to a}f(\varphi(x))=A.$$

8. 极限存在准则及两个重要极限

(1) *夹逼准则* 若在点 a 的某去心邻域内(或$|x|>X,X>0$)，有

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x),$$

且

$$\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}g(x)=\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}h(x)=A,$$

则$\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}f(x)$存在且等于 A.

(2) *单调有界准则* 若数列$\{x_n\}$单调且有界，则数列$\{x_n\}$必有极限.

(3) *两个重要极限*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\quad 或\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

9. 函数的连续性

(1) *函数连续的定义* 设函数 $f(x)$在点 x_0 的某一邻域内有定义，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$在点 x_0 处连续. $f(x)$在 x_0 点处连续的等价定义是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))=0.$$

若函数 $f(x)$在开区间(a,b)内每一点都连续，则称 $f(x)$在开区间(a,b)内连续. 若 $f(x)$在开区间(a,b)内连续，且在端点 a 和 b 处分别为右连续和左连续，即

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a),\ \lim_{x\to b^-}f(x)=f(b)$$

则称 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续.

(2) *函数的间断点* 若函数 $f(x)$在点 x_0 不连续，则称 x_0 为 $f(x)$的间断点. 间断点的类型可分为两种类型，点 x_0 的左、右极限都存在的间断点称为第一类间断点，其他的间断点称为第二类间断点.

(3) *初等函数的连续性* 基本初等函数在其定义域内连续. 初等函数在其有定义的区间

内连续.

10. 闭区间上连续函数的性质

(1) *最值定理* 闭区间上的连续函数 $f(x)$ 必定在该区间上取得最大值和最小值.

(2) *介值定理* 闭区间上的连续函数可以取得介于区间端点的两个不同函数值之间的任何值.

(3) *零值定理或根的存在定理* 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，并且 $f(a)f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

三、学习中应注意的问题

(1) 深刻理解本章所涉及的概念、定理、运算等等.

(2) 利用重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 求极限时，有时要利用一些技巧，如约分、根式有理化、三角函数的和差化积等.

(3) 注意两个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 只对求"$\dfrac{0}{0}$"和"1^∞"未定型的极限有作用.

(4) 利用等价无穷小替换定理求极限时，在乘除运算中作为因子的无穷小可进行替换，但加减运算中的无穷小不一定能进行替换. 这将在例题中体现.

(5) 正确运用极限的运算法则.

四、典型例题

基本题

例 1 下列各组函数相同吗？

(1) $\lg(x^2)$ 与 $2\lg x$； (2) $\sqrt{x^2}$ 与 x；

(3) $\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 与 $x-1$； (4) $\sin(\arcsin x)$ 与 x.

解 这 4 组函数均不相同.

(1) $\lg x^2$ 与 $2\lg x$ 的定义域不同.

(2) $\sqrt{x^2}$ 与 x 的值域不同.

(3) $\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 与 $x-1$ 的定义域不同.

(4) $\sin(\arcsin x)$ 的定义域为 $[-1,1]$，与 x 的定义域为全体实数不同.

注意 考察两个函数是否是同一个函数，要注意其定义域和对应规则是否完全相同.

例 2 设 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\geqslant 0,\\ x^2+4, & x<0,\end{cases}$

求 $f(x-1)$ 和 $f(x+1)$.

解 $f(x-1)=\begin{cases}2(x-1)+1, & x-1\geqslant 0,\\ (x-1)^2+4, & x-1<0\end{cases}$

$$= \begin{cases} 2x-1, & x \geqslant 1, \\ x^2-2x+5, & x<1. \end{cases}$$

$$f(x+1) = \begin{cases} 2(x+1)+1, & x+1 \geqslant 0, \\ (x+1^2)+4, & x+1<0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x+3, & x \geqslant -1, \\ x^2+2x+5, & x<-1. \end{cases}$$

例 3 若 $y=f(x)$的定义域是$[0,1]$，试求 $f(x^2)$，$f(\sin x)$，$f(x+a)$，$f(x+a)+f(x-a)(a>0)$的定义域.

解 因为 $y=f(x)$的定义域是$[0,1]$，所以

$f(x^2)$的定义域为 $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$，即 $x \in [-1,1]$.

$f(\sin x)$的定义域为 $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$，即 $x \in [2k\pi,(2k+1)\pi]$，$k=0$，± 1，…

$f(x+a)$的定义域为 $0 \leqslant x+a \leqslant 1$，即 $x \in [-a,1-a]$.

$f(x+a)+f(x-a)$的定义域为$\begin{cases} 0 \leqslant x+a \leqslant 1, \\ 0 \leqslant x-a \leqslant 1, \end{cases}$即$\begin{cases} x \in [-a,1-a], \\ x \in [a,1+a], \end{cases}$当 $a \leqslant \frac{1}{2}$时，其定义域为 $x \in [a,1-a]$；当 $a > \frac{1}{2}$时，其定义域为空集.

例 4 下列函数是否具有奇偶性.

(1) $y=(1-x)^{\frac{2}{3}}(1+x)^{\frac{2}{3}}$；　　(2) $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$；

(3) $y=x\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$；　　(4) $y=2^x$.

解 (1) $y(-x)=(1+x)^{\frac{2}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}=y(x)$，故其为偶函数.

(2) $$y(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{1+(-x)^2}\right)=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$
$$=-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=-y(x),$$
故为奇函数.

(3) $$y(-x)=-x\frac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1}=-x\left(\frac{1}{e^x}+1\right)\Big/\left(\frac{1}{e^x}-1\right)=x\frac{e^x+1}{e^x-1}=y(x),$$
故为偶函数.

(4) $y=2^x$，$y(-x)=2^{-x} \neq 2^x=y(x)$且 $y(-x)=2^{-x} \neq -2^x=-y(x)$. 故 $y=2^x$ 既不是奇函数又不是偶函数.

例 5 设 $f(x)=x^2$，$\varphi(x)=2^x$，求 $f(\varphi(x))$，$\varphi(f(x))$.

解 $f(\varphi(x))=(\varphi(x))^2=(2^x)^2=4^x$，
$\varphi(f(x))=2^{f(x)}=2^{x^2}$.

例 6 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求 $f(f(x))$，$f(f(f(x)))$.

解 $$f(f(x))=\frac{1}{1-f(x)}=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{1-x}{1-x-1}=-\frac{1-x}{x}=\frac{x-1}{x},$$

$$f(f(f(x)))=\frac{1}{1-f(f(x))}=\frac{1}{1-\frac{x-1}{x}}=x.$$

例 7 设 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，$g(x)=\begin{cases} 1, & x<10, \\ 5, & x>10. \end{cases}$

证明：$g(x)=2f(x-10)+3$.

证明 $f(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ $f(x-10)=\begin{cases}1, & x>10,\\ -1, & x<10,\end{cases}$

$$2f(x-10)+3=\begin{cases}5, & x>10,\\ -2+3=1, & x<10\end{cases}=g(x)$$

例 8 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=e^x$，求 $f(g(x))$，$g(f(x))$.

解
$$f(g(x))=\begin{cases}1, & |g(x)|<1,\\ 0, & |g(x)|=1,\\ -1, & |g(x)|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x>0.\end{cases}$$

$$g(f(x))=e^{f(x)}=\begin{cases}e, & |x|<1,\\ 1, & |x|=1,\\ e^{-1}, & |x|>1.\end{cases}$$

例 9 证明数列 $y_n=\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2^2}+\cdots+\frac{1}{1+2^n}$ 存在极限.

证明 易见 $y_n<y_{n+1}$，即$\{y_n\}$单增.

又 $y_n<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]\Big/\left(1-\frac{1}{2}\right)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n<1$，知$\{y_n\}$有界.

由单调有界必有极限知$\{y_n\}$存在极限.

例 10 证明数列 $y_n=\frac{a^n}{n!}$ $(a>0)$ 的极限存在.

证明 (1) 证$\{y_n\}$单调下降(从某一项开始).

由于 $y_{n+1}=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{a}{n+1}\cdot\frac{a^n}{n!}=\frac{a}{n+1}y_n$，

当 $n+1>a$ 时，$y_{n+1}<y_n$，即$\{y_n\}$从某一项开始单调下降.

(2) 证$\{y_n\}$有下界.

由 y_n 的表达式知 $y_n>0$，因此，

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n!}\text{ 存在.}$$

(3) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}$.

设$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n!}=A$，而 $y_{n+1}=\frac{a}{n+1}y_n$，两端取极限，得

$$\lim_{n\to\infty}y_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}y_n=0\cdot A$$

即 $A=0\cdot A$，从而 $A=0$.

例 11 设 $y_1=10$，$y_{n+1}=\sqrt{6+y_n}$ $(n=1,2,\cdots)$，试证数列 y_n 存在极限.

证明 (1) 证$\{y_n\}$单减.

因为 $y_1=10$，$y_2=\sqrt{6+10}=4$，所以 $y_1>y_2$. 假设有 $y_{k-1}>y_k$，证 $y_k>y_{k+1}$. 因

$$y_{k+1}=\sqrt{6+y_k}<\sqrt{6+y_{k-1}}=y_k,$$

由数学归纳法知$\{y_n\}$单减.

(2) 证$\{y_n\}$有下界.

显然 $y_n>0$. 因此$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在.

(3) 求$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$. 设$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$，则有 $y_{n+1}=\sqrt{6+y_n}$，两端取极限，有 $A=\sqrt{6+A}$，有 $A=3$ ($A=-2$ 舍去). 所以$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=3$.

例 12 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)$.

解 记 $y_n=n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)$，

则有
$$\frac{n^2}{n^2+n\pi}<y_n<\frac{n^2}{n^2+\pi},$$

而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n\pi}=1,\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+\pi}=1,$$

故由夹逼定理知$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=1$.

例 13 设 $f(x)=\begin{cases}-x+1, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x=1,\\ -x+3, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

画出 $y=f(x)$的图形，求 $x\to 1$ 时函数的左、右极限，讨论极限的存在性.

解 如图 1-1，

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(-x+1)=0,$$
$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(-x+3)=2,$$

二者不相等，故$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$不存在.

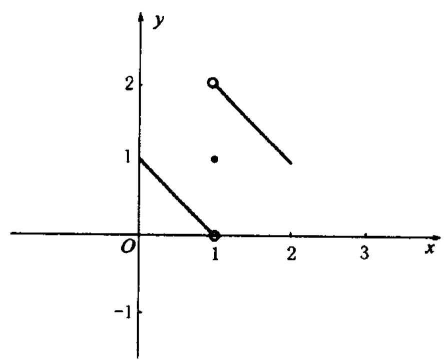


图 1-1

例 14 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x, & 0<x<1,\\ 1, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$$

求 $x\to 0$, $x\to 1$ 时函数的左、右极限，讨论极限的存在性.

解 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x-1}=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$，二者不相等，故$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在.

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}x=1,\ \lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}1=1,\text{故}\lim_{x\to 1}f(x)=1.$$

例 15 求下列各极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-1}{x^2+2x+4}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-7x+3}{x^2+4x-21}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-1}{x^2-2x+3}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3+x}{5x^2-2x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$；

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$；

(8) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$；

(9) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$；

(10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$；

(11) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ （m,n 为正整数）；

(12) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{2x+1}}$；

(13) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x-\cos x}$；

(14) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$；

(15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$ （m,n 为正整数）；

(16) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$；

(17) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$.

解 (1) 原式$=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x+4)}=\dfrac{2}{7}$.

(2) 原式$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(2x-1)(x-3)}{(x+7)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-1}{x+7}=\dfrac{1}{2}$.

(3) 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=3$.

(4) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2+1}{5x-2}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}(4x^2+1)}{\lim\limits_{x\to 0}(5x-2)}=-\dfrac{1}{2}$.

(5)原式$=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x}-1\right)=-1$.

(6) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+9}-3\right)\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}=\dfrac{1}{6}$.

(7) 原式$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+2}+2}=\dfrac{3}{2}$.

(8) 原式$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{1+x+x^2}=-1$.

(9) 原式$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x$.

(10) 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1}=\dfrac{1}{2}$.

(11) 原式$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1}=\dfrac{m}{n}$.

(12) 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x^3}}}}\bigg/\sqrt{2+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

(13) 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{\cos x}{x}}{1-\dfrac{\cos x}{x}}=1\left(\text{因为}\lim\limits_{x\to\infty}\left|\dfrac{\cos x}{x}\right|\leqslant\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{|x|}=0,\text{所以有}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x}=0\right)$.

(14) 原式$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)}{(x-1)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)[1+(x+1)+\cdots+(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)]}{(x-1)}$$

$$=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

(15) 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+mnx+C_n^2(mx)^2+\cdots+(mx)^n-1-mnx-C_m^2(nx)^2-\cdots-(nx)^m}{x^2}$

$$=C_n^2m^2-C_m^2n^2=\frac{n(n-1)}{2}m^2-\frac{m(m-1)}{2}n^2=\frac{mn(n-m)}{2}.$$

(16) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)n/2}{n^2}=\dfrac{1}{2}.$

(17) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+1\right)^2\Bigg/\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{n^6}}=4.$

例 16 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin2x}{\sin3x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$;

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2x}$;

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$;

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-2x}{2-2x}\right)^x$;

(8) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{x-1}{x}}$;

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)^x$;

(10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2+\operatorname{tg}x}-\sqrt{2+\sin x}}{x^3}$;

(11) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\operatorname{tg}3x\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)$;

(12) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}$;

(13) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}$;

(14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$.

解 (1) 原式$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{\sqrt{2\sin^2\dfrac{x}{2}}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2}{\sqrt{2}}\dfrac{x/2}{\sin(x/2)}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$

(2) 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\cos x\cdot x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{2\sin^2(x/2)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2}\cdot\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

注意 若用以下求法：

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{0}{x^3}=0$$

则是错误的，原因是无穷小替换可以替换乘积因子，加减运算中的无穷小则不一定能替换，这一点大家要重视起来.

(3) 令 $t=x-\pi$，则 $x\to\pi$ 时，有 $t\to0$，且有

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin2x}{\sin3x}=\lim_{t\to0}\frac{\sin(2\pi+2t)}{\sin(3\pi+3t)}=\lim_{t\to0}\frac{\sin2t}{-\sin3t}=\lim_{t\to0}\frac{\sin2t}{2t}\cdot\frac{3t}{\sin3t}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}.$$

(4) 令 $x-1=t$，则当 $x\to1$ 时，就有 $t\to0$，从而

$$\text{原式}=\lim_{t\to0}-t\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}t\right)=\lim_{t\to0}t\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi t}{2}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\sin\frac{\pi}{2}t}\cdot\cos\frac{\pi}{2}t$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\frac{\pi}{2}t}{\sin\frac{\pi}{2}t}\cdot\cos\frac{\pi}{2}t\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{2}{\pi}.$$

(5) $$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin^2x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2(x/2)}{\sin^2x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to0}2\frac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2}\cdot\frac{x^2}{\sin^2x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

(6) $$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^{-(1+x)\cdot\frac{x}{-(1+x)}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}-\frac{x}{1+x}}=e^{-1}.$$

(7) $$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2-2x}\right)^{(2-2x)\cdot\frac{x}{(2-2x)}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2-2x}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

(8) $$\text{原式}=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x-1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

(9) $$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)^{(x^2-1)\cdot\frac{x}{x^2-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}}=e^0=1.$$

(10) $$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{(\sqrt{2+\operatorname{tg}x}+\sqrt{2+\sin x})\cdot x^3}=\frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

注 最后一步由(2)可得.

(11) 令 $x-\frac{\pi}{6}=t$，则当 $x\to\frac{\pi}{6}$ 时，有 $t\to0$，从而

$$\text{原式}=\lim_{t\to0}-\operatorname{tg}3\left(\frac{\pi}{6}+t\right)\operatorname{tg}t=-\lim_{t\to0}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+3t\right)\cdot\operatorname{tg}t=\lim_{t\to0}\operatorname{ctg}3t\cdot\operatorname{tg}t=\lim_{t\to0}\frac{\cos3t}{\sin3t}\cdot\frac{\sin t}{\cos t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\cos3t}{\cos t}\frac{3t}{\sin3t}\cdot\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

(12) 令 $x-\alpha=t$，则当 $x\to\alpha$ 时，$t\to0$，有

$$\text{原式}=\lim_{t\to0}\frac{\sin(\alpha+t)-\sin\alpha}{t}=\lim_{t\to0}\frac{2\cos\frac{2\alpha+t}{2}\sin\frac{t}{2}}{t}=\lim_{t\to0}\cos\frac{2\alpha+t}{2}\cdot\frac{\sin(t/2)}{t/2}=\cos\alpha.$$

(13) 令 $t=x-\frac{\pi}{3}$，则当 $x\to\frac{\pi}{3}$ 时，$t\to0$，有

$$\text{原式}=\lim_{t\to0}\frac{1-2\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin t}=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t+\sqrt{3}\sin t}{\sin t}=\lim_{t\to0}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{\sin t}+\sqrt{3}=\sqrt{3}.$$

(14) $$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{1+x^2}\right)^{-\frac{1+x^2}{2}\cdot\frac{-2x^2}{1+x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x^2}{1+x^2}}=e^{-2}.$$

例 17 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{kx}=\frac{1}{e}$，求常数 k.

解 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{kx}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}\cdot\left(-\frac{2}{x}\right)\cdot kx}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}-2k}=e^{-2k}=\frac{1}{e},$$

故有 $2k=1$，即 $k=\frac{1}{2}$.

例 18 讨论函数