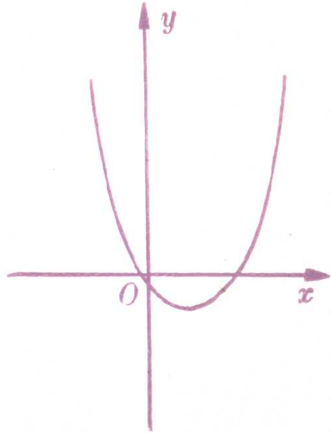
SHU



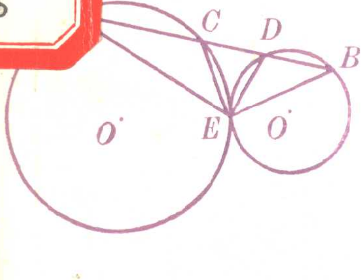
你能正确选择吗？

（六）

XUE

——漫谈数学选择题的解法

杨安澜 编



你能正确选择吗？(六)

——漫谈数学选择题的解法

杨安澜　编

上海科学技术出版社

责任编辑　周玉刚

你能正确选择吗?(六)

——漫谈数学选择题的解法

杨安涧　编

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行　　上海市印刷四厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 5.625　字数 123,000

1987 年 10 月第 1 版　1987 年 10 月第 1 次印刷

印数: 1—15,000

统一书号: 13119·1435　　定价: 1.00 元

编 者 的 话

《你能正确选择吗》？是奉献给正在学习初等数学的成人学员和自学青年的一套知识性和训练性相结合的丛书。

目前，在初等数学的学习、训练、测试和知识竞赛或智力竞赛中，有一种题型很具特色，这就是带有判断、选择性的题型，通常叫做选择题．这种题型，在题中就已提供了好几个答案，其中只有一个是对的，要求你作出正确的选择．

这类题型，答题很简单，只需指出哪一个对就行了，但要答对很不容易．这要求有清晰的概念辨析能力，或有熟练的运算能力，或有较强的逻辑推理能力，在思维上还要有相当的严密性、深刻性和灵活性．常做这种题型，对知识掌握、能力提高和思维训练，都有独特的作用．此外，由于这种题型带有客观性，即不管什么人答的题，由不管哪个人批改、评卷，评分标准都一样，不会带有评卷人的主观因素，因此这种题型就在数学学习成绩的测量和数学知识竞赛或智力竞赛的试卷中被广泛采用，也成为“标准化考试”中的一种重要题型．

但是，目前广大的读者尤其是成人中等学校的学员和自学青年，大都缺少解这种题型的训练，不掌握它的特点和解题方法、规律，遇到这种题型往往很不适应，束手无策．大家都盼望得到既有解这种题型的方法指导，又能受到较系统训练的小册子．

正是为了满足读者的上述需要，我们编写了这套数学丛书．它根据初等数学的主要学习内容和学习顺序编排，共分

六册．本书是第六册，基本上是高中三年级的内容；考虑到高中数学总复习的需要，还编了分科训练题和综合训练题，供学习高三数学的学员和自学青年训练用，也供广大数学教师和研究数学标准化考试命题与从事建立题库工作的人员参考．

本书共分两部分．第一部分是"数学选择题解法漫谈"，深入浅出地分析了这种题型的一些主要特点，介绍了几种基本解法．第二部分是训练题，各题都有代号为 A、B、C、D 的四个答案，其中有且只有一个是正确的，请你把正确的一个答案代号填入题中的（ ）里．

《你能正确选择吗？》这本小册子的知识、方法介绍和训练，将使你知识更牢固，技能更熟练，思路更敏捷，成绩更进步！

《你能正确选择吗？》的书后还附了正确答案，你可以检测自己选对了几个，如果不对，就分析一下原因，从中找出学习中的不足，加以改进，这样你的数学学习将有更大的提高．

欢迎大家一道一道试一试，看看你"能正确选择吗？"

本书中"数学选择题解法漫谈"是根据唐盛昌同志的文章改写的，李家元同志以及淞浦中学数学组对书稿中的训练题作了认真的修改和校订，在这里我们表示感谢．

虽然我们尽了自己的努力，但由于水平不高，时间仓促，书中定有不少缺点错误，恳请读者指正．

编　者

一九八六年六月

目　录

漫谈数学选择题的解法

你做过选择题吗？它是一种很有意思的题型，它在题目里就把正确的结论告诉你，但这个结论又和好几个错误结论混在一起，要求把它选择出来．这种题目的结构包括两个部分：一部分叫做题干，由完整的或不完整的陈述句或问句所构成；另一部分叫做选项(也叫做备选答案或选择支)，其中通常有一个并且只有一个选项是正确的．解选择题时不要求写出具体过程，只要指出哪个选项是正确结论就行．做选择题看来很省事，但要做对却不容易，先看一个例子：

例 1 不等式 $x+1>0$ 的解集，与下列四个不等式的解集相同(即同解)的不等式应是(　　).

(A) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}>0$;　　(B) $\dfrac{x+1}{\lg x}>0$;

(C) $\dfrac{x+1}{x^2-4x+4}>0$;　　(D) $\dfrac{x+1}{2^x}>0$.

这里四个不等式好象都和不等式 $x+1>0$ 同解，其实只有 (D) 是对的，因为 $\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}>0$ 的解集是 $\{x|x>0\}$；$\dfrac{x+1}{\lg x}>0$ 的解集是 $\{x|x>1\}$；$\dfrac{x+1}{x^2-4x+4}>0$ 的解集是 $\{x|x>-1$ 且 $x\neq 2\}$；而 $2^x>0$，$\therefore\ \dfrac{x+1}{2^x}>0\Leftrightarrow x+1>0$．故选择(D)。

答题省事，但容易出错，这是解选择题的明显特点．答题省事，可以节省答题时间，提高解题效率；容易出错，可以检验知识掌握得好不好，能力强不强．另外，选择题还具有题小面

宽，灵活多样，便于批阅，评分客观等特点.

现在，不少同学对选择题的解法很陌生. 有的想当然，象猜谜似地猜答案；有的是每道题都象解常规题那样直接做出答案，再作选择；甚至有的把每个选项都当作求解的结论，一个个去解去证，结果一道题变成四、五道. 这都是因为不知道解选择题还有别的方法，弄得不是出错就是费时费力太多. 为此，我们向大家介绍一些常用的几种解选择题的方法. 有了这些方法，再做本书里的一些练习，通过训练，相信你解选择题的本领一定会有明显的提高.

(一) 直 接 法

这种解法，就是直接从已知条件出发，运用数学概念与理论、公式法则进行运算或推理，求得结果后，再把它与各选项作比较，确定正确的答案.

例 2 已知函数 $y=-\sqrt{x-1}$，那么它的反函数是（ ）.

(A) $y=x^2+1(x\in R)$； (B) $y=x^2+1(x\geqslant1)$；

(C) $y=x^2+1(x\leqslant0)$； (D) 不存在.

解 $\because y=-\sqrt{x-1}$，$\therefore y\leqslant0$，而 $y^2=x-1$. $\therefore x=y^2+1$. 习惯写成 $y=x^2+1$. 即 $y=-\sqrt{x-1}$ 的反函数是 $y=x^2+1(x\leqslant0)$. 故选择(C).

这道题主要检查反函数的概念与求法，特别是检查反函数的定义域的概念. 由于各选择题的形式相近，如果概念不清或运算错误，哪怕符号有错，就都可能得到错误结果，从而作出错误的选择. 选择的命题就是根据可能得到的错误结果而编拟选项的，解题中稍有疏忽，它便会诱使你作错误选择，这种命题办法通常叫作“诱误”. 要避免落入诱误的圈套，就必须

对概念有透彻的理解，有分析鉴别的能力，掌握熟练的运算过程和基本的解题方法，做到合理、正确. 解这种考查基本概念和运算的选择题，通常先用直接法.

例3 给出三个命题:

(1) 若直线 a 与平面 α 内无数条直线垂直，则 $a\perp\alpha$;

(2) 若直线 a 与平面 α 内无数条直线平行，则 $a\parallel\alpha$;

(3) 若平面 β 内有三个不在一直线上的点到平面 α 的距离相等，则 $\alpha\parallel\beta$.

则上述命题中，真命题的个数是(　).

(A) 3; (B) 2; (C) 1; (D) 0.

解 如图 1(1)、(2)所示，命题(1)中，若直线 a 与平面 α 内无数条平行线垂直，则 a 不垂直 α; 在命题(2)中，若直线 a 在平面 α 内，显然命题不成立; 命题(3)中，如果平面 β 内的三点在平面 α 的两侧[图 1(3)]，则 $\alpha\nparallel\beta$. 故选择(D).

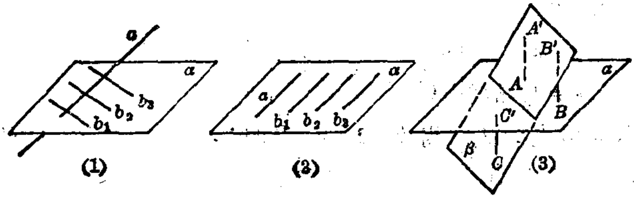


图 1

例4 已知函数 $y=a\sin x+b\left(a\cdot b\neq 0,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant x<\pi\right)$，则它的最大值 M、最小值 N 分别是(　).

(A) $M=a+b,\ N=-a+b$;

(B) $M=-a+b,\ N=a+b$;

(C) $M=a+b,\ N=b$;

(D) 以上答案都不对.

解 当 $a>0$ 时，若 $x=\frac{\pi}{2}$，则 $M=a+b$，若 $x=-\frac{\pi}{2}$，$N=-a+b$；当 $a<0$ 时，若 $x=-\frac{\pi}{2}$，则 $M=-a+b$，若 $x=\frac{\pi}{2}$，则 $N=a+b$. 故选择(D).

例 4 出现了“以上答案都不对的选项”，这有两种可能，一是为了不给解答的人过多的暗示，故意把正确答案隐藏在这一选项之中；二是正确答案虽在其它选项之中，但用以上答案都不对来干扰答题者. 这类选择题，也常常用直接法解，以便决定哪个选项是正确的.

例 5 已知二次函数 $y=(\lg k)x^2-2x+\lg(k^2-3k+3)$，当函数图象经过原点时，$k$ 的值只能是( ).

(A) $k=1$, $k=2$;　　(B) $k=1$;

(C) $k=2$;　　(D) 以上答案都不对.

解 因为函数图象经过原点，所以(0, 0)满足函数解析式，代入得 $\lg(k^2-3k+3)=0$, $k^2-3k+3=1$, $(k-1)(k-2)=0$, 即 $k=1$, $k=2$. 但因为 x^2 的系数 $\lg k\neq 0$，否则就不是二次函数，$\therefore k\neq 1$，故答(C).

本题用直接法解得 $k=1$, $k=2$ 时，很可能落入(A)的诱误，但如果注意到(B)、(C)，实际上给出了“在 $k=1$, $k=2$ 中舍去一个”的暗示，那么就容易考虑到二次函数的二次项系数不能为零的暗示，从而舍去 $k=1$，选择(C).

例 6 设直角 $\triangle ABC$ 的斜边 BC 在平面 α 内，顶点 A 在平面 α 外，则 $\triangle ABC$ 的两条直角边在平面 α 内的射影与斜边 BC 所组成的图形只能是( ).

(A) 一条线段；

(B) 一条线段或一个锐角三角形；

(C) 一个直角三角形;

(D) 一条线段或一个钝角三角形.

解 如图2(1), $\triangle ABC$ 的两条直角边在平面 α 内的射影与斜边 BC 所组成的图形是一条线段是可能的. 由于组成的图形是一个三角形也是可能的, 因此只要判断是锐角还是钝角三角形. 如图2(2)所示, 若 $AD\perp\alpha$, D 为垂足, 设 $AB=a$, $AC=b$, 斜边 $BC=c$, 则 $BD^2=a^2-h^2$, $DC^2=b^2-h^2$, 那么: $\cos\angle BDC=\dfrac{BD^2+DC^2-BC^2}{2\times BD\times DC}$, 而 $BD^2+DC^2-BC^2=a^2-h^2+b^2-h^2-c^2=-2h^2<0$, $\therefore \cos\angle BDC<0$, 又 $0^\circ<\angle BDC<180^\circ$, $\therefore \angle BDC$ 为钝角. 故选择(D).

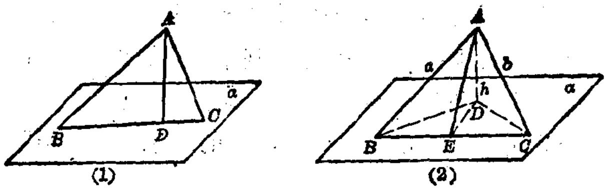


图 2

例7 PQ 为经过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 焦点的任意一条弦, MN 为 PQ 在准线 l 上的射影, PQ 绕着 l 旋转一周所得到的旋转面的面积为 S_1, 以 MN 为直径的球面面积为 S_2, 则下面的结论中, 正确的是( ).

(A) $S_1>S_2$; (B) $S_1<S_2$;

(C) $S_1\geqslant S_2$;

(D) 有时 $S_1>S_2$, 有时 $S_1=S_2$, 有时 $S_1<S_2$.

解 如图3所示, 因为 F 为焦点, l 为准线, 故

$$|FP|=|PM|,\ |FQ|=|QN|.$$

$$\because\quad S_1=\pi(|PM|+|QN|)\cdot|PQ|=\pi PQ^2,$$

$S_2=\pi MN^2$, 又 $\because MN$ 是 PQ 在 l 轴上的射影, $\therefore |PQ| \geqslant |MN|$. $\therefore S_1 \geqslant S_2$. 故选择(C).

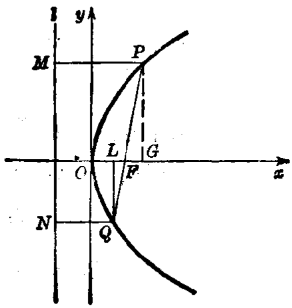


图 3

最后要说明的是，当运用直接法求得的答案与所有选项的答案都不相同时，就应该检查解题过程，看哪里出了毛病，当求得的结果与某一选项一致时，通常就按它作答，但如果解题过程有误，或基本概念有问题，或运算出差错等．而求得的错误答案恰是某个用来诱误的选项，那就会作出错误的选择，解题者本人往往难以发觉，这是用直接法解选择题时一个比较困难之处．克服这个困难的办法，除了要正确理解基本概念，正确进行运算、推理，以保证求得的结果正确无误外，还应当象例 5 那样认真审题，仔细分析各选项的答案，利用它的暗示作用，帮助我们避免错误。

(二) 筛 选 法

筛选法是把已知条件与各个选项所提供的答案结合起来，根据有关知识进行判断，将不可能成立的答案一个一个地否定掉，由于一般的选择题在各选项中有且仅有一个答案是正确的，就可以把剩下的那个正确答案筛选出来．

例 8 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的焦点坐标为(2, 3)，准线方程为 $y=5$，则 a, b, c 的值应是(　).

(A) $a=\frac{1}{4}$, $b=-4$, $c=3$;

(B) $a=-\frac{1}{4}$, $b=1$, $c=3$;

(C) $a=4$, $b=4$, $c=-3$;

(D) $a=-4$, $b=-1$, $c=-3$.

解 因为焦点坐标为(2, 3)，准线方程为 $y=5$，所以抛物线的开口向下，即 $a<0$，由此排除(A)、(C)．由于抛物线的对称轴 $x=2$，即 $-\frac{b}{2a}=2$，故得 a, b 异号，排除(D)，所以选择答案为(B).

例 9 $\arcsin\left(\cos\frac{3}{5}\pi\right)$等于(　).

(A) $\frac{3}{5}\pi$;　　　　(B) $-\frac{3}{5}\pi$;

(C) $\frac{\pi}{10}$;　　　　(D) $-\frac{\pi}{10}$.

解 $\because -\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$，$\therefore$ 排除选择(A)、(B)的可能．又 $\because \cos\frac{3}{5}\pi<0$，$\therefore$ 排除选择(C)，因此选择(D).

例 10 下列哪个方程的解集是$\{x|x=2\}$?

(A) $|x|=2$;　　　　(B) $\sin\frac{\pi x}{4}=1$;

(C) $\lg x+\lg(x-1)=\lg 2$;

(D) $x^{x-2}=1$.

解 方程$|x|=2$的解集是 $x=\pm2$; 方程 $\sin\frac{\pi x}{4}=1$ 的解有无数个; 故排除(A)、(B)．方程 $x^{x-2}=1$ 的解是 $x=2$ 或 $x=1$，故选择(C).

例 11 已知曲线 C_1: $\begin{cases}x=3+4\cos\theta,\\ y=\sin\theta,\end{cases}$ (θ 为参数，$\theta\in R$)，

和 C_2: $\begin{cases} x=4t^2+1, \\ y=2t. \end{cases}$ (t 为参数, $t\in R$), 则 C_1 和 C_2 的交点坐标是(　).

(A) $\left(\frac{10}{9}, -\frac{\sqrt{21}}{3}\right)$, $\left(\frac{10}{9}, -\frac{\sqrt{21}}{3}\right)$;

(B) $(-2, 2)$, $(2, -2)$;

(C) $\left(8, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$;

(D) 以上结果都不对.

解 曲线 C_1 上的坐标 (x, y) 的取值范围是 $-1\leqslant x\leqslant 7$, $-1\leqslant y\leqslant 1$. 曲线 C_2 的点的坐标取值范围是 $x\geqslant 1$, $y\in R$, 则 C_1 和 C_2 的交点坐标的范围应是 $1\leqslant x\leqslant 7$, $-1\leqslant y\leqslant 1$. 那么(A)、(B)、(C)中的点坐标均应排除之外, 故选择(D).

从以上几个例题中, 你一定已经发现, 用筛选法解题的关键在于找到某种方便的筛选、鉴别的准则, 如例 8 中的抛物线的开口方向和对称轴方程, 从而确定 a, b 的符号; 例 9 中的反三角函数值的范围; 例 11 中参数方程的自变量和对应的函数值所取得范围; 例 10 中根据各种方程的解集情况, 逐一筛选不正确的答案, 使供选择的可能减少到最低限度, 这里还应当注意, 由于多个选项中只有一个是正确的, 而在筛选过程中, 往往排除一个选项还可连着排除几个, 这就更有利于较快地找到正确答案, 筛选法是解数学选择题时的又一个常用方法.

(三) 特 例 判 定 法

我们知道, 要否定某个带有普遍性的结论, 只需举个反

例，因为选择题的各选择支中一定有几个是不对的，所以我们可以用取特殊值、画特殊图形或确定特殊位置的办法，来加以判断. 如果其他选项都可以举反例加以否定，那么剩下的一个就一定是正确的答案了. 这种方法称为特例判定法.

例 12 从 $A\cup B=A\cup C$ 能够推出（ ）.

（A）$B=C$;　　（B）$A\cap B=A\cap C$;

（C）$A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$;　　（D）$\overline{A}\cap B=\overline{A}\cap C$.

解 只要举一例，从集合 A、B、C（图 4）容易看出：$B\neq C$; $A\cap B\neq A\cap C$; $A\cap\overline{B}\neq A\cap\overline{C}$. 由于选项中必有一个正确的，所以正确答案是(D).

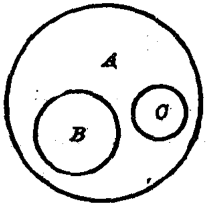


图 4

例 13 对于任何 $x\in(1, a)$，都有（ ）.

（A）$\log_a(\log_a x)<\log_a x^2<(\log_a x)^2$;

（B）$\log_a(\log_a x)<(\log_a x)^2<\log_a x^2$;

（C）$\log_a x^2<\log_a(\log_a x)<(\log_a x)^2$;

（D）$(\log_a x)^2<\log_a x^2<\log_a(\log_a x)$.

解 取 $a=4$，令 $x=2$，则

$$\log_a(\log_a x)=\log_4\frac{1}{2}<0,$$

$$\log_a x^2=\log_4 4=1,$$

$$(\log_a x)^2=(\log_4 2)^2=\frac{1}{4}.$$

$\therefore$ $\log_a(\log_a x)<(\log_a x)^2<\log_a x^2$. 故选择(B).

有时，题中出现“以上答案都不对”或答案“不确定”那样的选项，而正确的选择又恰好是这个选项，这时也可以用特例法去解，但往往不能只取一个特例作出选择. 否则就容易犯用

特殊肯定一般的错误.

例 14 当 a, b 为实数, 且 $(a+1)(b+1)=2$ 时, $\operatorname{arc\,tg} a+\operatorname{arc\,tg} b$ 的弧度等于(　).

(A) $-\frac{\pi}{2}$;　　(B) $\frac{5\pi}{4}$;

(C) $-\frac{\pi}{3}$;　　(D) 以上结论都不对.

解 取 $a=1$, $b=0$ 时, 则 $\operatorname{arc\,tg} a+\operatorname{arc\,tg} b=\operatorname{arc\,tg} 1+\operatorname{arc\,tg} 0=\frac{\pi}{4}$, 故应当排除(A)、(C).

取 $a=-3$, $b=-2$ 时, 则 $\operatorname{arc\,tg}(-3)+\operatorname{arc\,tg}(-2)=-(\operatorname{arc\,tg} 3+\operatorname{arc\,tg} 2)<0$. 故排除(B)应当选择(D).

例 15 过抛物线焦点 F 的直线与抛物线相交于 A、B 两点, 若 A、B 在抛物线准线上的射影分别是 A_1、B_1, 则 $\angle A_1FB_1$ 等于(　).

(A) 45°; (B) 60°; (C) 90°; (D) 120°.

解 设抛物线方程为 $y^2=4x$. 如图 5 所示. 过 $F(1,0)$ 作抛物线弦 AB, 使 $AB\perp OX$ 轴. 则 $A(1,2)$, $B(1,-2)$, 它们在准线 l 上的射影分别是 $A_1(-1,2)$, $B_1(-1,-2)$. 则 $K_{FA_1}=-1$, $K_{FB_1}=1$. $\therefore FA_1\perp FB_1$ 即 $\angle A_1FB_1=90°$. 故选择(C).

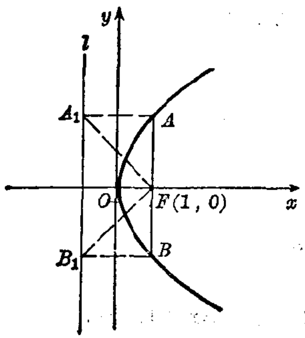


图 5

例 16 已知两个方程它们分别是 $mx+ny^2=0$ 与 $mx^2+ny^2=1(m\neq0,\ n\neq0)$, 在同一坐标系中画出它们的图形, 那么它的示意图形应当是(　).

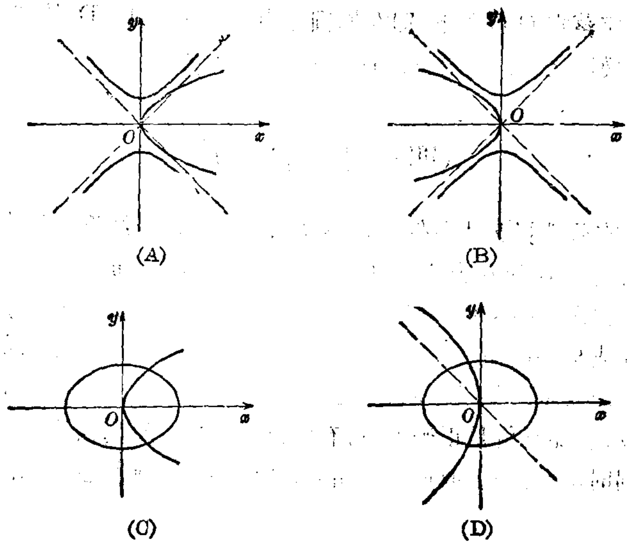


图 6

解 选项(A)、(B)中方程 $mx^2+ny^2=1$ 是双曲线，不妨设 $m=-1$，$n=1$，即方程为 $y^2-x^2=1$. 相应的抛物线方程 $mx+ny^2=0$ 应是 $y^2=x$. 根据(A)、(B)中的抛物线开口方向，应当排除(B).

选项(C)、(D)中方程 $mx^2+ny^2=1$ 是椭圆方程，不妨设 $m=\frac{1}{2}$，$n=1$，即方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 相应的抛物线方程为 $y^2=-\frac{1}{2}x$，根据(C)、(D)中抛物线的开口方向，应当排除(C). 又抛物线 $y^2=-\frac{1}{2}x$ 与直线 $y=-x$ 的交点除原点外，另一交点 P 的坐标为 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. 在椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上，取点 $Q(x_1, y_1)$，使 $x_1=-\frac{1}{2}$，则 $y_1=\pm\frac{\sqrt{14}}{4}$. 而 $|y_1|>\frac{1}{2}$，故 P