

W. 普 拉 格

P. G. 霍 奇

理想塑性
固体理论

科学出版社

W. Prager P. G. Hodge

THEORY OF PERFECTLY PLASTIC SOLIDS

John Wiley 1951

內 容 簡 介

理想塑性固体理論是塑性理論的一个分支。这一分支已接近定型，并且已有許多具有实际意义的重要結果可資利用。本书为这一分支的導論，着重在基本理論。

全书分八章，簡要地总结了1951年前在該領域中的发展；对平面应变問題論述較詳，包括軸对称問題、一般理論和特殊問題以及极限分析(第四至七章)；最后論述了各种理論的极值原理。

书中援引了不少文献，可供研究工作者查考；此外，还有許多习题，可資練習并借以陈述一些特殊应用。

本书可供从事塑性分析的工程研究人員及高等院校有关专业的师生参考。

理 想 塑 性 固 体 理 論

W. 普 拉 格 著

P. G. 霍 奇

陈 森 譯

*

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳門大街117号

北京市书刊出版业营业許可証出字第061号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店經售

*

1964年11月第一版 开本：850×1168 1/32

1964年11月第一次印刷 印张：8 1/2

印数：0001—5,650 字数：218,000

統一书号：13031·1980

本社书号：3050·13—1

定价：[科七]1.40元

譯者前言

塑性理論是研究變形體的塑性應力和應變的一門科學。它在工程實際上有着廣泛的應用，特別對於近代工程技術的發展更具有重要意義。

塑性理論始於上一世紀後期，但進展緩慢，直到近三四十年才得到進一步的發展，然而，由於它的基本方程的非綫性以及塑性變形規律的複雜性，因此許多問題至今仍在探索中。目前，世界各國與我國都在積極開展這一學科的理論和實驗研究。

為了簡化問題，我們常將材料理想化，亦即假設材料不具有硬化階段（即應力-應變曲線在應力超過屈服點後用水平直綫來代替），這種材料稱為理想塑性材料。目前對於理想塑性固體的研究已臻於成熟，因此，形成了塑性理論的一個分支——理想塑性固體理論。本書就是這個分支的導論。

本書着重介紹基本理論，它的特点是說理較為簡單易懂，但又不失嚴格性。書中不少材料是作者自己的研究成果。此外，在每一章末均援引了不少文獻；還有許多習題作為練習，並借以陳述一些特殊的應用。因此，本書出版雖已十年，但至今仍不失為一本佳作。1955年1月，本書作者之一 W. 普拉格，曾對1955年以前英美各國的塑性理論研究狀況及其發展前途作一概述，讀者可參閱 W. Prager, *The Theory of Plasticity: A Survey of Recent Achievements, Proceedings of the Inst. of Mech. Eng.*, vol. 169, 1955.

本書中譯本脫稿時，尚沒有其他英文塑性理論的中譯本問世，因此，本書所用譯名，多系譯者之見，限於業務水平，間有待商榷甚至錯誤之處，尚希讀者惠予指正。

陳 森

1961年2月於杭州

著 者 序

理想塑性固体的数学理論是圣維南(Saint Venant)在1870年奠基的。在圣維南、利威(Lévy)和鮑希涅斯克(Boussinesq)等人取得若干初步进展后,人們对于此新学科領域的兴趣消沉了将近半个世紀。因此,在这一时期中,哈尔(Harr)、卡門(v. Kármán, 1909)和米賽斯(v. Mises, 1913)等人对此領域所作出的重要貢獻,实际上一度未引起人們的注意。其后,納达依(Nadai)研究了扭轉問題(1923),亨基(Hencky)和普朗特(Prandtl)提出了在平面塑性应变問題中剪切綫的几何性質(1923),以及普朗特(1924)和瑞斯(Reuss, 1930)在基本方程中考虑了弹性效应等等,这些标志着第二进展时期的开始。自此以后,塑性理論得到了稳步加快的发展。活动的中心(如果用出版物的数量来衡量,虽然这样衡量是不合适的)开始在德国,以后移至苏联,后来轉入英国,新近又移至美国。因此,尽管这一学科早就建立,但是,本书的材料只有很少的一部分是三十多年以前的,而大部分則取自最近五年以来所获得的成就。事实上,本书第七章和第八章中关于极限分析的若干材料,还是第一次在这里发表。

新近,对塑性理論的兴趣风起云涌,在本书原稿作最后修訂期間,就至少有三本这方面的著作問世也許就是最好的例証(A. M. Freudenthal, *The inelastic behavior of engineering materials and structures*, Wiley, 1950; A. Nadai, *Theory of flow and fracture of solids*, Vol. I, McGraw-Hill, 1950; R. Hill, *The mathematical theory of plasticity*, Oxford University Press, 1950)。

正如书名所指出的,本书并不拟詳述一般塑性理論,而仅作为称为理想塑性固体理論这一特殊分支的导論。其所以选取这一題材,是由于这一分支已最接近于定型,并且現在已有(或不难得出)

許多對於設計者來說具有實際意義的重要結果可資利用。因此，本書的重點在於研究那些可以求解的問題，而非討論那些至今尚未解決的問題。但是，只要有可能，著者總是毫不猶豫地對於如何進行下一步研究指出其有效的方向。

本書是以著者之一（P. G. Hodge）在布朗大學擔任研究員時為海軍研究所所寫的綜合報告為基礎的。原來的報告主要是供開始從事這一領域研究工作的研究人員用的，現在著者卻力圖使其亦能供工科或應用數學專業的四年級優秀學生及一年級研究生作為教科書之用。為使本書保持適當的篇幅，著者時常為了能較詳細地講述基本原理而不得不割舍一些內容；但是，為研究工作著者着想，著者常常用援引文獻的辦法力求彌補這一不足。此外，在正文中不得不刪略的許多特殊應用，則以習題的形式加以陳述；當本書作為正式課程的教科書時，這些習題當具有相當大的價值。

本書原定 1950 年出版。但在最後定稿階段，獲得了關於極限分析方面的重要結果；因此，由於將這些結果列入本書，並且按照這些結果對米賽斯和普朗特-瑞斯理論之間的关系所起的影響對許多章節進行了修改，使得本書的出版拖延了將近一整年。不過，著者認為，由於這些變更而使理想塑性固體理論有所改善，延期出版還是十分值得的。

本書雖然論述塑性的“數學”理論，但其主要的讀者對象是工程研究人員和工科學生。讀者所需具備的數學修養與高等材料力學或初等彈性理論所需者相同。著者力戒耽迷於為數學而數學；另一方面，著者對那些最適合於所討論問題的數學工具和技巧，使用起來並不猶豫，凡不要求讀者預先熟悉的數學工具和技巧，均在正文中詳加解釋。例如，在第五章中敘述了用特征綫法求雙曲型偏微分方程的數值積分；在第八章中介紹了笛卡兒張量的腳標記號等等。

最後，我們來解釋一下為什麼只限於討論理想塑性固體。著者認為，理想塑性固體理論已臻於足夠定型的形式，而可以列入工科課程中作為選修課。但是，具有加工硬化的塑性固體的理論，尚

与这一阶段相差很远。例如,加工硬化固体中应力分析問題的几乎所有的有效解法,都是以数学上較為方便的“有限”应力-应变定律为依据的,尽管从物理观点看来,只有較為麻煩的“微小增量”定律可以采用。因为以微小增量定律为依据的应力分析的一般方法至今尚未作出,因此,目前很难写出一本关于加工硬化塑性固体理論方面、对于应力分析工作者來說具有实践价值的教科书。

著者还必須对許多同事表示感謝。从各方面看来,本书之写成应归功于海軍研究所和船舶局在布朗大学所主持的塑性理論的研究工作。根据合同 N7onr-35801 所写成的綜合报告乃是本书的初稿,此外,著者在与合作者多次討論此項研究工作中获益非浅,特別應該感謝德魯克(D. C. Drucker)、格林堡(H. J. Greenberg)、李(E. H. Lee)和西蒙志(P. S. Symonds)各位教授以及文泽尔(A. Winzer)博士等人。最后,若不把根据上述合同所写的技术报告中首先提出的結果列入本书,这本理想塑性固体理論就会多少帶有不完整性。

本书原稿的清理工作承布朗大学应用数学研究部秘书处,特别是加依多夫斯基(F. C. Gajdowski)的細致帮助,謹此致謝。

W. 普 拉 格

P. G. 霍 奇

1951 年 1 月

目 录

译者前言	iii
著者序	iv
緒論	1
第一章 基本概念	12
§ 1. 应力	12
§ 2. 应变	16
§ 3. 平衡方程. 简单应力-应变关系	18
§ 4. 屈服条件	19
§ 5. 塑性范围的应力-应变关系	26
第一章附录	32
习题	34
参考文献	36
第二章 桁架和梁	37
§ 6. 简单桁架的弹-塑性性状	37
§ 7. 矩形截面梁的弯曲	42
第二章附录	49
习题	51
参考文献	52
第三章 圆柱形或棱柱形杆的扭转	54
§ 8. 弹性扭转	54
§ 9. 纯塑性应力分布	60
§ 10. 弹-塑性应力分布	65
§ 11. 例题	70
§ 12. 横截面的翘曲	75
§ 13. 应用于扭转问题时, 圣维南-米赛斯和普朗特-瑞	

斯理論之間的关系·····	80
§ 14. 圓柱体承受扭轉和拉伸的联合作用·····	84
习題·····	89
参考文献·····	92
第四章 平面应变: 軸对称問題 ·····	94
§ 15. 一般关系·····	94
§ 16. 不可压縮材料·····	101
§ 17. 卸載和重复加載·····	108
§ 18. 无限制塑性流动·····	114
习題·····	120
参考文献·····	121
第五章 平面应变: 一般理論 ·····	123
§ 19. 引言·····	123
§ 20. 一般概念·····	125
§ 21. 剪切綫的几何性質·····	129
§ 22. 边界条件. 剪切綫的近似繪制法·····	134
§ 23. 速度場·····	143
§ 24. 直剪切綫族·····	145
§ 25. 极限綫·····	148
§ 26. 間断綫·····	152
第五章附录·····	162
习題·····	163
参考文献·····	165
第六章 平面应变: 特殊問題 ·····	168
§ 27. 初始塑性流动問題·····	168
§ 28. 定常塑性流动問題·····	174
§ 29. 准定常塑性流动問題·····	181
习題·····	192
参考文献·····	195
第七章 平面应变: 受限制塑性变形; 极限分析 ·····	196

§ 30. 板比拟	196
§ 31. 一个特殊情形的分析解法	201
§ 32. 平面应变問題的虚功原理	207
§ 33. 平面应变的极限分析	211
§ 34. 圣維南-米賽斯解和普朗特-瑞斯材料的初始塑性 流动	221
习题	226
参考文献	227
第八章 极值原理	228
§ 35. 引言	228
§ 36. 笛卡儿张量	228
§ 37. 米賽斯理論的极值原理	233
§ 38. 普朗特-瑞斯理論的极值原理	238
§ 39. 极限分析	245
§ 40. 关于应用极值原理的几点意見	249
习题	253
参考文献	255
內容索引	256

緒 論

数学塑性理論之所以得到发展，是由于人們在确定結構或机械零件的安全系数时要求更现实的方法，以及在諸如軋、拉、压等工艺加工过程中需要更好地加以控制。在这两个应用領域中，我們所遇到的塑性应变是具有很不同的数量級的。例如，在机械零件中，通常不允許有大的变形，因为，即使这些变形本身不会使零件遭受破坏，但却很可能有碍零件本来的功能。因此，就是在机械零件中允許发生塑性应变的話，其大小通常也只能限于弹性应变的数量級。而另一方面，在工艺加工过程中，則可以产生十分不同的数量級的塑性应变。

弹性材料的力学性質的主要特征，已由胡克 (Hooke) 的名言 “*ut tensio sic vis* (拉力比例于伸长)” 充分地表达。但是，对于塑性材料的力学性質，就不可能作出同样简单的描述，并且，企图建立顾及在塑性范围内所出現的所有力学現象的数学理論也会是不切实际的。实用的数学理論，必須使結構材料复杂的力学性狀理想化至某一程度，而对于不同的应用范围宜于采用不同的理想化。在討論这些理想化之前，我們先考察圓柱形試件在简单拉伸时的力学性質，借以建立几个基本概念。在試件两端軸向力作用处邻近，应力和应变状态頗为复杂。但是，如果將試件做得足够长，則我們可以假設，在試件中央的一段，其应力和应变状态是均匀的。在这一中央部分选择一**标长**，以下的定义即适用于这一标长范围内的状况。

通常，在材料試驗中，**拉应力** σ 定义为軸向力与原橫截面积之比；**纵向伸长** ϵ 定义为标长的伸长与其原长之比。伴随纵向伸长而产生的**横向縮短** δ ，定义为試件直径的縮短与該直径原来长度之比；对于各向同性材料來說，在橫截面任一方向上的縮短，其值

都是相同的。 σ 、 ϵ 和 δ 諸值描述了在标长范围内的应力和应变状态。

在 σ 、 ϵ 值足够小的情况下，試件在卸載后将恢复其原来的形状。符合这一条件的应力和应变范围，称为**弹性范围**。在弹性范围内，比 σ/ϵ 和 δ/ϵ 都具有常值（**胡克定律**）。前者称为**楊氏模量**，以 E 記之；后者称为**泊松比**，以 ν 記之。

当应力和应变值超过弹性范围时，則卸載后試件将不再恢复其原状，而会出现永久变形。

对于大多数材料来说，弹性范围的界限（**弹性极限**）的定义是一个习用的概念，因为自弹性过渡到塑性是逐漸的，并且，即使在很小的应力下，也能由相当准确的测量揭示出有永久变形存在。对于此等材料，我們可以不管不超过某一限度的永久变形。这样，我們就得到习用的弹性范围界限。根据不同的应用方面，同一材料的弹性范围可以用不同的方式加以确定。

但是，有些材料（諸如青銅、軟鋼等），它們自弹性过渡到塑性是突然的（这一現象可以根据这样的假設来解释，就是在某一应力时，材料中一直承担着大部分載荷的脆性成分的网絡遭受破坏，而載荷改由延性成分来承担）。对于这类材料来说，弹性范围的界限

不再是习用的概念，而与一定的物理現象相对应。

图 1 示具有习用弹性极限（图 1 中的点 A ）的材料典型应力-应变图；应力 σ 为应变 ϵ 的單調遞增函数（**加工硬化**）。当試件受到大于弹性极限的应力（例如，对应于图 1 中点 B 的应力）后，再行部分卸載，則在卸載过程中可得到如图 1 中曲線 BC

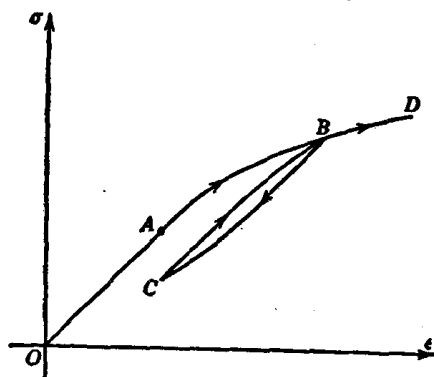


图 1. 具有习用屈服极限的材料应力-应变图

所示的应力-应变图。当試件的应力达到諸如点 C 后重又加載，則

所得的应力-应变曲线(图 1 中的 CB) 并不与卸载曲线 BC 重合: 两者之间形成一狭长的迴线, 其面积即表示在 BCB 循环中所消耗的机械功(注意, 图 1 中迴线的宽度已予夸大)。根据柏林訥(Berliner, 文献 1)的实验工作, 普朗特(文献 2)已推出了关于在重复加载和卸载情况下应力-应变图的下述规律:

(1) 紧跟在每次变形方向改变(例如图 1 中点 C 处)之后, 应力-应变曲线的斜率与第一次加载时的始点(点 O)的斜率相同;

(2) 任一应力-应变曲线分支(例如 CB)的形状, 由最后发生变形方向改变之点(点 C)的位置唯一确定;

(3) 如果变形方向不再改变, 则任一这样的分支(例如 CB)将通过未第二次发生变形方向改变之点(点 B)。其后, 应力-应变曲线宛如未曾形成过迴线(BCB)一样延伸下去。

在普朗特规律中, 不考虑所有的**时间效应**, 诸如应变率对弹性极限的影响, 或在载荷不变情况下永久变形徐缓增长(**蠕变**)等等。如果载荷不是很快地加在结构上, 并且作用的时间并不太长, 则对于大多数结构金属来说, 至少在不要结构在高温下承载的情况下, 这些时间效应均可略去。

因为普朗特规律略去了时间效应, 所以, 它构成了关于结构金属力学性状的一理想化的描述。但是, 这些规律还是过于复杂, 不能作为实用的数学塑性理论的基础。欲获得一个能具有广泛应用范围的理论, 只有进一步加以大大简化才行。本书所论述的**古典塑性理论**是假设材料为**理想塑性材料**, 亦即材料在常应力下并不显示出加工硬化, 而只作塑性流动。在简单拉伸或压缩中, 这种材料的力学性状如图 2 的应力-应变图所示。

当纵向伸长值足够小时, 材料表现为弹性, 即 $\sigma = E\epsilon$ 。这种应力-应变间的线性关系如图 2 中 OA 部分所示。一当应力达到某一临界值 σ^* (拉伸屈服应力)并保持此值不变时, 材料便在此常应力 σ^* 下作塑性流动。这种在常应力下的流动在图 2 中由 AB 部分来表示。在这一阶段里, 应力和应变之间不再存在一一对应关系。

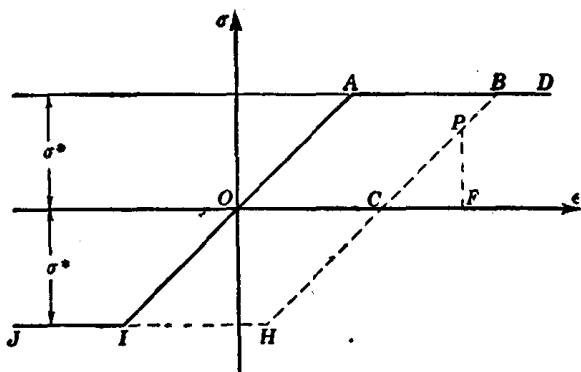


图 2. 理想塑性材料的应力-应变图

若試件只受到小于 σ^* 的应力的作用,則在卸載后它将恢复其原来的形状。但是,如果在卸載之前,应力已保持在 σ^* 值若干時間,則在此段時間中发生塑性流动,且在卸載后試件将留有永久变形。在这一卸載过程中的应力-应变关系,由图 2 中的 BC 部分来表示;永久伸长由綫段 OC 表示。卸載时所得的綫段 BC 与第一次加载时所得的綫段 OA 相平行。

如果試件在全部或部分卸載后重又加载,則直到应力又到达临界应力 σ^* 时为止,重新加载的应力-应变曲綫与前一次卸載的曲綫重合。其后,試件宛如从未受过卸載和重新加载一样,作塑性流动。在这一重新加载及随后塑性流动期間的应力-应变关系由图 2 的 CBD 部分来表示。

另一方面,如果試件在已經发生塑性流动后再全部卸載,然后再使之受压,則得到如 $CHIJ$ 的应力-应变曲綫(注意,假設拉伸和压縮的屈服应力大小相等,都等于 σ^*)。如果試件未先受拉,而使其直接受压,則得到折綫 OIJ 。

在进行包括加载、卸載和重新加载(拉伸或压縮)的任意实验过程中,在 σ, ϵ 平面內(图 2)只能达到以平行綫 AD 和 JH 为界的无限条带內的諸点。在此条带內的任一点 P ,其应变(OF)可看作是永久应变(OC)和弹性应变(CF)之和。前者是自点 P 开始全部卸載后所得的应变;后者为在卸載过程中所减少的应变。因为

假設 PC 与 OA 平行, 故在点 P 处的应力 σ 和弹性应变 ϵ' 系由胡克定律相联系:

$$\epsilon' = \frac{\sigma}{E}, \quad (a)$$

式中 E 为楊氏模量。如果已知应力 σ 和永久应变 ϵ'' , 則总应变 ϵ 可自下式求出:

$$\epsilon = \epsilon'' + \frac{\sigma}{E}. \quad (b)$$

为了能完整地描述理想塑性材料在簡單拉伸或压缩时的力学性状, 我們必須介紹一下关于横向縮短 δ 的規律。这种应变也可以分解为弹性的和永久的两部分, 其中弹性横向縮短 δ' 可以借胡克定律与弹性纵向伸长联系起来:

$$\delta' = \nu \epsilon', \quad (c)$$

式中 ν 为泊松比。另一方面, 按照經驗(文献 3), 永久横向縮短与永久纵向伸长之間假設具有这样的关系, 就是材料不产生永久的体积改变。为了用数学式子来表示这一条件, 我們試考察材料的一个微小立方体, 其各稜边与試件的軸綫平行或垂直。此立方体的纵向稜边具有永久伸长 ϵ'' , 横向稜边具有永久縮短 δ'' 。設此立方体的稜边原长取为单位长, 則永久变形后的立方体, 其纵向和横向稜边长度分別等于 $(1 + \epsilon'')$ 和 $(1 - \delta'')$ 。因而, 在永久变形后的立方体的体积等于:

$$(1 + \epsilon'')(1 - \delta'')^2,$$

若略去微小永久应变 ϵ'' 和 δ'' 的高次方幂, 則得:

$$1 + \epsilon'' - 2\delta''.$$

要想沒有永久体积改变, 永久横向縮短便应等于:

$$\delta'' = \frac{\epsilon''}{2}, \quad (d)$$

而总横向縮短 δ 与总纵向伸长 ϵ 之比为:

$$\frac{\delta}{\epsilon} = \frac{\delta' + \delta''}{\epsilon' + \epsilon''} = \frac{2\nu + \epsilon''/\epsilon'}{2(1 + \epsilon''/\epsilon')}. \quad (e)$$

在弹性范围内, $\epsilon'' = 0$, 故式(e)正给出 $\delta/\epsilon = \nu$. 在塑性流动期间, 弹性应变 ϵ' 保持在弹性极限时的数值 σ^*/E , 而塑性应变 ϵ'' 则单调递增. 因此, 在塑性流动期间, 比 ϵ''/ϵ' 单调递增. 此外, 泊松比 ν 不能大于 $1/2$ (見文献 4 第 104 頁), 故自式(e)可知: 在塑性流动期间, 比 δ/ϵ 单调递增, 其值自弹性极限时的 ν 值渐近地趋于 $1/2$.

无疑地, 上述关于理想塑性材料的力学性状大大理想化了典型结构金属的实际力学性状. 虽然对于某些钢材, 当加工硬化尚未开始时在常应力下所見到的初始塑性流动問題, 只要用到理想塑性材料的概念就足够了, 但是, 这种概念似乎完全不适用于諸如航空工业所用的鋁合金等加工硬化金属. 实际上, 具有加工硬化的塑性材料在简单拉伸时的力学性状, 可由考察若干具有不同屈服极限的理想塑性試件而加以适当的描述; 这些試件都承受相同的纵向伸长, 而它們所承担的軸向載荷的总和, 就作为加在具有加工硬化的等效試件上的軸向載荷.

为了討論简单起見, 我們来考察具有屈服极限 σ_1^* 和 σ_2^* ($\sigma_2^* > \sigma_1^*$) 的两根这样的理想塑性試件. 分別以 A_1 和 A_2 表示这两根試件的横截面积, σ_1 和 σ_2 表示試件的应力; 并設此两試件的楊氏模量 E 相同. 只要試件的公共纵向伸长 ϵ 值保持小于 σ_1^*/E , 則 $P_1 = E\epsilon A_1$, $P_2 = E\epsilon A_2$, 而具有加工硬化的等效試件中的应力 σ 可由下式求出:

$$\sigma = \frac{P_1 + P_2}{A_1 + A_2} = E\epsilon \quad (0 \leq \epsilon \leq \sigma_1^*/E), \quad (f)$$

此式迄至 $\epsilon = \sigma_1^*/E$ 为止均成立. 当 ϵ 超过此值, 但小于 σ_2^*/E 时, 則只有第一根試件发生屈服. 此时, $P_1 = \sigma_1^* A_1$, $P_2 = E\epsilon A_2$, 而

$$\sigma = \frac{\sigma_1^* A_1 + E\epsilon A_2}{A_1 + A_2} \quad (\sigma_1^*/E \leq \epsilon < \sigma_2^*/E). \quad (g)$$

最后, 当 ϵ 大于 σ_2^*/E 时, 則两根試件都发生屈服. 此时, $P_1 = \sigma_1^* A_1$, $P_2 = \sigma_2^* A_2$, 而

$$\sigma = \frac{\sigma_1^* A_1 + \sigma_2^* A_2}{A_1 + A_2} \quad (\epsilon \geq \sigma_2^*/E). \quad (h)$$

在图 3 中,实线即对应于式 (f), (g), (h) 的应力-应变曲线,它们

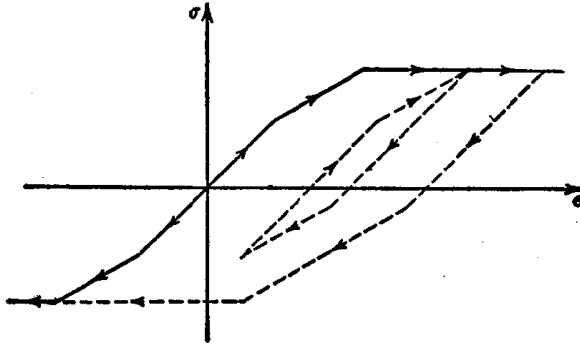


图 3. 组合理想塑性试件的应力-应变图

表示出组合试件在第一次加载时的力学性状。这种分析不难推广到卸载和重新加载的情形;图 3 中的虚线就是这样求得的。可以看出: 这种具有加工硬化的塑性材料的模型是遵从普朗特规律(见第 3 页)的。

在第一次加载时,两根理想塑性试件的组合应力-应变图是由对应于式 (f), (g), (h) 的三根直线段组成的。若增加此组合试件所包含的试件数目,则我们可以用应力-应变多边形按所需的接近度表示出任一给定的应力-应变曲线。但是,如果欲求组合试件的实际应力-应变曲线,则其所包含的试件的数目必须增至无限多。详细的讨论读者可参阅鲍能伯路斯特(Bohnenblust)和杜威兹(Duwez)的论文(文献 5)。

现在,我们可以较为详细地讨论在本绪论开始时所述的塑性理论的两个应用方面。首先,我们来考察图 4 所示的简单桁架。为简单起见,我们假设所有的杆都由同一理想塑性材料制成,并用了适当的横向支撑以防止屈曲。

图 4a 的桁架是静定的,其各杆的应力只要根据平衡条件即可求出,而无须考虑到杆的力学性状。这种静定桁架各杆的应力是与载荷 P 的大小成比例的。当载荷逐渐增加时,至少有一根杆中

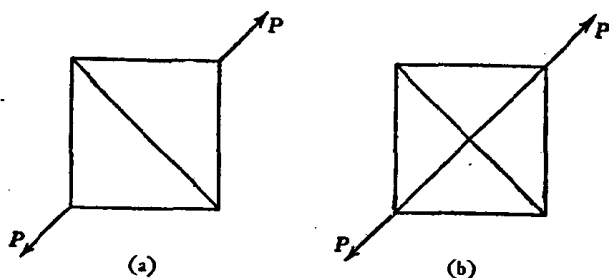


图 4. (a) 靜定桁架; (b) 靜不定桁架

的应力終要达到屈服应力 σ^* , 此时, 該杆开始发生塑性流动。在这种情况下, 桁架可以自由地变形, 而变形值远大于大多数应用场合所允許的数值。設桁架中受力最大的杆由于載荷 P 而产生的应力, 其绝对值等于 σ , 則靜定桁架的**安全系数**为 σ^*/σ , 即在桁架变为不能使用之前, 实际的載荷可按此比值增大。在这种靜定情况下, 欲求出安全系数, 只要求出由实际載荷所引起的应力即可。

其次, 考察图 4b 的桁架。假設此桁架是由图 4a 的桁架添加一軸綫与两載荷 P 的公共作用綫重合的对角杆而成。如此所得的桁架是靜不定的; 即使在弹性范围内, 杆的应力也与杆的力学性状有关。杆的力学性状通常可用弹簧常数来表征, 所謂弹簧常数就是产生单位伸长所需的力。如果附加的对角杆的弹簧常数远較其他各杆的弹簧常数为大, 則大部分載荷将由此对角杆来承担。当然, 此杆将因所受的載荷而伸长, 但伸长很小, 故只需載荷 P 的一小部分使其余的杆 (即图 4a 桁架中的諸杆) 变形以与附加对角杆的伸长相适应。反之, 如果附加对角杆的弹簧常数远小于其余諸杆, 則它只能負担一小部分載荷。

当杆的弹簧常数为已知, 且应力在弹性范围以內时, 应力当然与載荷 P 的大小成比例。随着載荷逐漸增加, 某些杆中的应力終要达到屈服极限 σ^* 。为了以下定性討論方便起見, 我們假設附加对角杆中的应力首先到达屈服极限。此时, 此杆便会在常应力下自由地作塑性流动, 但是, 作为桁架中的一杆來說, 它的伸长要受到其余各杆的限制: 只要其余各杆处于弹性应力状态, 則此杆件