

928360

高等学校教学用书

电 磁 场

田 一 涵 编



煤炭工业出版社

0441.4
6013

23366

22

高等学校教学用书

电 磁 场

田 一 涵 编

煤炭工业出版社

内 容 提 要

本书是工科高等院校电类专业电磁场课程的教学用书。全书共八章,包括静电场、恒定电场、恒定磁场、静电场的边值问题、时变电磁场、平面电磁波、导行电磁波及狭义相对论的基础知识,书中附有一定数量的思考题及习题。

本书还可作为有关工程技术人员的参考书。

责任编辑:胡玉雁

高等学校教学用书

电 磁 场

出 一 涵 编

*

煤炭工业出版社 出版

(北京安定门外和平里北街21号)

煤炭工业出版社印刷厂 印刷

新华书店北京发行所 发行

*

开本 787×1092mm¹/16 印张14⁷/₈

字数350千字 印数 1—1,065

1991年3月第1版 1991年3月第1次印刷

ISBN 7-5020-0501-3/TD·457

书号 3278

定价 3.90元

序

电磁场这门课程对于电类专业是十分重要的。国内外的经验、尤其是我国近十多年来的实践表明,工业电气自动化、无线电等电气类本科大学生,学习电磁场是非常必要的。这不仅是为了提高对各种电磁现象的认识、扩大专业基础知识,也是专业实际工作的需要。

本书在编写中力求紧密联系工程实际,深化基本概念,并尽力反映本学科的新成果,为读者今后处理日愈更新的工程技术问题,提供理论依据和基本方法。

全书内容包括静电场,恒定电流的电场和磁场,静电场的边值问题,时变电磁场,平面波和导行电磁波,最后叙述了狭义相对论及其重要结论,备选修或自学。

为便于学习,在附录中给出矢量分析、场论有关公式,电磁常数等内容。

用非标准分析和广义函数的观点和方法,描述场量及介质突变时的电磁规律,使问题变得颇为简捷、深入。在附录中辑录了若干关于 δ 函数性质的公式,供对此感兴趣的读者参考。

编写本书过程中,教研室李白萍,于志红,施晞同志选编了部分思考题和习题,李梦贤同志为本书编写作了不少工作,给编者很大帮助。在此谨表示诚挚的谢意。

限于编者水平,书中错误和不妥之处在所难免,欢迎广大师生和其它读者批评指正。

编 者

1988年11月于西安

目 录

第一章 静电场	1
第一节 电场强度	1
第二节 高斯定理	6
第三节 静电场的无旋性、电位	9
第四节 导体和电介质	14
第五节 静电场的基本方程	18
第六节 泊松方程和拉普拉斯方程	23
第七节 电容	25
第八节 静电场的能量与力	31
小结	36
思考题	38
习题	39
第二章 恒定电场	43
第一节 电流密度	43
第二节 电流连续性、弛豫时间	44
第三节 导电媒质中恒定电场的基本方程	46
第四节 恒定电场与静电场的比拟	50
第五节 部分电导、接地电阻	52
小结	53
思考题	54
习题	55
第三章 恒定磁场	57
第一节 磁感应强度、比-萨定律	57
第二节 磁通连续性、安培环路定律	61
第三节 媒质的磁化	65
第四节 恒定磁场的基本方程	68
第五节 向量磁位	70
第六节 标量磁位、恒定磁场与静电场的比拟	75
第七节 电感	78
第八节 磁场能量和力	82
小结	87
思考题	88
习题	89
第四章 静态场的边值问题	93
第一节 边值问题概述	93
第二节 唯一性定理	94
第三节 分离变量法	95

第四节	沙契涅夫理论	99
第五节	镜像法	102
第六节	两线平行传输线的电场	106
第七节	有限差分法	110
第八节	场的实验研究	112
小结		114
思考题		115
习题		116
第五章	时变电磁场	118
第一节	电磁感应的基本定律	118
第二节	全电流定律	122
第三节	麦克斯韦方程组	124
第四节	坡印亭定理、坡印亭矢量	126
第五节	正弦电磁场	130
第六节	波动方程、滞后位	133
第七节	辐射	137
小结		143
思考题		145
习题		145
第六章	平面电磁波	147
第一节	完纯介质中的均匀平面波	147
第二节	波的极化	151
第三节	损耗媒质中的均匀平面波	153
第四节	均匀平面波在平面上的垂直入射	158
第五节	涡流、集肤效应、邻近效应	164
小结		166
思考题		168
习题		169
第七章	导行电磁波	171
第一节	均匀传输线中导行电磁波的基本方程	171
第二节	正弦稳态下均匀传输线基本方程的解	177
第三节	均匀传输线的参数	180
第四节	均匀传输线导行电磁波的反射和透射、入端阻抗	183
第五节	无损耗线	186
第六节	电磁波在波导中的传输	194
第七节	同轴波导和介质波导	201
小结		205
思考题		206
习题		206
第八章	狭义相对论	208
第一节	洛伦兹变换	208
第二节	电磁场的变换	215
小结		219

思考题	220
习题	220
附录	221
一、矢量代数与矢量分析	221
二、场论中的重要公式和关系	223
三、 δ 函数	226
四、双曲函数公式	227
五、物理常数、材料电磁参数	229

第一章 静 电 场

电荷周围存在着电场。静止电荷的量值和分布状况都不随时间变化，它们形成的电场称为静电场。静电场在空间的分布情况也不随时间变化。电场是一种物质，静电场中电荷之间通过电场相互作用。

本章的目的是研究电荷分布以及介质对静电场构成的影响、静电场的性质及其分析方法。这些内容也是后面各章的基础。

第一节 电 场 强 度

库仑定律是静电场理论的基础。它是库仑于1785年通过实验总结出来的。库仑定律指出自由空间中，两个相距为 r 的点电荷 q_1 、 q_2 之间相互作用力的关系。所说的点电荷是指线度远小于 r 的带电体上的电荷。当电荷 q_1 、 q_2 同号时，作用力 F 为相互的斥力； q_1 、 q_2 异号时 F 为相互的吸引力。力的大小与电荷量成正比，与距离的平方成反比

$$\text{即} \quad F = K \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

式中， K 是常数，其值为正，大小决定于采用的单位制。

库仑定律的矢量表示式为

$$\mathbf{F}_{12} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{r}_{12}^0 \quad (1-1a)$$

式中， $\mathbf{F}_{12}$ 表示点电荷 q_1 作用于点电荷 q_2 上的力矢量， $\mathbf{r}_{12}^0$ 表示由 q_1 指向 q_2 的矢径 $\mathbf{r}_{12}$ 的单位矢量， $\mathbf{r}_{12}$ 的模即两点电荷间的距离 r ，如图1-1a所示。 q_1 、 q_2 同号时力 $\mathbf{F}_{12}$ 与单位矢量 $\mathbf{r}_{12}^0$ 方向一致，是对 q_2 的斥力； q_1 、 q_2 异号时， $\mathbf{F}_{12}$ 与 $\mathbf{r}_{12}^0$ 方向相反，表示对 q_2 的吸引力。同样可以写出

$$\mathbf{F}_{21} = K \frac{q_2 q_1}{r^2} \mathbf{r}_{21}^0 \quad (1-1b)$$

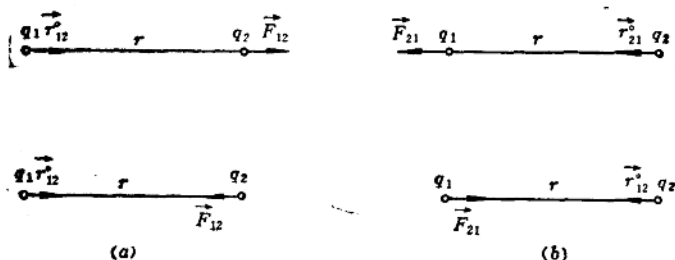


图 1-1 点电荷之间的作用力
a—点电荷同号；b—点电荷异号

式中, $\mathbf{r}_{21} = -\mathbf{r}_{12}$ 。

在不致引起混淆时, 单位矢量及力的脚号也可以不写出, 即

$$\mathbf{F} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{r}^\circ \quad (1-1c)$$

需要指出的是, 库仑定律中 r^2 中的“2”, 具有关键意义。静电场的性质就是建立在“平方反比”这个基础之上的。最近的实验数据与2的差已达到 10^{-16} 这样高的精确度, 微观范围在原子规模的距离 (即 10^{-10}m) 上, 精确度仍达到 10^{-9} 。这从根本上确立了静电场理论牢固的基础。

本书采用法定计量单位制。库仑定律中的电荷的单位是库仑 (C), 距离的单位是米 (m), 力的单位是牛顿 (N)。系数 $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, ϵ_0 是真空介电常数 $\epsilon_0 = 10^{-9}/36\pi \text{ F/m} = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ 。

任何力的作用, 都是通过一定物质传递的。电荷间的作用, 是通过各自周围存在的静电场这种物质作用于对方的。多个电荷分布不同时, 它们共同构成的静电场也不同, 对试体电荷作用也不一样。为了了解场中各点的情况, 我们把一试体电荷 q_i 置于静电场中, q_i 受力的大小和方向就描述了该点静电场的性状。显然, 试体电荷 q_i 的量值和线度愈小, 它本身的电场对原电场分布的影响就愈小, 就能更为精确地反映原电场的情况。理论上要求 q_i 的电量和线度均为无限小, 即 $q_i = 0^*$ 。单位试体电荷感受的力的大小和方向, 表示了一点处静电场作用的强度, 称为电场强度 $\mathbf{E}$ 即

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \mathbf{E}(x, y, z) = \frac{\mathbf{F}(x, y, z)}{q_i} \Big|_{q_i = 0^*} \quad (1-2)$$

式中, $\mathbf{R}$ 是从坐标原点指向场中一点 (x, y, z) 的矢径, $\mathbf{F}(x, y, z)$ 为位于点 (x, y, z) 的试体电荷 q_i 所受的力。用 0^* 表示无限小量。可见电场强度矢量 $\mathbf{E}$, 与产生电场的电荷有关而与试体电荷无关。电场强度也简称为场强。

根据库仑定律, 将两个点电荷中任一个看作试体电荷, 另一个作为场的源, 得到点电荷 [去掉脚号用 $q(x', y', z')$ 表示] 在场点 (x, y, z) 处的场强为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{R}) = \mathbf{E}(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(x', y', z')}{r^2} \mathbf{r}^\circ \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(\mathbf{R}')}{r^2} \mathbf{r}^\circ \end{aligned} \quad (1-3)$$

式中, $\mathbf{R}'$ 为从坐标原点指向场源电荷所在点 (x', y', z') 的矢径, r 为从 (x', y', z') 到点 (x, y, z) 的矢径 r 的长度即

$$r = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{1}{2}} \quad (1-4)$$

我们把场源电荷所在点称为源点, 用带撇的坐标 x', y', z' 表示源点的位置, 电场中的点称为场点, 用不带撇的坐标 x, y, z 表示其位置。 $\mathbf{r}, \mathbf{R}, \mathbf{R}'$ 三者的关系是

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} - \mathbf{R}' \quad (1-5)$$

与静电场力的关系一致, 电场强度符合叠加原理。由多个电荷形成的电场, 其场强是各电荷单独存在时场强的矢量和。

设有 n 个点电荷 $q_1, q_2, \dots, q_n$, 它们的坐标用 x'_i, y'_i, z'_i 表示, $i = 1, 2, \dots, n$ 。 n 个

点电荷在场点 (x, y, z) 形成的总的场强为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i(x'_i, y'_i, z'_i)}{r_i^2} \mathbf{r}_i \quad (1-6)$$

式中, $r_i = [(x-x'_i)^2 + (y-y'_i)^2 + (z-z'_i)^2]^{\frac{1}{2}}$, 是各源点到同一场点诸矢径 $\mathbf{r}_i$ 的大小, $\mathbf{r}_i$ 是矢径 $\mathbf{r}_i$ 的单位矢量。图1-2表示了三个点电荷产生的场强的情形。

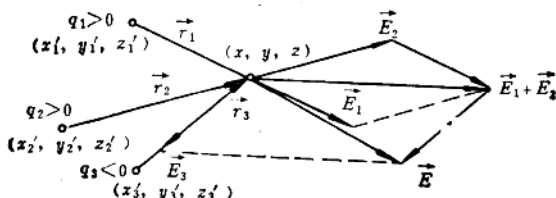


图 1-2 三个点电荷产生的场强

对于连续分布的电荷, 可以看成由许多点电荷组成, 分别求出各点电荷在场点产生的场强, 然后应用叠加原理, 通过积分求得全部电荷产生的场强。

若电荷是沿一条线 l 分布, 电荷线密度为 $\tau(\mathbf{R}') = dq/dl'$, 电荷量的微分为一无限小量, 即一元电荷

$$dq = \tau(\mathbf{R}') dl' \quad (1-7)$$

若电荷是分布在一个面 S 上, 电荷面密度 $\sigma(\mathbf{R}') = dq/dS'$, 这时元电荷

$$dq = \sigma(\mathbf{R}') dS' \quad (1-8)$$

若电荷分布在体积 V' 内, 则其元电荷

$$dq = \rho(\mathbf{R}') dV' \quad (1-9)$$

$\rho(\mathbf{R}')$ 是电荷的体密度。

事实上, 电荷的任何一种分布形式, 都占有一定的体积。为了正确地描述这一点可使用 δ 函数。根据 δ 函数的性质

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases} \quad (1-10a)$$

$$\int \delta(x) dx = 1 \quad (1-10b)$$

从积分式可以看出, 一维 δ 函数的量纲是 $1/m$, 积分值是 1, 说明 $\delta(x)$ 函数表示 x 方向的变化率。式 (1-10a) 则说明这个变化率的值在 $x=0$ 处是 ∞ , 在其它 x 值处变化率为 0。

面密度为 σ 的面电荷。实际上其厚度为无限小 0^* 。电荷在厚度方向上分布的变化率恰好可用 δ 函数表示。假定坐标原点在电荷分布面上一点处, x 轴与面垂直, 有限量电荷沿 x 方向分布在原点无限小距离内, 这样面电荷的体密度^①可表示为

$$\rho_s = \sigma \delta(x) \quad (1-11)$$

① 对于以线密度 $\tau(x)$ 分布的线电荷, 以及点电荷 q 都可用 δ 函数表示出它们的体密度来, 它们分别是,

线电荷体密度 $\rho_l = \tau \delta(x) \delta(y)$

点电荷体密度 $\rho_p = q \delta(x) \delta(y) \delta(z)$

图1-3表示各种分布下的电荷密度。

连续分布的电荷，每一元电荷均在场点产生场强

$$d\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \frac{dq(\mathbf{R}')}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}^0$$

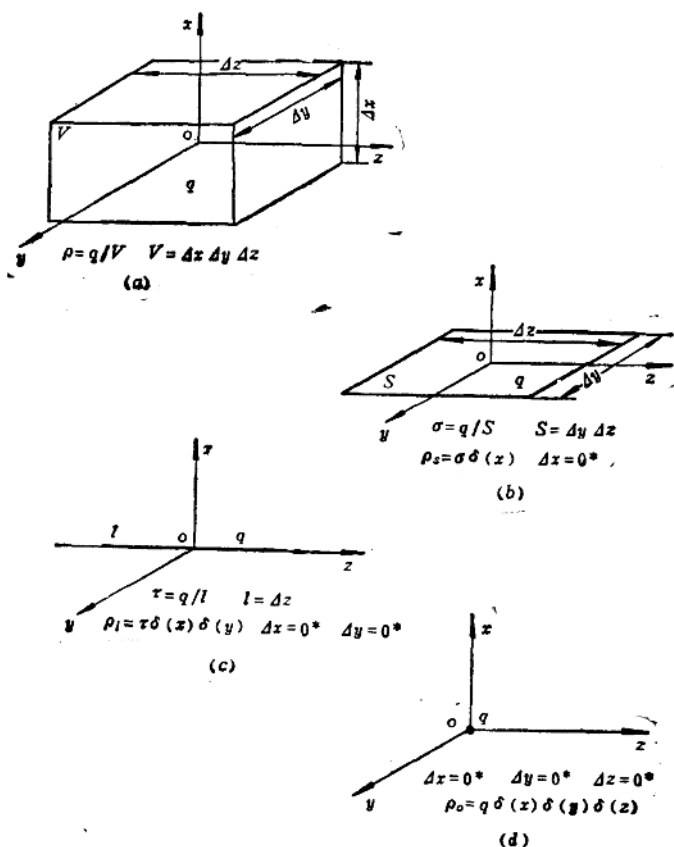


图 1-3 电荷密度

a—体电荷密度 ρ ，b—面电荷的体密度 ρ_s ，c—线电荷体密度 ρ_l ，d—点电荷的体密度 ρ_o 。

全部电荷产生的场强 $\mathbf{E}$ 为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \mathbf{r}^0 \quad (1-12)$$

由式 (1-7)，式 (1-8) 和式 (1-9) 给出的元电荷即点电荷。这样对线电荷有

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{l'} \frac{\tau(\mathbf{R}') dl'}{r^2} \mathbf{r}^0 \quad (1-13)$$

对于面电荷有

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{R}') dS'}{r^2} \mathbf{r}^\circ \quad (1-14)$$

对于体电荷有

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{R}') dV}{r^2} \mathbf{r}^\circ \quad (1-15)$$

应该指出,当场点一定时,上述积分中的 r 和 $\mathbf{r}^\circ$ 是随着源点坐标 $\mathbf{R}'$ 变化的。

按照场强分布绘制曲线,使曲线 l 上任一点的切线方向都和该点的场强 $\mathbf{E}$ 重合,即 $d\mathbf{l}/E = d$, d 为一标量, $d\mathbf{l}$ 为曲线切线方向上的微分。这种曲线称为场强线。电场强度线表明电场分布的状态,线的疏密表示了场强的强弱,场强线弯曲的情况,显示电场强度矢量方向的变化。

例1-1 已知线电荷密度为 τ ,求无限长均匀直线电荷外一点的场强。

解 直线电荷的场是以该直线为轴呈圆柱对称的,适于选用圆柱坐标。使线电荷与 z 轴重合,如图1-4b所示。在与 z 轴垂直的平面上,场强以辐射状分布着,因此场强没有在 ϕ 方向上的分量 E_ϕ ,如图1-4a所示。由于线电荷无限长,在有限的范围内,线外一点 $P(r, \phi, z)$ 的场强与 z 无关。为了简便,计算一点 $P(r, 0, 0)$ 处的场强。

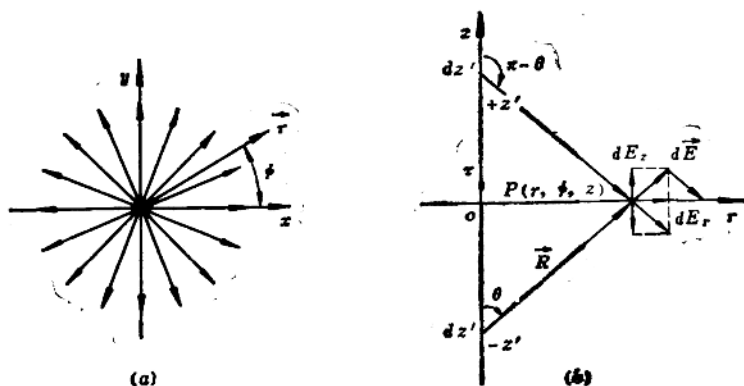


图 1-4 计算线电荷的场强

在 $+z'$ 和 $-z'$ 处各取长度元 dz' ,其上元电荷均为 $dq = \tau dz'$ 。 $-z'$ 处元电荷在场点 P 的场强为

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} \mathbf{R}^\circ$$

单位矢量 $\mathbf{R}^\circ = \cos\theta\mathbf{a}_z + \sin\theta\mathbf{a}_r$ 。因为 $-\cos(\pi-\theta) = \cos\theta$,对称的 $\pm z'$ 处的元电荷在 P 点产生的场强,它在 z 方向的分量方向相反、量值相等互相抵消,只存在 r 方向上的分量

$$\begin{aligned} dE_r &= dE \sin\theta \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau dz' \sin\theta}{R^2} \end{aligned}$$

由图1-3b看到 $-z' = r \cot\theta$, $dz' = (r/\cos^2\theta) d\theta$, $R = r/\cos\theta$,这样

$$dE_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau \sin\theta}{r} d\theta$$

求积分得无限长直线电荷在P点的场强为

$$\begin{aligned} E(r, \phi, z) &= \int_0^\pi \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau \sin\theta d\theta}{r} \mathbf{a}_r \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r} \mathbf{a}_r \end{aligned}$$

第二节 高 斯 定 理

电场强度 $\mathbf{E}(x, y, z)$ 的性质,表现了静电场的矢量场的性质。对于矢量场,需要分析矢量在闭合曲线上的环量及矢量在闭合面上的通量,才能全面了解它^①。这里先研究静电场场强在闭合面的通量的性质。

首先,介绍立体角的概念。一无限小的面积 dS 即元面积(或称面积元),在空间可以有不同的取向,因此它是矢量,用 $d\mathbf{S}$ 表示。 $d\mathbf{S}$ 的模 dS 即面积元的大小 dS , $d\mathbf{S}$ 的正方向与面积元 dS 的法线方向相同。面积元 dS 对相距 r 处一点 P 所张的立体角 $d\Omega$ (如图1-5所示)用矢量 $d\mathbf{S}$ 表示为

$$d\Omega = \frac{\mathbf{r}^\circ \cdot d\mathbf{S}}{r^2} \quad (1-16)$$

式中, $\mathbf{r}^\circ$ 是由 P 点指向面元的矢径 $\mathbf{r}$ 的单位矢量。



图 1-5 面积元 dS 对一点 P 所张的立体角 $d\Omega$

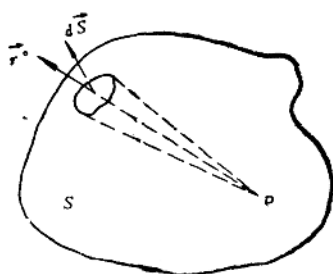


图 1-6 闭合曲面 S 对其内一点张的立体角

由式(1-16)可见,立体角 $d\Omega$ 表示了面积 dS 覆盖点 P 周围空间的程度,它不仅取决于面积的大小,还取决于面积的取向及与点的距离。立体角的值可正可负,由面积矢量 $d\mathbf{S}$ 与单位矢量 $\mathbf{r}^\circ$ 的夹角确定。立体角的单位是球面度(sr),量纲是1。圆球面上大小为球半径平方的面积对球心所张的立体角为一个球面度。显而易见,圆球表面积($4\pi r^2$)对球心张的立体角为 4π 球面度。任意形状闭合曲面都遮盖了它内部一点周围的全部空间,所张的立体角亦为 4π 球面度,如图1-6所示。闭合曲面对其内部点张角的表达式为

$$\Omega = \oint_S d\Omega = \oint_S \frac{\mathbf{r}^\circ \cdot d\mathbf{S}}{r^2} = 4\pi \quad (1-17)$$

如点 Q 在闭合曲面外,如图1-7所示一部分曲面所张立体角为正,其余曲面所张立体角则

^① 此即亥姆赫兹定理。证明见附录二。

为负, 两者大小相等, 总的立体角为零。

矢量场中, 矢量在曲面上的积分, 通常称为矢量在曲面上的通量。电场强度 $\mathbf{E}$ 在曲面 S 上的通量用 ψ_E 表示

$$\psi_E = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (1-18)$$

ψ_E 的单位为伏特·米 ($\text{V} \cdot \text{m}$)。如果曲面 S 是闭合的则

$$\psi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (1-19)$$

这时面积元矢量 $d\mathbf{S}$ 的正方向指向闭合曲面外。

为了研究静电场通量的性质, 先设电场由一点电荷 q 产生, 据式 (1-3) 知 q 产生的场强为

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(x', y', z')}{r^2} \mathbf{r}^0$$

求包围 q 的闭合曲面 S 上场强 $\mathbf{E}$ 的通量为

$$\psi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\mathbf{r}^0 \cdot d\mathbf{S}}{r^2} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1-20)$$

如果场强 $\mathbf{E}$ 是由 N 个点电荷 $q_1, q_2, \dots, q_N$ 共同产生的, 根据叠加原理 $\mathbf{E}$ 是各点电荷产生的场强 $\mathbf{E}_i$ ($i=1, 2, \dots, N$) 的矢量和, 即 $\mathbf{E} = \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i$ 。场强的通量为

$$\begin{aligned} \psi_E &= \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i \right) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \sum_{i=1}^N \oint_S \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \end{aligned} \quad (1-21)$$

对于连续分布的电荷, 引用式 (1-13) ~ 式 (1-15) 并交换积分顺序, 得到电场强度通量

$$\begin{aligned} \psi_E &= \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \mathbf{r}^0 \right) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dq \left[\oint_S \frac{\mathbf{r}^0 \cdot d\mathbf{S}}{r^2} \right] \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_{(V, S, \dots)} dq \end{aligned} \quad (1-22)$$

式 (1-20) ~ 式 (1-22) 说明, 真空中静电场在任一闭合曲面 S 上的电场强度通量, 等于曲面内所包围的电荷代数和 q 与 ϵ_0 之比, 即

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1-23)$$

这一方程说明了真空中静电电荷与电场强度之间的关系, 称为真空中的高斯定理。高斯定理与库仑定律是等价的。

一般情况下, 在已知电荷分布时不能用高斯定理计算电场强度。但是, 当电荷分布具

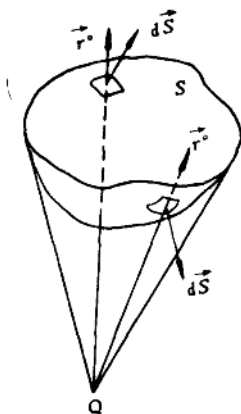


图 1-7 闭合曲面 S 对其外一点 Q 所张的立体角

有一定对称性时, 根据效果均等的原则, E 的分布也有某种对称分布的特征。恰当地选择闭合曲面的形式和位置, 能够简便地求得电场强度 E 。

例1-2 真空中有一球形分布的电荷, 球的半径为 R , 电荷体密度 ρ 均匀, 求电场强度。

解 由于电荷是以球心成球对称分布的, 场强也必为球对称分布, 电场强度矢量的方向与半径 R 一致。距球心等距处场强大小相等。

以 O 为球心, r 为半径的球面 S 作为高斯面, 如图1-7a所示。 E 在 S 面上处处与面积元 dS 方向相同, 高斯面 S 上 E 的通量为

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S E dS = 4\pi r^2 E$$

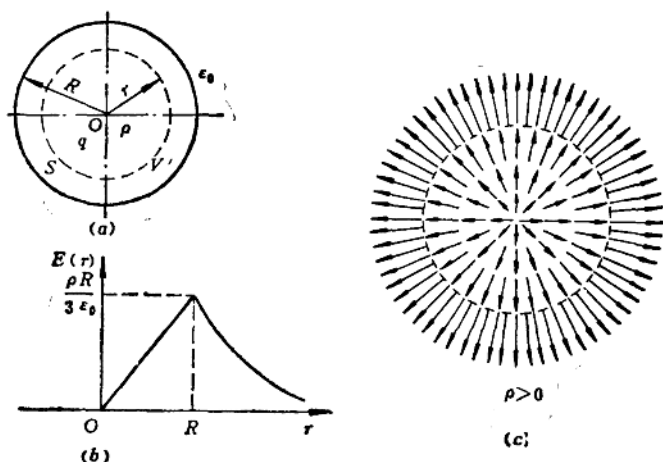


图 1-8 球形分布电荷的场强

(a) 球形分布电荷; (b) 场强分布函数 $E(r)$; (c) 场强线

S 面包围的电荷为

$$q = \int_{V'} \rho dV = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

当 $r \leq R$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \mathbf{r}^\circ$$

当 $r > R$

$$q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}^\circ$$

ρ 为正, E 与 $\mathbf{r}^\circ$ 同向; 反之 E 与 $\mathbf{r}^\circ$ 反向。 $E = E(r)$ 的曲线及 E 矢量的分布示于图1-8b、c上。

为了研究场中每一点, 即无限小体积上电荷与场强的关系, 需要求出高斯定理的微分形式。用电荷体密度 ρ 表示电荷 q , 并对积分形式的高斯定理式 (1-23) 左端引用散度定理, 得

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad (1-24)$$

上式对于任意大小、形状的体积 V 均成立，因而必有

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x, y, z) \quad (1-25)$$

此即高斯定理的微分形式。它说明任一点上，电场强度 $\mathbf{E}$ 的散度等于该点电荷体密度与 ϵ_0 的比值。

矢量场散度的定义是

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(x, y, z) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} \quad \Delta V = 0^* \quad (1-26)$$

式中 $\Delta V = 0^*$ 为无限小体积。可以看出，在一点上场矢量 $\mathbf{E}$ 的散度，是该处体积无限小时，包围该体积的闭合面上 $\mathbf{E}$ 的通量 $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ 和体积的比。从这一定义出发分析高斯定理的微分形式，当场源电荷体密度 $\rho > 0$ 时，散度 $\nabla \cdot \mathbf{E} > 0$ ，由无限小体积的表面发出电场强度的通量，场矢量 $\mathbf{E}$ 由该点指向外，如图 1-9 P 点；若 $\rho < 0$ ，如 P_1 点，场矢量 $\mathbf{E}$ 由四周指向该点，无限小体积上汇聚了电场强度的通量。在电荷体密度为零处，如图 1-9 P_2 点，一部分场矢量指向该点，同时另一部分场矢量由该无限小体积指向周围，散度 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ，电场强度线仅仅由该点经过。

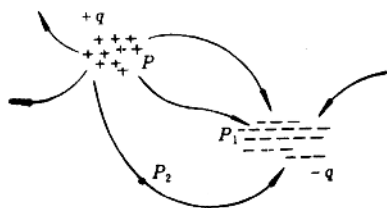


图 1-9

在电荷体密度为零处，如图 1-9 P_2 点，一部分场矢量指向该点，同时另一部分场矢量由该无限小体积指向周围，散度 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ，电场强度线仅仅由该点经过。

电场强度的散度 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ 也可用 $\text{div} \mathbf{E}$ 表示。

矢量算子 ∇ 读作 del 或 nabra。在直角坐标系中 ∇ 的表达式为

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad (1-27)$$

可以把 ∇ 作为矢量看待。这样 $\mathbf{E}$ 的散度就是两个矢量的点积

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \cdot (E_x \mathbf{a}_x + E_y \mathbf{a}_y + E_z \mathbf{a}_z) \\ &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (1-28)$$

可以看到，矢量场的散度是标量。

应该指出，静电场是有源场的含义有二：其一是电荷是产生静电场的源，电场强度线始于正电荷，止于负电荷；其二是电荷密度不为零处， $\mathbf{E}$ 的散度不为零，但并非静电场处处有源，在源电荷以外的地方 $\rho = 0$ ，此处静电场为管形场。

第三节 静电场的无旋性、电位

上节分析了静电场场强在闭合面上的通量，得到静电场是有源场的结论。现在讨论静电场的环量性质，它与电荷在静电场中做功有密切的联系。

为了不影响欲研究的静电场的分布情况，取点电荷 q 作为试体电荷置于场中，使其沿

曲线 l 由 a 点移动至 b 点,如图1-10所示。 q_i 移动时极其缓慢。这时电荷受力为 $\mathbf{F} = q_i \mathbf{E}$,电场力作功为

$$A = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q_i \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-29)$$

式中, $\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ 为沿路径 l 静电场对单位电荷所作的功,称为由 a 至 b 的电压 U_{ab} ,即

$$U_{ab} = \frac{A}{q_i} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-30)$$

设若 a 、 b 间为一很小距离 Δl ,式(1-30)可写为 $U_{ab} = \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{l}$ 。可见如果 $\mathbf{E}$ 和 $\Delta \mathbf{l}$ 方向相同, U_{ab} 为正,说明电压的正值是和场强 $\mathbf{E}$ 的正方向一致的。

下面分析场源电荷分布与电压的关系。若静电场是由一个点电荷 $q(\mathbf{R}')$ 产生的,在图1-10中有 $\mathbf{r}^\circ \cdot d\mathbf{l} = dr$,代入点电荷场强表达式,得

$$U_{ab} = \int_{r_a}^{r_b} \frac{q(\mathbf{R}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}^\circ}{r^2} \cdot d\mathbf{l} = \frac{q(\mathbf{R}')}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) \quad (1-31)$$

上式给出了静电场的重要性质,任意两点间的电压只与点的位置有关,而与由一点至另一点的路径无关。对于场源是若干个离散的点电荷或者是连续分布的情形,上述结论同样成立。因为当把任意分布的场源都看作由点电荷叠加而成时,对于每一个场源点电荷,其位置均确定,因而都有一个如式(1-31)的表达式相对应。每一式中的 r_a 、 r_b 是由不同的场源点电荷分别到 a 、 b 两点的距离。应用叠加原理,最后得到的电压表达式显然也只与 a 、 b 的位置有关。

静电场上述性质,还表现为另外的形式。电场力沿闭合路径对单位电荷所作的功,即 $\mathbf{E}$ 沿闭合路径的线积分,就是场强 $\mathbf{E}$ 的环量。设闭合路径为图1-11所示的 $ambna$,根据式(1-31),有

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{ambna} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{amb} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_{ana} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1-32)$$

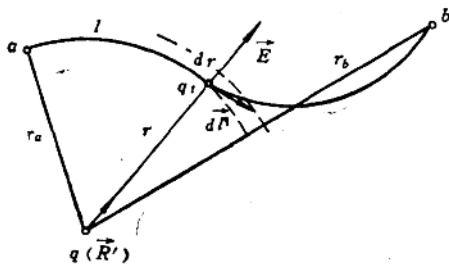


图 1-10 静电场对电荷 q_i 作功

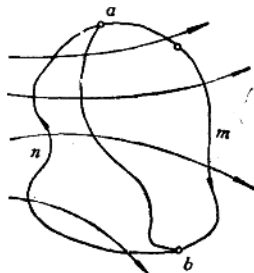


图 1-11 静电场对沿闭合路径移动一周的电荷作功

即静电场场强的环量等于零。电荷在静电场中沿空间闭合曲线移动时电场对电荷作功使电荷能量增加;或者作负功使电荷能量减少;或者不作功。式(1-32)表达了静电场的能量守恒关系,即电荷移动一周后,无论电荷能量增减过程多么复杂,电场与电荷的能量均回到原来状态,无增无减,此即静电场场强环量为零的意义。式(1-32)称为静电场的守恒性或保守性。