

# 应用力学

(三)



科学技术文献出版社重庆分社

### 应 用 力 学(三)

---

|                  |     |
|------------------|-----|
| 中国科学技术情报研究所重庆分所  | 编 辑 |
| 科学技术文献出版社重庆分社    | 出 版 |
| 重庆市市中区胜利路91号     |     |
| 四川省新华书店重庆发行所     | 发 行 |
| 科学技术文献出版社重庆分社印刷厂 | 印 刷 |

---

|                    |                  |
|--------------------|------------------|
| 开本: 787×1092毫米1/16 | 印张: 5.375字数: 13万 |
| 1981年10月第一版        | 1981年10月第一次印刷    |
| 科技新书目: 15—214      | 印数: 3850         |

---

书号: 13176·102

定价: 0.60元

# 目 录

## 研究三维裂纹问题的基本力学概念

|                                              |        |
|----------------------------------------------|--------|
| 和数学方法(述评).....                               | ( 1 )  |
| 弹塑性平面应变裂纹增长的理论实验的比较.....                     | ( 7 )  |
| 有分段线性特性的随机系统的积分.....                         | ( 16 ) |
| 球形大变形冲击响应分析.....                             | ( 27 ) |
| 关于金属材料热疲劳的最近的研究(2) .....                     | ( 34 ) |
| 新的累积损伤模型(3) .....                            | ( 39 ) |
| 固体力学的实验方法.....                               | ( 48 ) |
| 实验应力分析手册 (三、机械式应变指示器和<br>记录器; 四、光测弹性学) ..... | ( 61 ) |

# 研究三维裂纹问题的 基本力学概念和数学方法(述评)

V. V. Panasyuk, A. E. Andrejkiv, M. M. Stadik

## 序 言

二十年来,对于断裂理论,苏联和其它国家的科学家已经深入作过研究。众所周知的脆性固体裂纹扩展的力学概念,也曾在此[1, 2]中作过进一步研究。对于脆性固体的塑性变形现象,在此[3—18]中已形成了一个新的方法,这方法是经深入考虑过的。并且还找到了一些求解基础的二维和三维裂纹问题的一些新的数学方法。尽管三维裂纹问题在理论和实践上都很重要,但对它们没有给予应有的重视。这些问题的公式化和求解所产生的实际困难,说明了这个事实。本文讨论了求解三维裂纹问题的一些结果,在此[19—21]中叙述和讨论了二维裂纹问题。

在一般情况下,求解裂纹问题包括两个阶段:(1)将固体中裂纹扩展的基本力学概念公式化,并以这些概念为基础导出准则式。(2)估计变形固体中一条裂纹(或一些裂纹)附近的局部应力场特点。

这二阶段都应用求解裂纹问题的各种方法。解决这类问题没有万能的方法。为了简化求解过程,研究人员不是引入一些附加的假设就是用相当的近似公式来求解问题。

本文讨论求解裂纹问题第一阶段所用的一些基本概念。还简要说明了第二阶段使用的某些数学方法。分析了某些问题的解,考察了受静载荷、脉冲载荷和不均匀温度场影响的脆性断裂固体的情况。

## 1. 三维固体中裂纹扩展的基本力学概念

众所周知的三维裂纹问题,一般是作为固体应力-应变状态对称于裂纹平面这种情况处理的。在求解问题的第一阶段,都应用了众所周知的Griffith-Irwin力学概念和 $\sigma_K$ 模型或其改型[1, 2, 22—24]。

正如大家所知道的,首次考察裂纹扩展问题的是Griffith[1],他用公式表示下述裂纹扩展原理:在脆性固体裂纹扩展过程中,当应变能释放率超过裂纹表面能增量时,裂纹就开始扩展,即:

$$\frac{\partial}{\partial l}[u(l) - w(l, p^*)] = 0 \quad (1.1)$$

式中 $u(l)$ 是裂纹表面能; $w(l, p)$ 是由裂纹开口决定的弹性变形能,当固体受外载荷 $p$ 作用时,裂纹长度等于 $2l$ ;  $p^*$ 是载荷 $p$ 的极限值。后来,这个概念由Orowan[25]推广用于脆性固体。他建立了产生新的裂纹面所必需的能量与塑性变形功之间的关系。这种推广对Griffith理论应用于金属是一个很重要的贡献。

对于完全弹塑性固体的情况,在此[26, 27]中Morozov已经阐述过开裂固体的极限平衡能量准则。他的著作不仅包括极限平衡准则,而且也包括了确定断裂引发区域特征的条件。Cherepanov在[28]中提出了描述裂纹在任意连续介质中扩展的一般方法。这种方法是基于裂纹尖端“细薄结构”的概念为基础的。在这种情况下,断裂固体的极限平衡条件取下列形式:

$$R \int_0^{2\pi} [(E+K-B)\cos\theta - A] d\theta = 2\gamma \quad (1.2)$$

式中E、K、B、A分别表示内力功，动能，体力功，面力功的值，并且它们都能够根据问题的奇异解计算；R是以裂纹尖端为中心的圆的半径；R的值与固体本身以及那些裂纹的尺寸相比是很小的； $\theta$ 是以裂纹尖端为中心的极坐标的角度； $\gamma$ 是材料断裂能密度。

上述这类脆性断裂能量准则，对固体应力状态相对裂纹扩展平面对称并使裂纹在此平面内扩展的任何情况，实际上都是适用的。在文献[29—31]中，根据裂纹在最大弹性性能密度方向扩展的假定，对复杂应力状态推广了能量准则。

在力能学方法范围内求解三维裂纹问题时，我们碰到了相当大的困难。这些困难用Irwin在[2]中提出的方法曾有所克服，他在[2]中提出两种准则是等效的。Irwin准则的实质在于：假定局部断裂瞬时研究的裂纹等值线点（裂纹在这点扩展）上的应力强度因子等于材料常数 $K_{Ic}$ 特征值（其断裂韧性），即：

$$\sigma_z(x, y, 0) = \frac{K_I(p, \alpha)}{\sqrt{2\pi s}} + O(l) \quad (1.3)$$

$$K_I(p_*, \alpha) = K_{Ic} \quad (1.4)$$

式中 $p_*$ 是使裂纹开始扩展的外载荷数字参数的极限值；S是在 $z=0$ 的裂纹平面上起自裂纹法向的裂纹等值线的距离； $O(t)$ 是正应力 $\sigma_z(x, y, 0)$ 的定常部分；a是裂纹尺寸。

对于三维问题的复杂应力状态的情况，在[32, 33]中推广了这个准则。

以假定裂纹在基本平面内开始扩展并横穿拉应力达到最大的裂纹前缘为基础，确定了裂纹扩展的启裂位置和方向。

Griffith-Irwin模型是不完全的，例如：除了准则式以外，此模型并未包含用准则式很有成效的、确定固体和裂纹尺寸的数学比关系。上述模型的这些条件是后来通过分析所获得的，在[4]中作了叙述。

当三维断裂固体受不均匀温度场影响时，不仅根据Irwin方程式而且也根据反映温度场对初始裂纹扩展特性影响的附加条件，来确定固体的极限平衡状态。[32—34]在这方面作过探讨。在这些著作中，根据温度值用三阶多项式近似表示断裂韧性的特征。其结果与[34]中描述的在实际使用温度范围内的大量实验结果相符合。

为了求解三维裂纹问题，许多科学家使用了如[22, 23]中众所周知的 $\delta_K$ 模型。根据这个模型，假定沿粘聚力受到削弱的裂纹有一个区域d。这个区域很细小，并且被认为是一条裂纹切口，其相对边被材料常数，即 $\sigma_0$ 所吸引。在初始裂纹的末端，当法向位移值等于材料的另一参数 $\delta_K$ 时，裂纹的局部扩展就开始。即：

$$2w(p_*, \sigma_0, \gamma(\alpha_*), d) = \delta_K \quad (1.5)$$

这里， $w(p, \sigma_0, \gamma(\alpha), d)$ 是用线弹性理论的方法得到的裂纹表面的法线位移， $\gamma(\alpha)$ 是设在裂纹平面上的极坐标 $O\alpha$ 中的初始裂纹围线的矢径， $\alpha_*$ 是附近达到极限平衡状态的裂纹围线各点的极角，p是对称于裂纹平面的外载荷的参数， $p_*$ 是外载荷p的极限值。必须注意，Griffith-Irwin模型应该看作是[20]中所介绍的 $\delta_K$ 模型的一种特殊情况。当被削弱了结合力的范围变得比固体和裂纹尺寸小时，用这些模型得出的结果仍相类似。文献[35]中概述了用于硬固体的模型。在遵守线弹性断裂力学条件下，似脆性固体中扩展裂纹围线附近局部断裂的大多数已知模型与Griffith-Irwin模型完全相同。在这些方法中，防止裂纹扩展的局部材料特性（材料的裂纹扩展阻抗）仅仅决定应力张量分量奇异部分的系数 $K_I$ 的临界值。由于使用了这些方法，就不再考虑裂纹尖端附近应力张量的规律部分。

实际上，在弹、塑性固体和固体处于三维应力状态的情况下，裂纹尖端附近的应力张量分量的规律部分，对裂纹围线附近形成断裂起始区有很大意义，并且这样也影响了

固体的局部断裂过程。那就是为什么在带裂纹固体断裂过程中,由于加载方式不同,标准的Irwin方程对这些固体不是常数的原因。在[36, 37]中提出了一个用于弹塑性断裂固体局部断裂的一般化计算模型。将应力张量分量的奇异部分和规律部分同扩展裂纹尖端附近的材料其他特性( $K_{Ic}$ 除外)作了综合考虑。用这种方法可以对局部断裂的微观力学特点获得更为完整的认识,而且也可以确定为什么材料的断裂韧性 $K_{Ic}$ 与其他力学特性和微观结构特性之间有相互关系。在[36, 37]中提出的这个模型是较完善的,因为它不仅包含局部断裂的准则式,而且还包含确定固体和裂纹尺寸以及对这种情况建立有效方程式的一些数学关系。

这个模型构成了研究三维弹塑性固体在复杂应力状态条件下裂纹扩展的基础。

在[38, 39]中Novozhilov发展了脆性断裂问题的另一种新方法。他评述了弹性固体(具有物理非线性特性)非平凡平衡形式的裂纹。这种方法适用于发现固体中裂纹型缺陷的起源。

Guz等人[40]研究过薄壁断裂构件的强度问题。在那篇著作中提出了一种方法来确定临界裂纹长度值,此值取决于局部失稳状态发生在脆性断裂之前的这种构件的厚度情况。

在文献[3—5, 7—18, 41—61]中讨论了似脆性固体局部断裂的许多其他模型。由于他们很少用于三维裂纹问题,因此在这里未予提及。

似脆性断裂理论的基本观点之一在于研究固体在长期循环载荷作用下的裂纹扩展过程。但在这方面只有很少的分析结果[4, 5, 7, 62—74]。在文献中叙述的研究主要是以Paris等人的概念为基础[75]的。当用单参数来描述裂纹的动力特征时,这个概念仅适用于对称疲劳裂纹扩展的情况,即板内直线型裂纹和三维固体平面内的圆裂纹扩展的情况。这个概念以假设实验建立的疲劳裂纹扩

展速率是应力强度因子 $K_I$ 的单一特征函数为基础。其它研究者在他们的著作中所阐明的结果,对更明确地定义上述特征函数指明了途径,这个特征函数以表征疲劳裂纹扩展条件的一些其他参数为基础[4, 5, 7, 62—67, 76—84]。

在这个基础上,Cherepanov[5]应用能量方法来获得疲劳裂纹扩展速率与应力强度因子的解析关系。下面的假设构成了这种方法的基础(概念 $\gamma_*$ ):在恒温和环境条件下,随新生表面每单位面积内疲劳裂纹生长所产生的能量消耗 $\gamma_*$ 是材料的常数。这个假设是Irwin-Orowan概念对不稳定裂纹扩展的推广。

文献[4, 84—87]将Paris, Gomer和Anderson概念推广到三维固体在复杂应力状态下疲劳裂纹的扩展。这些著作包含一个确定疲劳裂纹扩展动力学的完整方程组。这能使我们解决若干三维裂纹问题和确定疲劳裂纹扩展的动力特征。

三维固体中疲劳裂纹扩展的某些问题曾用有限元法求解过[91, 92]。

为了研究三维弹塑性固体的疲劳裂纹扩展,研究者[37]承认这样的假定:在疲劳裂纹起始区域,疲劳裂纹扩展速率是拉伸变形的一个简单的特征函数。用这种方法获得的动力学方程组,与其他方法相反,不仅包含了应力强度因子,而且也包含了应力分量的规律项。这就使我们能够根据物理学的观点更精确地确定整个疲劳裂纹的扩展阶段。

上述所有力学概念对于三维裂纹问题都曾应用过。

## 2. 数学方法在三维裂纹问题中的应用

求解三维裂纹问题的第二步特征如下:以最适合于这些问题的形式建立三维固体弹性平衡一般微分方程的通解;利用给出的边界条件和已得到的一般弹性解,将问题简化为相应的方程(包括微分、积分、代数方程等);研究适用于求解这些方程的方法。

Ljav的解是轴对称问题最适当的解[93],即用双调和函数来表示弹性解。这个

解被认为是Bussinesq—Galerkin解的特殊情况,即利用沿对称轴方向的一个分量来确定双调和矢量。

通常以含有四个双调和函数的Papkovitch-Neuber[93]表达式来表示三维裂纹固体的应力状态。但这个解对于其光滑表面受非均匀温度场影响的裂纹不太有用。在这种情况下, [37, 94, 95]中所得到的解更为有效。在这些文章中,通过温度分布函数和三个调和函数,描述了三维固体的应力和位移,用其中一个确定出裂纹平面的正应力,用另外二个确定出切应力。而对于纯拉伸和纯剪切[93], Keet和Khair[96]通过解的迭加,由调和函数积分得出了同样的解。在文献中已讨论过弹性平衡问题的许多其他通解。由于那些解很少应用于三维裂纹问题,故在本评论中不涉及那些解。

如果裂纹位于同一平面内,且固体所受的外力相对这一平面对称,则弹性平衡问题就简化为用已知的数学方法即可求解的混合弹性问题。因此,许多混合的边值问题就简化为具有其核取决于自变量差值的第一和第二类积分方程。为求解这些方程, Wiener和Hopf[97]根据因式分解原理提出了一个方法。在[98—101]中叙述了因式分解法。但当问题简化为应用因式分解方法的最佳形式时,我们在计算过程中却遇到了大量困难。而应用近似的因式分解方法,则能使我们避免这些困难。Koiter在[102]中研究了这种方法, Alexandrov在[103—106]中进一步发展了这种方法。Chersky[107]和 Babeshko [108]为这个因式分解法打下了牢固的基础。

还将众所周知的正交多项式法有效地应用到类似于实际问题(根据数学观点)的三维裂纹问题。Popov[109—110]介绍了这种方法的实质。这种方法是特殊形式的谱比例为基础的,用它可以使我们以已知多项式的级数形式获得混合弹性问题奇异方程的解。

根据积分转换法,对称裂纹问题可以简化为重积分方程。有许多求解这些方程的方

法。方法之一是补充确定法。Noble[111]首次将其用于求解重积分方程。为了得到二元连续方程的解, Tranter[112]进一步改进了这种方法。

Lebediev[113, 114]和Cooke[115]首先把置换法用于求解重积分方程。这一方法的基本原理是选择通过 $A(\alpha) = L\phi$ 的代换,得到恒能满足最初的二元方程中某一方程的线性算子。为了求解大量的各种重积分方程,在[116—122]中进一步推广了这种方法。在[99, 101, 123—128]中,对这种以复变函数理论为基础求解重积分方程的方法进行了讨论。

在[129—137]中研究了求解重积分方程更有效的方法。这种方法以变换算子的概念为基础,通过转换方法或通过补充确定依次化简,或整理成第二类方程把重积分方程化简为易解的形式。Vorovich和Ustinov[138]通过把重积分方程化简为第二类积分方程,首次把上述整理方法用于解重积分方程。

对于一个同轴的裂纹系,对称弹性问题就简化为通过[139]中提出的方法求解的N-型积分方程。在N-型积分方程情况下,对于三重积分方程,这一方法是以众所周知的Collins-Cooke法[140—142]的推广形式为依据的。

在[143—148]中讨论了依据多连通区域确定的二维重积分方程的更一般情况,这是由位于同一平面内的裂纹系弹性三维问题化简而来的。这就是解这些方程所提出的方法的实质。通过引入附加的未知函数,把依据多连通区域确定的重积分方程化简为依据单连通区域确定的重积分方程组。并将这些方程依次通过调整法化简为第二类二维积分方程组。

以Ufland[116]所提出的方法为基础,圆形内外平行裂纹的轴对称弹性问题就化简为重积分方程组。许多作者已用Cooke-Lebedev形式的置换方法求解了这个方程组。

轴对称裂纹问题可通过各种方法求解。

多数方法的基础是：与平面问题作一比较，并用复变函数解上述问题。

Weber[154, 155], Pöschl[156], Marguerre[157], Smirnov和Sobolev[158], A. Phöppl和L. Phöppl[159], Papkovich[160], Mossakovski[161], Golecki[162], Polozhij[163, 164], Alexandrov[165—167], Belen'ki[168]讨论了轴对称问题和平面问题之间的相互关系。

Weber引入了一些算子，用它们可以把Airy应力函数转换为某个轴对称应力状态的应力函数。他还提出了一个逆过程。这同样是有意义的：此方法在下列两种边界条件情况下无解，即表面无外载的情况和表面受载的情况。

Smirnov和Sobolev[158]把动态问题情况下的轴对称状态和平面状态结合了起来。

Papkovich[160]找出了平面和轴对称问题解的形式之间的相似性。

在[163, 164]中，Polozhij所提出的方法是以归纳出的解析函数类，即所谓p-解析函数类的适用为依据的。他以两个解析函数表达了应力和位移分量。对于平面，这些概念与KolosoV-Muskhelishvili公式相似。此解是在固体顶点部分得出两个p-解析函数，这与平面问题化简为得出固体所在平面的两个解析函数的情况很相似。

Belen'ki[168]利用了Weber借助于积分算子把Airy函数转换成轴对称状态的应力函数概念，该积分算子把轴对称的空间调和函数和双调和函数转化为平面调和函数和双调和函数。也讨论了逆过程。在这一基础上，作者在[168]中推演了在轴对称状态分量和复变函数解析函数之间建立关系的公式。用此公式使我们能够把无限厚平板轴对称问题的解化简为窄条补充问题的解。

Alexandrov[165, 167]用平面应力状态分量旋转迭加，找出了平面应力状态分量与旋转固体的轴对称应力状态分量间的关系。他按KolosoV-Muskhelishvili的公式，引入

借助两个解析函数表示的平面应力状态分量并利用一些解析函数的性质后，用两个解析函数的围线值积分表示了轴对称状态分量。这些概念被证明是很一般性的。用这些概念，研究者把问题化简为由两个积分方程估算两个解析函数的围线值。

在一般情况下，所得轴对称问题与平面问题[154—168]之间的关系被用来以应力状态通过复变函数解析函数的表示方法为基础，并借助这些函数表示轴对称应力分量；以及被用来将复变函数理论应用于轴对称问题。

Martinenko[169—171]把裂纹当作开口的Ljapunov表面处理，并将断裂固体弹性问题的解化为奇异积分方程。讨论了这些方程的可解性问题。

Alexandrov和Zinoviev[172—177], Peplin和Samarov[178—180], Bui[181]和Weaver[182]提出过用于三维裂纹问题的积分方程法。以Kelvin-Somilyana的基本解为基础，就把问题化为第一类积分方程。用适当的方法求解了这些方程。但曾以这一方法为基础求解过的问题极少。由于存在着大量的困难，研究人员不得不在用数值表示三维裂纹问题过程中加以反对。

在[37, 94]中给出了边界为平直表面但有平面裂纹的固体的弹性问题解。用三维函数，表示了这种情况下一般的弹性平衡问题解。用函数之一确定固体已知平面的正应力，用另二个函数确定剪应力。用这一方法和对应的调和函数的积分表示法以及运用线弹性理论的迭加原理，将断裂固体的问题化简为第一类二维积分方程组。综合已知的二维情况下的整理方法，就可把这些方程组化简为第二类积分方程组。裂纹的围线是下列形状：圆形[143—148]，封闭圆环[183, 184]，一些圆弧及直线组成的形状[185]。

Keet和Khair从不同的观点出发[96]，考察了具有平面裂纹系的无限大固体热弹性问题化简为第一类积分方程组的问题。他们曾利用过单层和双层位能理论和Datsishia与

Savruk[186]对平面裂纹问题提出的裂纹相互影响情况下的计算方法。

Goldstein等[187]曾把有平滑裂纹的无限大固体弹性问题化简为应用傅里叶变换的积分方程。用里Ritz-Galerkin法和用线性仿样函数作为坐标函数求解了这个方程。

在[37,188]中提出了一个十分有效的方法,来求解具有平面裂纹的无限大固体在三维轴向拉压情况下的弹性问题。这一方法在于研究上述弹性问题,例如包含对称问题和相应对称问题的反对称问题,这些问题依次用众所周知的方法求解。

对于解三维弹性裂纹问题,位能理论是很重要的。这些方法由Kupradze[189]和Kupradze等[190,191]在基础著作中作过详细介绍。对于无封闭表面的三维裂纹问题,不可能有修匀解存在。这大概就是在能够根据以普通表面为界的固体问题的解,并利用极限过渡,获得弹性问题解时极少应用位能理论的原因。

推演三维裂纹问题的积分方程常运用渐近方法。在这种情况下,以某个无量纲参量 $\lambda$ 的升幂展开形式来获得问题解。对于参数 $\lambda$ 的大值,Vorovich和Ustinov[138]最早提出了求解混合弹性问题的渐近方法。这一方法在最近称作“大 $\lambda$ 值法”为人们所熟知。后来许多作者(Alexandrov, Vorovich[192], Grilitskij[193], Grilitskij和Kizima[194])又发展了这一方法,解决了三维裂纹问题。但是,大 $\lambda$ 值法在它的运用中受到了限制,而用小 $\lambda$ 值则又不太有效。Alexandrov[195]和后来的Koiter[196]解决了这一难题,并为小 $\lambda$ 值渐近方法打下了基础。之后,许多作者对三维裂纹问题的完全渐近构造,发展了这些方法。

近年来(如[197—205]),有限元法已得到广泛的应用。Parton和Morozov在[7]中全面地论述了这一方法在裂纹问题中的应用。但是,由于计算技术的能力限制了它在求解三维裂纹问题中的应用,这一方法常用

于求解二维轴对称问题。

在评论中,我们已讨论过的方法使我们能够解决无限大固体中简单形状的单个裂纹问题。在解这些问题时,我们通常考虑一个(最多两个)无量纲的参量。这使我们对于这些问题的求解既可用近似法又可用数值法。但固体强度的实际问题通常是多参数的。对于这些问题的近似解析解,在[37,206]中提出了有效的“极限插值”法。以这一方法为基础,多参数的裂纹问题解就表示为相应的单参数问题解。依次,单参数问题有其求解的插值公式,其中应代入众所周知的简单的基本裂纹问题的解。

从早先发表的著作中,我们了解了一些用于特殊裂纹问题的专门方法。对于其他问题,这些方法或者与上述方法等效,或者不能推广应用。在[207—219]中简要阐述了这些方法在三维裂纹问题中的应用。在文献[220—229]中也阐述过这些方法。

## 结 束 语

从评论中可知,根据线脆性断裂力学的概念来解决三维裂纹问题的成就是巨大的。固体局部断裂的适用模型和相应的数学方法使我们不仅能够研究无限大固体中而且也能研究实际结构元件中的裂纹扩展问题。这有助于我们预计这些元件的承载能力和寿命,以及预测它们的脆性断裂。

但是,必须注意,非线性形式的三维裂纹问题很难被认为是一个解决了的问题。虽然有人试图将这一问题公式化,但并没有计算模型能够使我们得到可用于实际的结果。

希望这类特别重要的三维裂纹问题引起科学家和工程师们的注意,并用新的模型和数学方法来解决这一问题。

### 参考文献 (229种略)

(刘春译自《Engineering Fracture Mechanics》, 1980, Vol.13, No4, 925—937; 陈方校)

# 弹塑性平面应变裂纹增长的理论实验比较

L. Hermann, J. R. Rice

〔摘要〕 本文回顾了对弹塑性平面应变裂纹增长最近的理论分析结果,并从理论上对于一种4140钢的实验结果进行了讨论。此理论是以在一个理想塑性体中发生准静态进展的裂纹尖端处对应变分布和裂纹表面张开量最新所作的渐近分析为基础而得到的。此分析从以下角度来看尚不够完备,即其中所出现的某些参数只能近似地得到,特别是在大范围屈服条件下。然而,为导出全面屈服前外加荷载与裂纹增长量两者间的关系,此分析已足够了,所依据的假设是:在裂纹增长时,近裂尖处的裂纹剖面保持几何相似,由此所得到的J随裂纹增长而变化的预期结果与对深裂纹紧凑拉伸试样的实验结果符合良好。

在最近的一篇由Rice等人所作的理论分析<sup>[1]</sup>中,描述了一个连续增长的裂纹在尖端处的平面应变弹塑性形变场和应力场,该裂纹位于一个无强化固体中,它遵循Huber-von Mises屈服条件以及与之相关联的流动法则(即‘Prandtl-Reuss’方程)。此分析要求裂纹在增长过程中在非常靠近裂尖处的裂纹剖面保持着几何相似,这是一个可能的准静态裂纹增长的判据,从该分析得到的预期结果是:在裂纹增长时其长度必然随着外加荷载而改变。上述工作是Rice与Sorensen早期工作<sup>[2]</sup>的延伸,并包括了对后密中所提出的裂尖近傍处形变场与应力场形式的一个改正。在两文献<sup>[1,2]</sup>中的理论分析从下述方面来讲均不够完备,即出现在裂尖近傍形变场渐近表达式中的某些参量或函数必需从增长中的裂纹之弹塑性全数值解来确定。这曾在很局限的塑性屈服(即小范围屈服)下裂纹增长情况中,通过与有限元的解相比较而近似地做到了。而对于大范围屈服和全面屈服下的结果则迄今尚未获得,尽管在文献〔1〕中从量纲考虑以及与刚-塑性滑移线解相比较,已有可能对全屈服情况作某些讨论。

本文目的是给出在一种高强度钢中裂纹

增长的实验结果,并用这些结果为基础,与上面所提到的理论预期结果相比较。

## 增长中的裂纹之理论分析

图1a所示为Prandtl滑移线场,它描述了平面应变裂尖近傍的应力状态(至少在将裂纹尖端的几何大变化略去不计时,参看Rice与Johnson<sup>[3]</sup>和McMeeking<sup>[4]</sup>),这是一个非增长性的裂纹受到单调增加荷载的作用在很局限的屈服条件下的解。在某些受到高度约束的形状中(指带裂纹的试样及构件的形状——译注)这种滑移线场也可用于大范围屈服和全面屈服条件下。在稳态的裂纹增长过程中,此时外加荷载与裂纹长度 $a$ 作连续的变化,在非常靠近裂尖处会引起一个略微不同的应力场。这曾由Rice等人<sup>[1]</sup>所描述过,图1b所示即这种情况下的滑移线场。在这种情况下在中心扇状区C和背后(指裂纹上、下岸附近——译注)恒应力屈服区B之间发展出来一个弹性卸载扇形区。两个角度 $\theta_1$ 和 $\theta_2$ 与材料的泊松比有关,而在 $\nu=0.3$ 时, $\theta_1=115^\circ$ , $\theta_2=163^\circ$ 。值得注意的是裂纹前方的应力解与图1a所示Prandtl场的应力解仅相

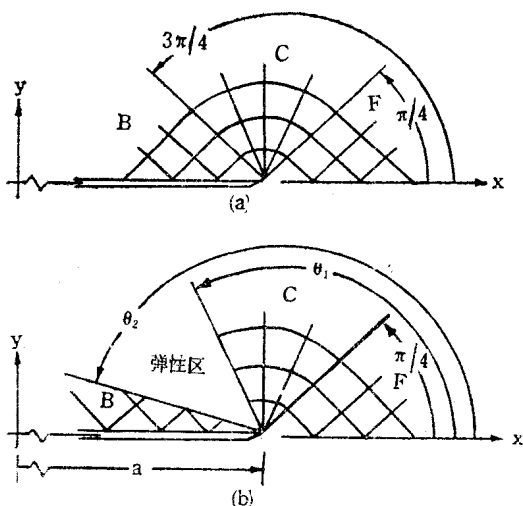


图 1 表示裂纹尖端应力状态的滑移线图：  
a. 非增长性裂纹；b. 增长性裂纹

差约1%。

令 $\delta$ 表示裂纹上、下两表面间的张开位移，由分析指出：一个连续增长的裂纹在非常靠近裂尖处（即在 $x \rightarrow a$ 处，其中 $x$ 是沿裂纹线的位置）存在着如下关系：

$$\dot{\delta} = \alpha \dot{J} / \sigma_0 + (\beta \dot{a} \sigma_0 / E) \ln[R / (a - x)] \quad (1)$$

在此表达式中各字符上所附加的点代表时间率， $\sigma_0$ 为理想塑性的拉伸强度， $E$ 为拉伸弹性模量， $\beta$ 是个系数，它与泊松比有关，对于 $\nu = 0.3$ ，其值为 $\beta = 5.08$ 。并且，外加荷载的强度在不失一般性的情况下表达为 $J$ 的函数（与 $J$ 积分相联系，虽然在后面还将要讨论到，方程(1)在用各种方法定义 $\dot{J}$ 时均保持其有效性，不同的选择意味着参数 $R$ 的值不同）。

事实上，方程(1)中的 $\alpha$ 和 $R$ 并非由渐近分析所确定，这两个参数必须用方程(1)与增长性裂纹情况下的完全弹塑性解进行比较来确定，它们必然是数值解而且在非常靠近裂尖处其含义及精确性均有可疑之处。下面我们依次讨论每一个参数。首先， $\alpha$ 是无量纲的，并预计它与下式所定义的参数 $\alpha^*$ 在数值上非常接近：

$$\dot{\delta} \dot{a}_{fp} = \alpha^* dJ / \sigma_0 \quad (\dot{a} = 0) \quad (2)$$

此式用来确定一个非增长性的裂纹承受单调

增加的荷载时的裂纹尖端张开位移。这种估计看来已由小范围屈服下裂纹增长的数值解结果所证实。令‘ssy’代表小范围屈服，在文献[1、2]中已发现在5~10%精确性范围内 $\alpha_{ssy} \approx \alpha^*_{ssy}$ ，其中 $\alpha^*_{ssy} = 0.65$ ，在逼近大范围屈服和全面屈服条件时， $\alpha$ 可能变得与 $\alpha_{ssy}$ 相差颇多。例如，深裂纹平面应变弯曲试样（图2）在全塑性（fp）条件下得出<sup>[1,5,6]</sup> $\alpha^*_{fp} = 0.51$ ；还有，对于刚性-理想塑性材料的模型， $\alpha_{fp} = \alpha^*_{fp}$ 为精确关系，以致可以假定对于弹塑性深裂纹弯曲试样在加载到深入发展了的塑性区域时 $\alpha_{fp} \approx \alpha^*_{fp} = 0.51$ 。事实上，从非增长性裂纹的弹塑性解<sup>[5,7,8]</sup>来估计 $\alpha^*$ 值，可得出如下的结果：即直到外加弯矩 $M$ （指每单位厚度的值，下同）非常接近于全塑性极限弯矩<sup>[1,6]</sup> $M_0 = 0.364 \sigma_0 b^2$ 时， $\alpha^*$ 都一直保持为非常接近于 $\alpha_{ssy} (= 0.65)$ ，随后，当形变继续增大时， $\alpha^*$ 就迅速地降低到 $\alpha^*_{fp} (= 0.51)$ 。

在方程(1)中的参数 $R$ 显然是具有长度的量纲，而且可以合理地估计到 $R$ 应该具有一个与塑性区尺寸近似成比例的值，或者，至少应与以下尺寸成比例，即在该尺寸上与图1中分布相似的内应力分布占优势。将方程(1)与小范围屈服下裂纹增长的数值模拟相比较可知，这一见解只得到了有限的证实。这种研究提出了如下的结果<sup>[1]</sup>

$$R \approx 0.23 EJ / \sigma_0^2 \quad (3)$$

这只适用于小范围屈服的情况，其中的 $J$ 曾被认为是在弹性材料中所取回路积分的远场值，因此，在小范围屈服这一极限下，它等于 $G \equiv (1 - \nu^2) K^2 / E$ 。在方程(3)中所给出的 $R$ 值与小范围屈服条件下的塑性区最大半径成正比，但比它约大15~30%。方程(3)的精确性仍是个有待解决的问题； $R$ 可能与裂纹增长的长度对屈服区尺寸的比值有某种微弱的联系，但用数值解来解决这一问题迄今还是不够充分的。

在达到大范围屈服和全塑性屈服状态时， $R$ 就一定会被估计为偏离了方程(3)。

如Rice等人<sup>[1]</sup>所讨论过的那样,在大范围屈服时R的行为和J的定义不会是不相干的;如果J是这样定义的,以使在刚-塑性极限下( $E/\sigma_0 \rightarrow \infty$ )  $\dot{J}$ 与 $\dot{a}$ 无关(而只和 $a$ 以及施加的边界位移变化率有关),则仍然应该把R的值估计为与扇状应力区尺寸成比例。因此,给 $\dot{J}$ 以适当的定义后,在文献[1]中提出,对于类似图2中所示的形状,R应该最后达到一个极限值,该值是无裂纹韧带尺寸 $b$ 的若干分之一。目前对R的这个估计值(它或许可从数值解获得)还缺乏一个合适的理论证实,而且我们的实验结果指出,R在大范围屈服时的行为可能会更复杂些。

从方程(1)曾按以下方法推论出一个可能的稳态裂纹扩展判据。将方程(1)积分后,在非常靠近裂尖处的裂纹剖面形状可写为

$$\delta = (\alpha r / \sigma_0) dJ/da + (\beta \sigma_0 / E) \ln(eR/r) \quad (4)$$

其中 $e = 2.718$ 是自然对数的底而且 $r = (a - x)$ 。对于一个连续增长的裂纹(即当 $dJ/da$ 为有限时),当 $r \rightarrow 0$ 时此方程是渐近地有效的。该表达式还可以重写为如下形式:

$$\delta = (\beta \sigma_0 / E) \ln(\rho/r) \quad (5)$$

其中

$$\rho = eR \exp[(\alpha/\beta)(E/\sigma_0^2) dJ/da] \quad (6)$$

由方程(5)可以清楚地看出在非常靠近裂尖处的裂纹剖面形状只和一个参数 $\rho$ 有关。因此,若人们将以下的观点取为一种可能的断裂判据,即在裂纹增长过程中在非常靠近裂尖处裂纹剖面保持着一个不变的形状,则从方程(5)看得出,可以将裂纹增长判据假设为如下的形式

$$\rho = \text{常数} \quad (7)$$

这样,在把 $\rho$ 理解为一个常数时,方程(6)就等价于如下的微分方程

$$dJ/da = (\beta/\alpha)(\sigma_0^2/E) \ln(\rho/eR) \quad (8)$$

在准静态裂纹增长过程中它控制着J随 $a$ 而发生的变化。从R与J有关而且或许还与以往的裂纹增长量有关的这个意义来说,它是个‘微分方程’,至于R与J有关这一点从方程(3)的

结果来看,至少在小范围屈服以后完全的证明还有待完成。

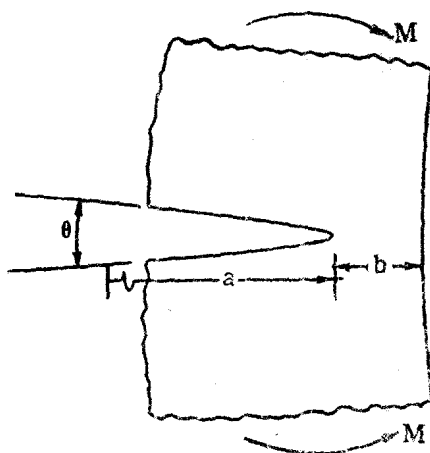


图2 深裂纹平面应变弯曲试样

将方程(8)积分并用方程(3)来表示R以反映小范围屈服下的裂纹增长,这曾在以往的工作<sup>[1]</sup>中提出过。在此情况下J与 $a$ 间的关系完全由J在启裂点处的初始值(即 $J_{Ic}$ )和参数 $\rho$ 两者来确定;随着裂纹的继续增长,J从 $J_{Ic}$ 起增大但最后趋近于一个极限值(它使得 $R = \rho/e$ 以致 $dJ/da = 0$ ),从这里起裂纹在继续增长而J却不进一步增大。在稳定状态下的这个极限值曾在以往的工作<sup>[1,2]</sup>中被称作 $(J)_{ss}$ ,而且 $(J)_{ss} = 1.60\sigma_0^2\rho/E$ 。

提出如下的一些评注是适宜的。首先,应注意以下的事实即,为了维持靠近裂尖处的裂纹剖面形状不变,在裂纹增长时,一般说来J必须改变(除非是尺寸参数R已达到了 $\rho/e$ 这个值)。这是一个塑性效应,可从弹塑性应力-应变关系中应变与路径有关这一本质察觉出来,特别是在塑性荷载对弹性卸载的刚度响应间之差别上反映出来。这不应该导致一种非线性弹性材料的模型,尽管那种材料与弹塑性材料在单调加载时具有相同的应力-应变关系。代替这个的是:在这样一种非线性弹性材料中,在裂纹增长时靠近裂尖处裂纹剖面保持不变的要求从本质上应该等价于在裂纹增长时J保持常数的要求。

其次,由方程(7)和(8)表示的裂纹增

长判据,从一定意义来说,是以裂纹增长时非常靠近裂纹尖端处的形变状态维持不变为基础的。这可以估计到至少是在这样一个情形下,即显著的空穴成核出现于非常靠近裂尖处并位于形变状态保持不变的区域内,能够为裂纹的延性增长提供一个合适的模型。不能预期将上述模型以更高的精度用于以下情况,即微观裂纹或空穴成核受到了高应力所在区域材料尺寸的影响。虽然,裂纹增长的判据也并没有把从稳态延性撕裂型断裂到解理型断裂之转变区的物理包括在内,后者主要是由于在准静态裂纹增长过程中局部应力水平的应变速率之提高所导致的,在此过程中发生了微观断裂型式的相应改变。

第三,应该注意到裂纹增长判据的普遍形式看来是与描述靠近裂尖的固定形变状态之方法无关的。例如, Rice等人指出<sup>[1]</sup>, 对于一个在连续增长中的裂纹,直接在裂纹尖端的上、下方一个很小的距离 $r$ 处,即图1b中扇状区内某些点处,等价的塑性剪应变为

$$\gamma^p = (m/\sigma_0) dJ/da + 1.88(2-\nu) \cdot (\sigma_0/E) \ln(L/r) \quad (9)$$

式中的两个参数 $m$ (与方程(4)中的 $\alpha$ 相仿)和 $L$ (与 $eR$ 相仿)也同样是不能通过渐近分析来确定的。要从数值解中确定这些参数就需要精确地知道一些局部应变值;目前还没有获得所需精度的结果。

然而,有一点是清楚的,即方程(9)可以改用如下形式来重新表达

$$\gamma^p = 1.88(2-\nu)(\sigma_0/E) \ln(\xi/r) \quad (10)$$

其中

$$\xi = L \exp\{[m/1.88(2-\nu)](E/\sigma_0^2) dJ/da\} \quad (11)$$

而且 $\xi$ 量度了靠近裂纹尖端处的应变场强度。因此,在非常靠近裂尖处有一个固定应变状态的裂纹增长判据可以表达为 $\xi = \text{常数}$ 这样的要求,而且,这就导致一个控制着裂纹增长的微分方程,它与方程(8)的形式是相似的。

第四,要强调的是,从理论分析得出诸如方程(1, 4, 9)的结果,而这种分析是以一种理想的塑性材料为基础的。我们可以用一种非常近似的方法来考虑实际应变硬化的影响,即将方程(1, 2, 4—6, 8)中的 $\sigma_0$ 认为是拉伸强度极限的名义值 $\sigma_u$ 。在分析实验结果时就是这样做的(虽然在求 $R$ 的方程(3)中我们将把 $\sigma_0$ 解释为实际的屈服应力 $\sigma_y$ ,而这是合理的,因为我们是把 $R$ 与塑性区的尺寸联系在一起的)。然而,有些应变硬化的效果可能存在并与裂纹增长的分析有关,这种效果较之在单轴拉伸实验中所显示出来的效果更为烦琐。这些都和应力空间中的塑性屈服表面严重形状改变的发展有关。在现时的应力状态中屈服表面上有一个尖顶状的构造发展出来就是一个特例。当我们将它与以不改变屈服表面形状为基础所预期的结果相比较时,这使得沿着非比例加载途径的弹-塑性响应之刚度大为降低。于是,应该估计到,屈服表面对于靠近增长中的裂纹处之应变场的分析是很关键的。然而值得注意的是,在最近由Dean与Hutchinson<sup>[9]</sup>对稳态的Ⅲ型裂纹增长问题所作的一个分析中指出,按两种屈服模型所预期的裂纹表面位移之间只有微小的差别,一种屈服模型就是含有尖顶的屈服表面,而另一种模型则保持着Huber-vonMises的屈服轨迹形状(即‘各向同性’的强化)。至于对增长中的拉伸裂纹,屈服表面形状改变的效果是否也与Ⅲ型裂纹相仿,对裂纹增长没有重大的影响,这还有待验证。

## 实 验

在这些实验中所用的材料是一种 Al-Si 镇静钢 AISI 4140, 它是由 Bethlehem 钢铁公司供应的厚度为19毫米的钢板。其成分(重量的百分数)为: 0.42C, 0.004P, 0.014S, 0.22Mn, 0.001As, 0.01Sb, 0.002Sn。材料在1140K下在氩气中经过1小时的奥氏体

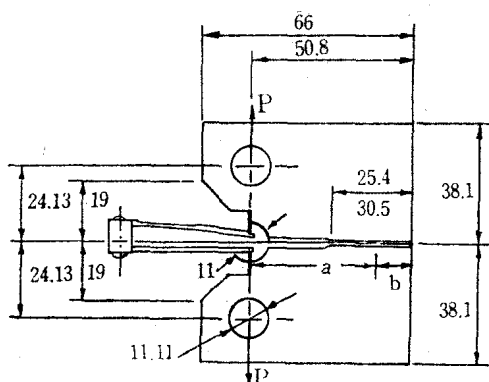


图3 试样(毫米)及钳式引伸计

表1 试样的无裂纹韧带尺寸、厚度与边切槽的深度(其余尺寸见图3)

| 试样编号 | 初始韧带尺寸 $b_0$ , 毫米 | 厚度(平均值), 毫米 | 边切槽深度 毫米 |
|------|-------------------|-------------|----------|
| 1    | 10.75             | 12.19       | 0.51     |
| 2    | 10.42             | 15.37       | 0.51     |
| 3    | 10.62             | 18.54       | 0.76     |
| 4    | 15.86             | 18.54       | 0.76     |

化, 油中淬火, 并在770K下回火1小时, 得到的名义拉伸屈服强度和极限强度分别为  $\sigma_y = 1173$  兆牛顿米<sup>-2</sup>和  $\sigma_u = 1327$  兆牛顿米<sup>-2</sup>。

共加工了四个试样, 每一个试样的面内尺寸均如图3所示(其中从切口尖端到试样背表面的距离之较大尺寸, 30.5(毫米), 是4号试样所特有的)。所有的试样都开3边切槽, 它是90°V型浅切口, 以消除剪切唇。试样均有预制疲劳裂纹, 各试样的剩余无裂纹韧带宽度  $b$ , 在开始延性裂纹增长前的值在表1中给出。在此表中还给出了试样的厚度和边切槽的深度; 表列厚度是在开边切槽前、后厚度的平均值, 并用它来除量得的荷载, 以便得到单位厚度试样上的荷载, 将它用于理论公式中。无裂纹韧带宽度  $b$  与试样的全尺寸比很小, 因此, 在分析时试样可看作是深裂纹弯曲试样(图2), 而弯矩  $M$  则是对无裂纹韧带的中点取矩求得的。于是,  $M = P(a + b/2)$ , 而在图2中量度转角增量  $d\theta$  时则认为  $d\theta = d\Delta/(a + b/2)$ , 其中  $\Delta$  是沿荷

载线的张开位移。此位移是用图3所示的钳式引伸计来量度的。该引伸计具有高灵敏度; 它是用高强度钢制成的, 并贴上电阻应变片, 引伸计安装在刀口支座上(将剃须刀片固定在试样上, 而钳式引伸计的尖锐V-切槽则卡在刀口上)。

试验是在Instron闭路电液伺服试验机上做的。稳态裂纹增长量是按Clarke等人<sup>[10]</sup>所提出的弹性卸载柔度法估计的; 弹性转角则用它们所提出的表达式来计算:

$$\theta^e = 16(1 - \nu^2)M/Eb^2 \quad (12)$$

提高对裂纹长度微小改变的测量精确度是通过采用低噪音高增益的电子放大仪器来处理  $P-\Delta$  记录, 并尽量减少摩擦影响而达到的。裂纹长度的改变则根据无裂纹韧带宽度  $b$  由公式(12) 并从弹性卸载的微小增量的响应推论而得。为减少摩擦影响, 一方面可改进对钳式引伸计的刀口设计, 另一方面则采用柔性挂板使试样的加载销能在滚针轴承中自由旋转。采用了以上的措施后, 使得按推论所得到的裂纹尺寸改变量的分辨率高达0.01毫米。

图4示出2号试样的  $P-\Delta$  记录。它可用来代表所有试样的试验结果, 图中并表明弹性

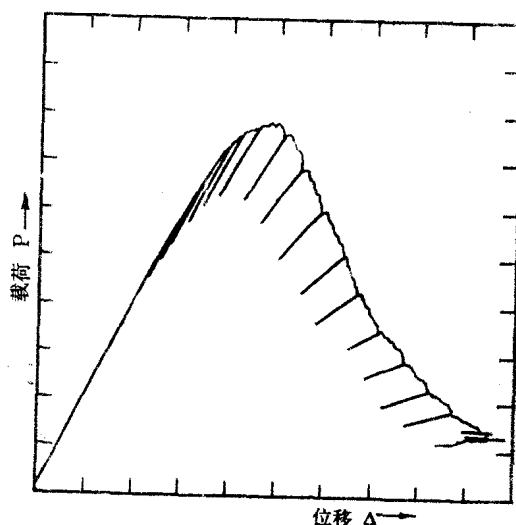


图4 2号试样的荷载-位移图, 图示弹性卸载和再加载

卸载和再加载的直线，用这些可推论出裂纹增长量。

按柔度方法估计所得的裂纹增长量与靠目测从断口上观察到的增长量一并列于表2中。在此表的中间一列中给出的值是在试验结束时（即当剩余韧带宽度只有3~4毫米时）按总柔度估计所得到的裂纹增长量。还在每个试验结束时再施加若干循环的疲劳荷载，以便能从断口上区别裂纹前缘的位置，然后用目测得出裂纹增长量沿试样厚度的平均值，得到的就是表2中最后一列的结果。按柔度估计所得的裂纹增长量与目测值的差别在0.5毫米以内。

表2 在每个试验中由两种方法所得最大裂纹增长量的比较，一种方法是由弹性柔度的改变来估计的，另一种方法则是从断口上靠目测所得的裂纹实际增长量

| 试样编号 | 从柔度的改变来估计的裂纹增长量，毫米 | 从断口上靠目测所得的裂纹增长量，毫米 |
|------|--------------------|--------------------|
| 1    | 6.6                | 6.3                |
| 2    | 7.3                | 7.0                |
| 3    | 6.8                | 7.3                |
| 4    | 12.0               | 11.8               |

2号试样的实验结果在图5中给出，图示的一些曲线从倾向上代表了所有试样的试验结果。水平座标轴表示裂纹增长量，而标以M和M<sub>y</sub>的两曲线则分别代表外加弯矩和全塑性弯矩，后者是按M<sub>y</sub> = 0.364σ<sub>y</sub>b<sup>2</sup>算出的<sup>[1,6]</sup>。显然，试验的早期部分相当于有限程度的屈服，而后期部分则相当于全面屈服。在图5中还给出了弹性能释放率G，它是按下式算得的：

$$G = 16(1 - \nu^2)M^2/Eb^3 \quad (13)$$

（它与方程(12)是一致的）图上还有两个与J积分有关的量J<sub>I</sub>和J<sub>d</sub>，将在下面讨论它们。

在图5中用圆圈表示的点给出按‘形变理论’（即全量理论—译注）计算的J值，称为J<sub>d</sub>，这个名词是Rice等人<sup>[1]</sup>提出的。J<sub>d</sub>是将

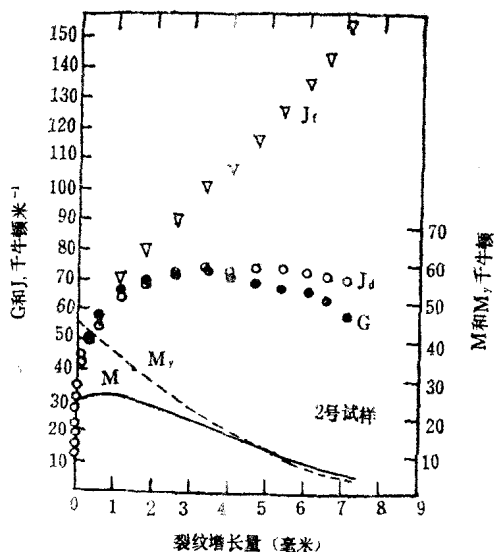


图5 2号试样的外加力矩M，全面屈服力矩M<sub>y</sub>，G，J<sub>d</sub>和J<sub>I</sub>与裂纹增长量间的关系

下式在整个试验过程中积分而得到的：

$$\begin{aligned} dJ_d &= (2/b)M d\theta - (J_d/b)da \\ &= (2/b)Pd\Delta - (J_d/b)da \end{aligned} \quad (14)$$

积分的初值为J<sub>d</sub> = 0（在Δ = 0时）。如果此材料确实是非线性弹性的，则如Hutchinson与Paris<sup>[11]</sup>所指出，将以上表达式对深裂纹弯曲试样进行积分以得到一个定义为J<sub>d</sub>的值，它只与外加的形变θ和无裂纹韧带宽b的尺寸这两者有关，而与获得现时的θ和b之‘路径’无关。再进一步讲，J<sub>d</sub>应该与J的线积分定义一致，而且，在裂纹增长过程中只有极小的非线性区这一极限状态下，有J<sub>d</sub> = G这样的关系。对于实际的弹塑性固体，就不可能预期J<sub>d</sub>与获得现时的θ和b之‘路径’无关以及J<sub>d</sub>与J的线积分值一致；而在这种情况下J<sub>d</sub>只由方程(14)所定义。但在弹塑性固体中只有极小的塑性区这一情况下，当裂纹在增长时，J<sub>d</sub> = G这样的关系仍为正确的。由图5可清楚地看到，直到外加弯矩M非常接近M<sub>y</sub>以前，J<sub>d</sub>的实验结果确实是和G的实验结果非常一致的。从J<sub>d</sub>的上述性能看来，最好是把方程(3)和(8)中的J和J<sub>d</sub>两者结合起来，以使得当荷载略微超过小范围屈服这一极限

时, 这些方程仍能应用。

在图5中的三角形符号表示 $J$ 的“远场”值, 称之为 $J_f$ , 它是在整个试验中将下式积分而得到的:

$$\begin{aligned} dJ_f &= (2/b)M d\theta = (2/b)Pd\Delta \\ &= dJ_d + (J_d/b)da \end{aligned} \quad (15)$$

其所以采用“远场”这个名称, 是因为对一个深裂纹刚性-理想塑性弯曲试样在单调增加的转角下, Rice等人<sup>[1]</sup>曾指出, 这样定义的 $J_f$ 与积分回路和试样外边界重合时所算得的线积分 $J$ 的值是一致的。在不同形状的试样中, 对于弹塑性固体甚至是刚塑性固体, 类似以上的解释都还没有得到证明。如上面所指出的,  $J$ 的某些定义在全面屈服下与对 $R$ 的连续解释是一致的, 这里是把 $R$ 当作量度扇状应力区范围的参数。其它的定义则不一

致。如Rice等人<sup>[1]</sup>所指出, 在全塑性状态下 $J_f$ 具有某些特殊的特征而 $J_d$ 却没有。(其后我们将考虑另外的量, 它在全屈服条件下也呈现这些特征, 这在小范围屈服条件下就转变为 $J \approx J_d \approx G$ )。我们从图5中看到, 在裂纹扩展的非常早期 $J_f$ 和 $J_d$ 间的差别是微不足道的, 但随着裂纹的持续增长, 这种差别会增大得更为明显。从方程(15)也可清楚地看到 $J_f$ 对 $a$ 的关系意味着 $J_d$ 对 $a$ 的关系, 反之亦然。

图6-9中的圆符号表示1-4号试样的 $J_d$ 作为裂纹增长量函数的实验结果。其中圆圈是全面屈服前(即 $M < M_y$ )所得到的数据点而圆点则为全面屈服后所得到的结果。其中的实曲线和虚曲线则代表小范围屈服时的理论预期结果。

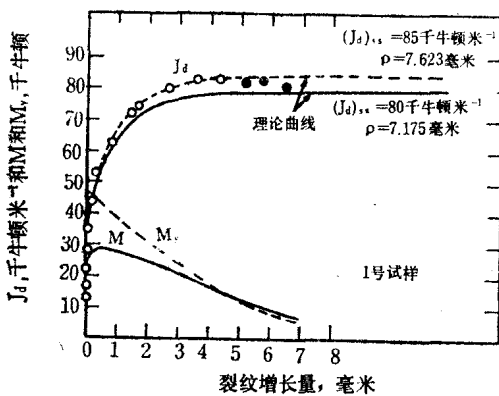


图6 1号试样的 $J_d$  (圆符号)-裂纹增长量图线以及与理论预测值的比较

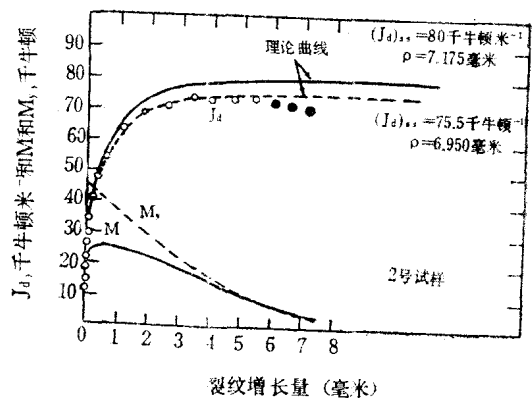


图7 2号试样的 $J_d$  (圆符号)-裂纹增长量图线以及与理论预测值的比较

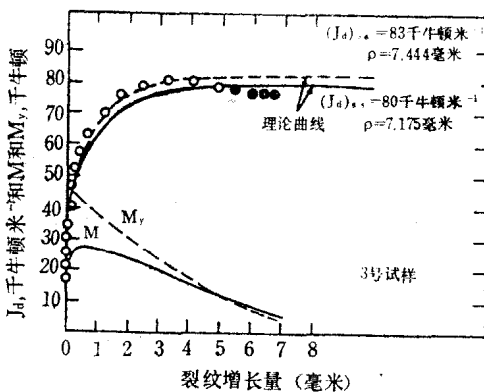


图8 3号试样的 $J_d$  (圆符号)-裂纹增长量图线以及与理论预测值的比较

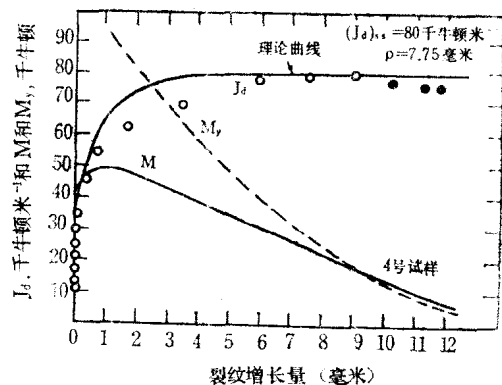


图9 4号试样的 $J_d$  (圆符号)-裂纹增长量图线以及与理论预测值的比较

## 实验和小范围屈服公式的比较

只有在小范围屈服条件下裂纹增长的理论才得到了较完善的发展。在图6—9中我们给出了对于这种情况的理论预期结果,其基础是将 $J_d$ 而不是将 $G$ 用于小范围屈服公式,并如早先所讨论过的用 $\sigma_u$ 或 $\sigma_y$ 来代替 $\sigma_0$ 。此公式是将方程(3)和方程(8)组合起来而用以下形式来表示(用 $\beta = 5.08$ ,  $\alpha = \alpha_{ssy} = 0.65$ ):

$$dJ_d/da = 7.82 (\sigma_u^2/E) \ln (\rho \sigma_y^2 / 0.23eEJ_d) \quad (16)$$

此方程曾按启裂时的 $J_d$ 值为 $J_d = 35$ 千牛·厘米<sup>-1</sup>进行了积分,此 $J_d$ 值如图5—9中的数据所示,同时,式中的一个自由参数 $\rho$ 的值则选用对全面屈服前数据的最佳符合值。结果均在图6—9中用实曲线和虚曲线表示出。

图6—8(1—3号试样)中的实曲线也就是图9中的最佳符合曲线。为得出此曲线所用的 $\rho$ 值为 $\rho = 7.175$ 毫米,它意味着 $(J_d)_{ss} = 80$ 千牛·厘米<sup>-1</sup>。在图6—8中的虚曲线则相当于采用了略有不同的 $\rho$ 值,它们对于每个试样都是最佳符合值,当然,从理论上讲, $\rho$ 表示的应该是与试样形状无关的材料性能。

我们从图6—9可作出如下结论:所用理论在全面屈服以前能相当成功地描述裂纹增长的实验数据。

## 对于任意屈服程度的公式

我们在这里提出一个对方程(8)作为裂纹增长判据的解释,我们相信这似乎是个合理的解释,这个判据适用于在任意的屈服程度和裂纹增长量下的深裂纹弯曲试样。然而,几乎可以肯定地说,这个方法将需修正,只要能够得到足够精确的弹塑性数值解以从第一类原理能预测方程(8)中的各项与外加的变形及裂纹长度间的关系。

首先,考虑在理论表达式中对于 $dJ$ 的解

释。在裂纹增长时其非弹性区非常小的极限情况下我们可以把 $dJ$ 认为是 $dG$ 。另一方面,如前面所讨论过的,在大范围和全塑性屈服条件下,对 $dJ$ 的解释受到某些限制。特别如Rice等人<sup>[1]</sup>所指出,对于刚性-理想塑性弯曲试样,宜于采用 $dJ = (2/b)Md\theta^p$ 这样一个表达式,以便能和方程(14)中的 $dJ_e$ 取得一致。这里的 $d\theta^p$ 是转角中的塑性部分。我们写出如下表达式就可以包括上述两种极限情况:

$$dJ = (2/b) Md\theta^p + dG \quad (17)$$

注意到对于一个深裂纹弯曲试样有 $G = M\theta^e/b$ 这样的关系,其中 $\theta^e$ 是由方程(12)给出的,于是,由方程(12)并利用 $db = -da$ ,此式就可以改写为:

$$\begin{aligned} dG &= d[Eb(\theta^e)^2/16] \\ &= (2Eb\theta^e/16)d\theta^e + [E(\theta^e)^2/16]db \\ &= (2/b)Md\theta^e - (G/b)da \end{aligned} \quad (18)$$

因此,方程(17)可写为:

$$dJ = (2/b) Md(\theta^e + \theta^p) - (G/b)da$$

或

$$dJ = dJ_f - (G/b)da = dJ_d + [(J_d - G)/b]da \quad (19)$$

将这样解释的 $dJ$ 代入,则方程(8)所示的裂纹增长判据就可写为:

$$\begin{aligned} dJ_d/da + (J_d - G)/b \\ = (5.08/\alpha) (\sigma_u^2/E) \ln(\rho/eR) \end{aligned} \quad (20)$$

这里已用到了 $\beta = 5.08$ ,而且,还承认在一般情况下 $\alpha$ 应当作变量。

我们已采用 $J_d$ 和 $G$ 的实验数据来计算该式的左边,而且,在取 $\alpha = 0.65$ 以及采用从数据中按小范围屈服的最佳符合而得到的 $\rho$ 值后,我们可以从该式推论出 $R$ 为 $a$ 的函数。这就是说,我们在实验数据符合方程(20)的假设下推论出 $R$ 随 $a$ 而变化的规律。这些结果在图10—13中给出,在这些图里表明了 $R$ (右边的纵坐标)和 $R/b$ (左边的纵坐标)与裂纹增长量(横坐标)间的关系。我们还指出,当 $J_d$ 用来代替 $J$ 时 $R/b$ 的值就包含在方程(3)所示的小范围屈服表达