合情推理与计算机思维

张文修 杨金丽

西安交通大学出版社

新兴学科丛书

合情推理与计算机思维

张文修　杨金丽

西安交通大学出版社

内 容 提 要

合情推理是一种可能性推理，它在知识学习与科学研究中有着重要的作用。本书叙述了合情推理的意义，合情推理的六种模式（归纳推理、拓广推理、似然推理、类比推理、逆向推理、统计推理）及其概率解释，合情推理的计算机模拟。它不仅有利于启发思维、培养能力，作为大学生与中学生学习方法的指导书，而且对于计算机科学工作者研究智能计算机有着启迪作用。该书是一本中等程度的科学普及读物。

合情推理与计算机思维

张文修 [illegible]金丽

责任编辑 刘 影

*

西安交通大学出版社出版

（西安市咸宁路28号）

西安电子科技大学出版社印刷厂印装

陕西省新华书店发行 各地新华书店经售

*

开本 787×960 1/32 印张 4.375 字数：77 千字

1988年 4 月第 1 版 1988年 7 月第 1 次印刷

印数：1——5 000册

ISBN7-5605-0125-7/O·13 定价：1.30 元

序

合情推理是一种可能性推理，是根据人们的经验、知识、直观与感觉得到的一种可能性结论的推理。人们每时每刻都在运用合情推理进行分析与决策，指导他们的行动。毫无疑问，它对人们的生活与实践是十分重要的。实际上合情推理对于科学研究更是重要的。物理学家通过实验的观察、分析可以预测某些新的规律；侦探人员根据案情分析寻找破案的线索；经济学家通过市场的调查来调整经济策略；历史学家通过对考古资料的分析，判断古代科学与文化的发展。所有这些，都属于人们的合情推理。数学一向被认为是最严密的科学，它的推理形式是论证推理。然而，论证推理仅仅是对已经确定了的命题的证明方式。在数学研究中，要发现定理，给出定理证明的思路，首先需要进行合情推理。数学的论证推理使数学具有最终的确定形式，但是获得最终形式的创造过程却需要合情推理。因此，合情推理是一种发现与创造的推理方式。人们只有自觉地运用合情推理，才会不断地发现新的规律。

当然，合情推理不象论证推理那样有着确定的结构和形式。人们可以通过“形式逻辑”来学论证推理，而使用合情推理的能力，则主要依靠个人的实践，目前还缺乏系统的著作可以使人们直接掌握合情推理。合情推理的规律还不象形式逻辑的规律

那样清楚，但是人们有理由期待着，将来总有一天合情推理也会变为一门真正的科学。这不仅是因为人们对掌握和使用合情推理的需要，而更重要的是要扩大计算机的智能。计算机以它快速、准确、可靠代替了人的许多重要而繁杂的脑力劳动，但是计算机还很难进行人类最简单的思维活动。人们的思维过程是非常复杂的，概括这样的复杂过程的基本特征，当然是一件相当困难的事情。我们写这样一本小册子，不敢存这样的奢望，只能算作对合情推理的初步介绍以及某些简单的数学解释。但是我们期望它引起更多的人对这个问题的兴趣，并期望他们在合情推理的定量描述方面做出重要的成就。

这本小册子曾作为“数学方法论”的部分内容，为西安交通大学数学系84级、85级、86级学生开过选修课，由杨金丽同志根据讲稿整理成现在的形式，修改并补充了许多更贴切的例题。修改后的内容不仅适合于大学生阅读，而且也使高年级中学生可以阅读其中的基本内容。尽管如此，这本小册子仍然是不成熟的，还期望更多的人关心她、研究她，并提出宝贵意见，以便将来能有一本合情推理的专著出版，以推动我国科学研究工作。

值本书出版之际，特别要感谢王梓坤先生。由于他的精心审稿和宝贵意见，使得本书进一步得到完善。

张 文 修

1987.10.1

目　　录

目　　录

第一章　合情推理的意义

§1　一个小故事的启示

人的思维离不开实践和经验，实践和经验不断改变着人们的观念。物理学家需要实践与观察，历史学家需要史料与古迹，经济学家需要事例与统计，侦探与律师需要案情。有许多精彩的侦探故事足以使人拍案叫绝，但很少有人去深入分析侦探人员观察与思维的过程。

这里介绍的小故事发生在19世纪初期，它的主角是一位青年的数学家伽罗华。

伽罗华生于1811年，死于1832年。他出生在法国一个比较富裕的家庭里，从小受到父母亲的良好教育，特别喜欢数学。虽然他只活了21岁，但是，他在数学上却做出了巨大的贡献。伽罗华从中学时代起就钻研数学，他仔细研究了拉格朗日、高斯、柯西和阿贝尔的著作，从中汲取了丰富的知识。他为了解决能够用根式来表达代数方程解的条件，提出了每个代数方程必有反映其特点的置换群存在，从而解决了用根式解代数方程可能性的判定问题，创立了“伽罗华理论”，为群论的建立、发展和应用奠定了基础。他的理论被誉为“纯数学的艺术品”，在近代数学史上写下了光辉的篇章。

但是，这样一个有才华的人，在他短短的一生

中，所走的道路并不是很平坦的。由于他太偏科，两次报考中专都未考上；他将数学论文寄给柯西、傅立叶、普哇松，都被漠然置之；他做为法国狂热的共和分子，两次被投入监狱。故事就发生在他刚从桑多·贝拉底监狱释放出来的时候。

伽罗华从监狱出来，无处落脚，首先想到他的老朋友鲁柏。鲁柏虽然不是数学家，但非常喜欢数学，特别崇拜伽罗华的数学天才。伽罗华知道鲁柏住在迪·罗威尔街上一幢四层楼的公寓里，房间是二层楼9室。于是就到那里去找他。可是伽罗华来到公寓，鲁柏的房间却空荡荡的。看门的女人告诉他："鲁柏先生在两星期以前就死了，被人用刀子刺死的，他父母刚刚寄来的钱也被偷去了。"伽罗华惊呆了。

待伽罗华稍微清醒过来的时候，他问看门的女人，"犯人抓到了没有？"

看门女人告诉伽罗华："现在还不清楚。鲁柏和我是同乡，特别爱吃馅饼。我每次做馅饼，总是要分一点给他，他死的前一天晚上，我还给了他一块苹果馅的饼，他很高兴。可没想到，他就是握着那块馅饼死去的。"看门女人啰嗦个没完，"他死的时候，两手紧紧握着没吃完的半块饼。警察也感到奇怪，一个腹部受了重伤快要死的人，为什么要紧紧抓住那一小块饼呢？"

"有没有犯人的线索？"伽罗华着急地问。

"轻一点，犯人肯定就在这幢公寓里。出事前

后，我都在值班室，没有见有人进这座公寓。但是这座公寓有四层，每层十五个房间，住着上百人，天知道是谁干的？”看门女人神秘地说。

看门女人象讲故事一样地讲着鲁柏死的前后经过，但是在伽罗华的头脑里却构成了一幅真实的作案经过。他让看门女人带自己上了三层楼，在14号房间的门口停下来。看门女人马上告诉他："这里的主人昨天已经搬走了，他叫米塞尔，爱赌钱、爱喝酒。……”没等看门女人说完，伽罗华坚定地说："这个家伙就是杀人犯。”根据伽罗华提供的线索调查，凶手米塞尔终于落网。

那么伽罗华是怎样分析的呢？关键在于鲁柏手里握着的馅饼。馅饼在英语里称为“pie”，读音与希腊字母“π”相同。π表示圆周率，这是大家所共知的，但它与案情有什么关系呢？警察注意到了这个细节，看门女人也迷惑不解。但伽罗华毕竟是数学家，很容易把所发生的事情与数学联系起来。当他听说凶手就在公寓里时，就首先想到公寓里有什么东西可以与π联系起来，他终于想到π的近似值3.14和3楼14号房间的联系。看门女人对米塞尔的介绍，使他进一步肯定了自己的结论。

但是必须指出，伽罗华对案情分析推理过程并不具有绝对必然性。首先馅饼是否为一种暗示，还是偶然的？馅饼意味着π，还是别的含义？爱赌钱、爱喝酒未必就是凶手？米塞尔出走也未必是逃脱罪责而出走？但是所有这些特殊性都与米塞尔有关，

就足以产生对米塞尔的怀疑了。因此，伽罗华所做的判断就是合情推理得到的一种大胆猜想。他的关于案情论证过程不是断案过程，而是合乎情理的分析过程。它只能作为破案的线索，而不能作为结案的充分证据。但是，没有这样合乎情理的分析过程，就没有侦破过程，也就没有终结。

由此可见，合情推理是一种合乎情理的分析过程，它是一种可能性推理，是冒风险的、有争议的和暂时的，是与推理者本身的知识结构和环境密切相关的。伽罗华与鲁柏都热爱数学，才能将 pie 与 π，与 3.14 联系起来，这就是“心有灵犀”，而别人做不到这一点。因此，合情推理包含了某些主观性的东西和不确定的东西，它不是一种自身独立的推理。但是，它毕竟综合了许多偶然因素，使人们在一定程度上相信它的结论，而且人们普遍地、经常地使用着这一思维过程，它又是一种普遍的思维方式。

§2 什么是合情推理

合情推理是一种可能性推理，是根据人们的经验、知识、直观与感觉得到的一种可能性结论的推理。

让我们举一个例子来说明合情推理。

例 1. 若函数 $f(x)$ 满足

$$f(x+1)=f(x)-f(x-1) \qquad (2.1)$$

求证：$f(x)$ 是周期函数。

本例是通过一个递归公式给出的函数，不是函数的显式，也未给出具体的周期，即使给出具体周期，也无法直接证明。这种题目使人有一种无从下手的感觉。如果函数 $f(x)\equiv 0$ 本例是平凡的，故仅考虑 $f(x)\not\equiv 0$ 的情况。

由于 $f(x)$ 是用递归公式表达的，可以任意给出两个初始值用递归公式算下去。取 $f(0)=1$，$f(1)=3$，则得到

$$
\begin{array}{lll}
f(0)=1, & f(1)=3, & f(2)=2, \\
f(3)=-1, & f(4)=-3, & f(5)=-2, \\
f(6)=1, & f(7)=3, & f(8)=2, \\
f(9)=-1, & f(10)=-3, & f(11)=-2. \cdots\cdots
\end{array}
$$

从以上具体数字易见以下性质成立：

(1) $f(x+3)=-f(x)$； (2.2)

(2) $f(x+6)=f(x)$ (2.3)

如果这两条性质成立，例题便得以证明。问题是这两条有无普遍意义，它是否依赖于初始值 $f(0)$ 与 $f(1)$ 的选择，是否依赖于 x 的取值？

根据题设条件，可证

$$
\begin{aligned}
f(x+3) &= f(x+2)-f(x+1) \\
&= f(x+1)-f(x)-f(x+1) \\
&= -f(x)
\end{aligned}
$$

则性质(1)成立。由性质(1)可证

$$f(x+6)=f((x+3)+3)=-f(x+3)=f(x)$$

于是性质(2)成立。这便证明了 $f(x)$ 是周期函数。

我们这里将一般问题特殊化，将抽象问题具体

化，从而得到直观和经验，然后在经验中引出某些信念，再从理论上加以证明。

一般来说，我们研究的对象是一个确定的集合。将问题特殊化，是从研究对象的一个给定的集合转向集合内的一个小的子集合或具体对象。较小的子集合或具体对象当然具有给定的较大集合的性质，但它可能具有更多的特殊性质。因此，我们在观察具体对象时，要善于发现他们的共性，而不着眼于具体对象的具体性质。这样，从具体对象中得到的猜测才有一般性。

从具体对象中猜测一般性的结论要围绕一个根本的目的。例1中具体函数可能有许多，具体函数的性质可能有许多，但猜测它的性质主要围绕着周期性。这样就不至于用具体函数的具体性质，来代替一般函数的一般性质。

为了避免用具体对象的具体性质代替一般对象的一般性质，我们可以重复举一些例子。比如在(2.1)中取 $f(0)=0$，$f(1)=1$，则有

$$
\begin{aligned}
&f(0)=0,\quad f(1)=1,\quad &&f(2)=1,\\
&f(3)=0,\quad f(4)=-1,\quad &&f(5)=-1,\\
&f(6)=0,\quad f(7)=1,\quad &&f(8)=1,\\
&f(9)=0,\quad f(10)=-1,\quad &&f(11)=-1,\ \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

这样，(2.2)和(2.3)依然成立。从而更证实了性质(1)和性质(2)具有一般性。这种例子越多，越证实了性质(1)与(2)的可靠性。每增加一个符合猜想的实例，就进一步肯定了猜想的正确程度。但是毕竟

不能穷尽所有的对象，也就不可能通过具体对象的验证来证明猜想。猜想通过直观和经验得到，论证必须通过理性与抽象来进行。

从具体对象的性质预测包括该对象的集合的共性，这就是合情推理。它不是思维的量变过程，而是通过量变达到质变的过程。

我们也可以从一个包含较少对象的集合的共性，预测包括该对象的集合的较大集合的共性，这也是合情推理。比如考虑满足比(1)式的关系更一般的关系的函数。设函数 $f(x)$ 满足

$$f(x+\alpha)=f(x)-f(x-\alpha)$$

这里 α 可以是任意非零的实数，则 $f(x)$ 也是周期函数。事实上，同样可证

(1) $f(x+3\alpha)=-f(x)$；

(2) $f(x+6\alpha)=f(x)$

在 $f(x)$ 是周期函数这一点上是统一的，当然具体周期是不同的。

从几个具体对象的性质预测包含这些对象在内的集合的共性，称为归纳推理。从包含较少对象的集合的共性猜测包含较多对象的集合的共性称为拓广推理。无论归纳推理还是拓广推理，都是纵向思维方式。

与纵向思维方式对应的是横向思维方式。所谓横向思维方式，是在两个或者更多的系统中进行比较，猜测某些结论的一种思维活动方式。

为了系统能够进行横向比较，系统之间要有某

种类似对应关系。比如数的加法系统与乘法系统之间就存在着受同一规律支配的各种关系：

（1）加法与乘法都满足交换律，即

$$a+b=b+a;\quad a\cdot b=b\cdot a$$

（2）加法与乘法都满足结合律，即

$$(a+b)+c=a+(b+c);\quad (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$$

（3）加法与乘法都有逆运算，即方程

$$a+x=b \quad 与 \quad a\cdot x=b(a\neq 0)$$

都有唯一解。

（4）加法系统与乘法系统分别存在 0 和 1 满足类似关系：

$$a+0=a;\quad a\cdot 1=a$$

从例 1 中知，若函数 $f(x)$满足(2.1)式，$f(x)$是周期函数。改动(2.1)式，如果 $f(x)$满足

$$f(x)=f(x-1)+f(x+1) \tag{2.4}$$

则 $f(x)$也为周期函数。由于加法系统与乘法系统的类似关系，可以猜测 $f(x)$若满足

$$f(x)=f(x-1)\cdot f(x+1) \tag{2.5}$$

则 $f(x)$仍是周期函数。

事实上，由(2.5)可得

$$\begin{aligned}f(x+2)&=f(x+3)\cdot f(x+1)\\&=f(x+3)\cdot f(x+2)\cdot f(x)\end{aligned}$$

如果 $f(x+2)\neq 0$，故可约去 $f(x+2)$，得到

$$f(x+3)\cdot f(x)=1 \tag{2.6}$$

此时 $f(x+3)\neq 0$。由于

$$f(x+6)\cdot f(x+3)=f(x+3)\cdot f(x)$$

则得 $f(x+6)=f(x)$。若有 x_0 使 $f(x_0+2)=0$，由(2.5)式知 $f(x_0+n)=0(n=0,\pm 1,\cdots\cdots)$，于是 $f(x)$ 是周期函数是显然的。

由于两个系统之间的某些类似关系，通过对一个系统的性质猜测而得到另外系统性质的推理方式，称为类比推理。由于两个系统毕竟是不同的，这种猜测就不一定绝对正确，因此，类比推理也是一种合情推理。

在加法系统中，任何实数都有逆运算。即方程

$$a+x=b$$

对于任意实数 a 都有唯一解 $x=b-a$。但在乘法系统中，方程

$$a\cdot x=b$$

对于 $a=0$ 的情况无唯一解：当 $b=0$ 时，方程有无穷多解；当 $b\neq 0$ 时，方程无解。由于这两个系统的区别，类比的结论也只能是一种猜测。如果在(2.5)中加上条件：$f(x)$ 不取 0 值，则 $f(x)$ 是周期函数是明显的。这是因为实数关于加法构成交换群，非 0 的实数关于乘法构成交换群。而在证明满足(2.1)的函数为周期函数时只用到群的基本性质。

在这里，加法系统与乘法系统有着明确的类比关系，从一个系统的性质比较容易地猜测另外一个系统的性质。但是，往往两个系统的关系是含糊的。为了类比，必须找到相似性，只有相似性才有一致性，才能进行成功的猜测。相似性的获取依赖于思考者的意图和聪明才智。

下面，我们考虑另外的例子。

例 2. 求下面无穷数列的和：

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \tag{2.7}$$

这个问题是由与牛顿、莱布尼兹同时代的数学家伯努利提出来的。他指出："假如有人能够求出这个我们直到现在还未求出的和并能把它通知我们，我们将会很感谢他。"这个问题引起欧拉的兴趣。他发现了这个和的各种表达式，要用定积分与级数来表达，但没有一个使他满意。他算出了这个和的七位有效数字 1.644934，然而这只是一个近似值，而他的目的是要求出精确值。最后，类比推理引导他作出了一个非常大胆的猜想。

为了研究(2.7)式的和，我们回顾一下初等代数中 n 次代数方程的性质。设 $2n$ 次代数方程

$$b_0-b_1x^2+b_2x^4-\cdots\cdots+(-1)^nb_nx^{2n}=0 \tag{2.8}$$

有 $2n$ 个非零且互不相同的根为

$$\beta_1,-\beta_1,\beta_2,-\beta_2,\cdots\cdots\beta_n,-\beta_n$$

则代数方程(8)左边的多项式可表示为

$$\begin{aligned}&b_0-b_1x^2+b_2x^4-\cdots\cdots+(-1)^nb_nx^{2n}\\&=b_0\left(1-\frac{x^2}{\beta_1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\beta_2^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{x^2}{\beta_n^2}\right)\end{aligned} \tag{2.9}$$

两个代数方程如果有相同的根，而且常数项相等，则其它项的系数也分别相等。比较 x^2 的系数，即得

$$b_1=b_0\left(\frac{1}{\beta_1^2}+\frac{1}{\beta_2^2}+\cdots+\frac{1}{\beta_n^2}\right) \tag{2.10}$$