徐利治　蒋茂森　著

OR

·运筹学小丛书·

组合数学入门

·运筹学小丛书·

组合数学入门

徐利治　蒋茂森 著

辽 宁 教 育 出 版 社
一九九〇年·沈阳

组合数学入门

徐利治　蒋茂森　著

辽宁教育出版社出版　辽宁省新华书店发行

（沈阳市南京街6段1里2号）　沈阳新华印刷厂印刷

字数：80,000　开本：787×1092 1/32　印张：4 1/8

印数：6,001—8,000

1985年5月第1版　1990年10月第2次印刷

责任编辑：杨　力　　责任校对：晓　黎

封面设计：宋丹心

ISBN 7-5382-1319-8/G·1025　定价：1.74元

出 版 说 明

运筹学是二十世纪四十年代开始形成的一门学科，是现代数学的一个重要组成部分。在科学技术迅速发展的今天，运筹学有着广泛的应用。

为了向广大读者普及运筹学知识，在中国运筹学会的关心和支持下，尤其是在徐利治教授的积极倡导和组织下，编辑出版了这套《运筹学小丛书》。

这套丛书用通俗的语言系统地介绍了运筹学中各个分支的基础知识和应用方法，其中包括规划论、对策论、排队论等方面的二十多个专题，在编写内容上，注重科学性、知识性和趣味性相结合，论述一般先从实例谈起，由浅入深，引出完整的数学理论。并且，大部分内容的引出方法都是初等的，因此，凡是具有高中以上文化程度的读者，都可以阅读。

序　　言

什么叫组合数学？要用几句话说清楚是不容易的。粗略地说，它是研究任意一组离散性事物按照一定规则安排或配置方法的数学。现今中学代数课程里都要讲一点排列、组合的初步知识与计算方法，这就是属于组合数学的内容。

组合数学对于年轻人来说是最容易引起兴趣的学科，它能锻炼人的分析思维能力和培养计算能力，所以对于增长年轻的科技工作者特别是运筹学工作者的才能来说，它也有其特殊的作用。

本书既然叫做《组合数学入门》，这就需要有选择地向初学者展示这门学科中的基础知识和基本方法。于是我们讲述了十一节内容，其中大部分题材都与组合分析技巧及计算方法有关，当然它们都是统计数学工作者与运筹学工作者常用的数学工具。还有个别几节，例如§5涉及一些古典数论知识，这对于搞编码研究的人是有用的。又例如§6和§8中讨论的问题似乎带有数学游戏味道，但它们在现代计算机科学领域与优选法理论分析中却分别有着重要应用。

本书中安排了不少例子，目的是希望初学者在阅读过程中既能重视分析推理，又能学到计算技巧。作为“入门”，

无非是希望初学者能够顺利地跨进门的意思。当然，“进门”不等于登堂入室，但毕竟是重要的一步。假如本书对初学者跨进门这一步有所帮助的话，那将是作者们的极大愉快。同时，如发现书中有何缺点或差错，也希望读者不吝指正！于1984年取得学位的万宏辉硕士曾主动帮助校订了本书原稿，特此致谢。

徐利治　蒋茂森

1984年10月

目　　录

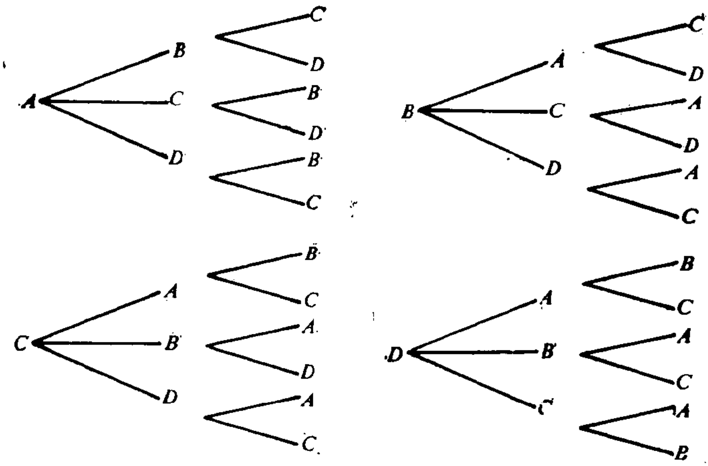
序言
§1　排列与组合…………………………………………………… 1
§2　组合恒等式……………………………………………………14
§3　交叉分类原理…………………………………………………21
§4　差分算子方法…………………………………………………34
§5　有关同余式的几个定理………………………………………41
§6　鸽笼原理与拉姆齐数…………………………………………50
§7　发生函数………………………………………………………60
§8　斐波那契数……………………………………………………79
§9　数列的反演……………………………………………………95
§10　麦比乌斯—罗大反演理论大意……………………… 106
§11　古典的麦比乌斯反演公式…………………………… 118

§1 排列与组合

组合数学最早起源于研究有限集合满足一定条件的各种排列与组合的计数问题．时至今日，有关排列组合的基本知识已成为学习概率论、统计学、运筹学、计算机等学科的必备知识．事实上，日常生活中人们也常和排列、组合等概念打交道．

让我们从一个简单的例子谈起：某班中有n个同学，现在要从中挑选k个人去参加植树劳动．那么每一种选法便是n个取k个的一种“组合”；如果挑选的k个人还要求排队开赴劳动现场，那么每一种排队方法就代表一个“排列”．这样我们就清楚了“组合”和“排列”之间的主要区别：组合是不考虑次序的，而排列要考虑次序．换句话说，两个组合看作是不同的，如果它们的元素至少有一个不相同；而对于排列而言，即使是同样的k个元素，只要在排列过程中次序有所改变，也认为是不同的排列．让我们考虑最简单的情形，四个人A、B、C、D取3个的组合一共有四种，即$\{A, B, C\}$，$\{A, B, D\}$，$\{A, C, D\}$和$\{B, C, D\}$．而取三个的排列则有下面的24种（见下页图）：

试以A_n^k代表n个不同的人（或元素）取k个的排列的总数，A_n^k可以这样来求：在排队过程中，第一个人可选n个人中的任何一个，因此有n种选法，而当第一个人选定之



后，第二个人可选其余的 $n-1$ 个人中的任何一人，因此就有$n-1$种选法，这样前两个人的选法（站好队）就有$n(n-1)$种，在前两个人站定之后，第三个人又有 $n-2$ 种选法，因此前三个人就有$n(n-1)(n-2)$种选法（这也就是 n取 3 的排列数），依此类推下去，当前面$k-1$个人都选好之后，第 k个人可从剩下的 $n-(k-1)=n-k+1$ 个人中任意地选，因而仍有$n-k+1$种选法，所以 n个取 k个的所有排列的总数就是 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ ．它是从n开始依次减小的 k个连续整数的乘积，我们将这乘积记作$[n]_k$，并读作：n的降 k阶乘．于是还有 n的降 n阶乘 $[n]_n=n(n-1)\cdots 2\cdot 1=n!$——就是通常的 n阶乘．上面关于排列数的结论可写为：

$$A_n^k=[n]_k=\frac{n!}{k!}.$$

现在以$\binom{n}{k}$（一般中学课本中用记号C_n^k）表示从n个人中选k个人的组合数，为了寻求$\binom{n}{k}$的表示式，我们可以这样来考虑：一旦选定了k个人（的一个组合）去参加劳动，再让他们排队走，这种排队方法就是k个取k个的排列数，根据刚才的结果就是$k!$种．这样n个取k个的每一个组合就可做出$k!$种不同的排列．不同的组合所做出的排列自然就更彼此不同，全部组合所对应的所有排列就是全部的(n个取k个的）排列．因此将组合数$\binom{n}{k}$扩大$k!$倍就是排列数A_n^k，从而得到

$$\binom{n}{k}=\frac{A_n^k}{k!}=\frac{[n]_k}{k!}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

组合数$\binom{n}{k}$也称为二项式系数．这是因为当我们将二项式$(x+y)^k$展开时，便可得到

$$(x+y)^n=\binom{n}{0}y^n+\binom{n}{1}xy^{n-1}+\cdots+\binom{n}{k}x^ky^{n-k}+\cdots+\binom{n}{n-1}x^{n-1}y+\binom{n}{n}x^n,$$

上式称为牛顿二项式展开定理．除了用归纳法证明之外，还可以借助于组合数$\binom{n}{k}$的组合意义来证明它：将$(x+y)^n$写成n个$(x+y)$的因子的乘积

$$\underbrace{(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}_{n\text{个括弧}},$$

而将其展开时，其中项 $x^k y^{n-k}$ 的系数不是别的，正是从这 n 个括弧中取出 k 个括弧来（在展开时从中取 x，从其余的括弧取 y，连乘即做得一个 $x^k y^{n-k}$，而每个 $x^k y^{n-k}$ 也只能如此得到）的方法数，即 n 个取 k 个的组合数 $\binom{n}{k}$。

现在来看这样的问题：将三个白球、两个黑球排成一列，问能作出多少种不同形式的排列？如

便是一种，

又是一种，

又是另一种等等。

实际上全部画出来可以得到10种。为什么是这样呢？可以这样考虑：设想一条线上排列着五个位置，依次标以 1，2，3，4，5 这五个数字，那么每一种排球方法便相当于一个从五个位置中取 3 个位置（放白球，余者放黑球）的一个组合，与上面三种排球法相应的组合便是（1，2，3），（1，3，5）和（1，2，5）。这种对应关系显然是一对一的。因而所求排球方法数恰好就是五个位置取 3 个位置的组合数，即 $\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!\,2!}=10$ 种。

对于具体问题，必须根据题意严格区分清楚是组合计数还是排列计数问题。但是从上例的分析可见，将某个特定的排列问题转化为组合问题（或反之），从而引用已知的结论有时对解决问题会大有帮助。上述例子虽然简单，但是它所应用的“一一对应”的思想却值得我们仔细地体会和掌握。

进一步的例子是：将 2 面白旗、3 面红旗、4 面蓝旗排成一列作成一种信号，问能作成多少种不同的信号？用类似的考虑便可化为：从1，2，…，9 这 9 个位置中先选出 2 个位置（放白旗），再从其余的 7 个位置中选 3 个位置（放红旗，最后把剩下的 4 个位置放蓝旗）的方法数。这样我们便得到所求的解是

$$\binom{9}{2}\binom{7}{3}=\frac{9!}{2!7!}\times\frac{7!}{3!4!}=\frac{9!}{2!3!4!}=1260\text{（种）}.$$

换一种说法，这也就是将九个不同元素分成三组，使得第一、二、三组分别包含有 2 个、3 个、4 个元素的所有分组方法数。

由上面的分析知道，2 白、3 红、4 蓝所作成的排列共有 $\frac{9!}{2!3!4!}$ 种，不过这个结论还可通过另外一种更直接的分析得到。设想对这九面旗帜的一种固定的排列，在两面白旗上打上 1，2 两种记号（成为白$_1$与白$_2$），则有 $A_2^2=2!$ 种打记号的办法，在三面红旗上打上1，2，3三种记号，则有 $A_3^3=3!$ 种打记号的办法，在四面红旗上打上1，2，3，4又有 $A_4^4=4!$ 种办法。一旦都打上记号之后，我们再来看，就变成了由白$_1$，白$_2$，红$_1$，红$_2$，红$_3$，蓝$_1$，蓝$_2$，蓝$_3$，蓝$_4$所组成的一个排列了（即把原来同色的旗也都变成有区别的了）。由于打记号的方法彼此独立（意即对于白旗的每种记法，红旗各有3!种记法，对于白旗、红旗的每种记法，蓝旗都还有4!种记法），这样总的打记号的办法就共有$2!\times3!\times4!$种。对于九面旗帜所作出的两个不同的排列，由于其中必定至少有两个位置上的旗帜

的颜色改变了，因此通过打记号所得到的九元排列就更不同。因此如果以 x 表示所求的九面旗帜的排列数，则由于每种排列均可演化出$2!\times 3!\times 4!$种打记号的排列，所以总共可以作成 $x\times 2!\times 3!\times 4!$种打记号的排列．而我们又知道全部打记号的排列总数等于九元全排列的总数，即 $A_9^9=9!$，这就使我们得到了恒等式

$$x(2!\,3!\,4!)=9!,$$

由此

$$x=\frac{9!}{2!\,3!\,4!}.$$

这与上面的结果完全一致．这种解法的实质也是构成一种对应，把 2 白、3 红、4 蓝的每一排列对应成九元全排列，只不过不是一一对应，而是一种成一定倍数（$2!\,3!\,4!$）的对应而已。

上述结果的推广形式是：如果$k_1+k_2+\cdots+kr=n$，那么由 k_1个 a_1，k_2个 a_2，…，kr个 ar 所作成的排列数（也就是将n 个学生分成依次含有 k_1个人，k_2个人，…，kr个人的分组方法数）是$\frac{n!}{k_1!\,k_2!\cdots kr!}$种．实际上这就是多项式$(x_1+x_2+\cdots+xr)^n$ 的展开式中$x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_r^{k_r}$项的系数，所以也把它叫做多项式系数，并且记作

$$\binom{n}{k_1,k_2,\cdots,kr}=\frac{n!}{k_1!\,k_2!\cdots kr!}.$$

与二项展开定理类似也有多项式展开定理：

$$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^n=\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_r=n}\binom{n}{k_1,k_2,\cdots,k_r}$$

$x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_r^{k_r}$，其中求和记号 $\sum\limits_{k_1+k_2+\cdots+k_r=n}$ 表示对满足不定方程 $k_1+k_2+\cdots+k_r=n$的所有非负整数解 $(k_1,k_2,\cdots,k_r)$ 求和（读者试自思其故）．无论用组合意义的直接推理法，或用公式代入计算均可得到

$$\binom{n}{k_1,k_2,\cdots,k_r}=\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\cdots\binom{n-\sum\limits_{i=1}^{r-1}k_i}{k_r}.$$

现在让我们讨论另一类问题：某科技局张榜招聘外语科技人员，一时间便有n个“毛遂”登门自荐，问最后可能出现多少种不同的结果？

要单纯从最后被录用的人数来看，当然就只可能出现$n+1$种情况：即最后实际有0个，1个，…，n个被录用．但是在有k个人被录用的场合，自然还要区分究竟是那k个人被录用，这样就有$\binom{n}{k}$种可能结果，因此作为最后结果的总数便是$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}$种．在前面关于二项展开的公式中令$x=y=1$知道这实际上就是$2^n$．

另一种解法则更为直接了当：设想对每个录用者付与数字1，不录用者付与数字0，则每种结果对应了由0和1作成的长度为n的数列．由于在n个位置上放0或1，每个位置均有2种放法，因此总的放法数即2^n种．

推而广之，n个人任意踏上k节车厢，由于第一个人有

k种不同的上法，对第一个人的每种上法，第二个人又可踏上 k节中的任何一节，仍有 k种上法，……，前 $n-1$ 个上好之后，第n 个人仍有 k种不同上法，因而所有可能的不同上法数便是k^n。这也就等于将n 个不同元素排成有序的 k个组（第1，第2，……，第 k组，每组中人数不限；你无妨将踏上第 i 节车厢的人就看作是第 i组）的分组方法数。这又等价于由 k种不同颜色的球允许重复取n 个所作成的排列数（每个位置均有 k种球可放，因此排列总数是k^n）。

将n 本同样的书分装在 k个不同的抽屉中，每屉中所放本数不限，问有多少种不同的装法？这又是一类不同的问题。以x_i代表第 i个抽屉中所放的书的本数，则 $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ 。不同的放法就对应了方程的不同的解。因此所求的数就是不定方程$\sum\limits_{i=1}^{k} x_i=n$ 的所有非负整数解的组数，这个问题有许多种解法，让我们介绍其中具有启发意义的三种。

1．对方程$x_1+x_2+\cdots+x_k=n$的一组固定的非负整数解 x_1，x_2，…，x_k，令

$$y_1=x_1+1,$$

$$y_2=x_1+x_2+2,$$

$$\cdots\ \cdots,$$

$$y_k=x_1+x_2+\cdots+x_k+k,$$

则我们有

$$1\leqslant y_1<y_2<\cdots<y_{k-1}<y_k=n+k,$$

这就表明 y_1，y_2，…，y_{k-1}是从1到 $n+k-1$中取出的（按

由小到大次序排列的） $k-1$ 个数．由于对应关系显然是一对一的，因此方程解数便是从$n+k-1$ 个数中取出$k-1$个数的组合数，即$\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{n+k-1}{n}$.

2．令$z_i=x_i+1$ $(i=1,\cdots,k)$，则

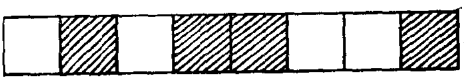
$$z_1+z_2+\cdots+z_k=x_1+x_2+\cdots+x_k+k=n+k,$$

于是$(z_1, z_2,\cdots, z_k)$便是方程$\sum_{i=1}^{k} z_i=n+k$的**正整数解**．在一条线上画上$n+k$个圈，则圈与圈之间就形成$n+k-1$ 个间隙，在这些间隙中任取 $k-1$ 个间隙各画上一条线

○ ○|○ ○ ○|○|○

（上图是 $k=4$，$n=3$ 的一种情形），则这 $k-1$ 条线就将 $n+k$ 个圈分成了k部分，数一数各部分中圈的数目依次记为z_1，z_2,…，z_k,则得到的便是和为 $n+k$的一组正整数．方程$\sum_{i=1}^{k} z_i=n+k$ 的所有正整数解均可如此得到．这就表明所求解数正是从 $n+k-1$个间隙中取出$k-1$个间隙（以便画线）的取法数，而这就是普通的组合数$\binom{n+k-1}{k-1}$了．

3．



在一条直线上放置 $n+k-1$个方格．上图为 $n=4,k=5$

的情形．然后从中任取 $k-1$ 个方格打上阴影．数数头一个打阴影格以前的空格数，记作 x_1，第 $i-1$个打阴影格和第i个打阴影格之间的空格数记作 x_i，第$k-1$个阴影格以后的空格数记作 x_k（在上图中 $x_1=1$，$x_2=1$，$x_3=0$，$x_4=2$，$x_5=0$），则所有x_i的和即空格的总数等于n．因此所求解数即打阴影的方法数为$\binom{n+k-1}{k-1}$．（读者当能理解，这种解法同第1种并无实质性差别，只不过借助于几何图象更觉直观罢了。）

和上述问题等价的问题也常以如下的形式出现：设有k种颜色的球（每种个数不限），要我们从中取出n个来作成一堆（不排序），问有多少种取法．对于这每一种取法，叫做 k个不同元素允许重复取 n个的一种组合，这种组合的数目便也是方程$\sum_{i=1}^{k} x_i=n$（其中x_i表在此取法中第 i 种元素的个数）的非负整解数．因此也是$\binom{n+k-1}{k-1}$．小明的妈妈买了5枝同样的铅笔、5本同样的笔记本和5个同色的气球，让小明从中任取5样东西作为送给他的生日礼物，则小明便有多至$\binom{5+3-1}{3-1}=\binom{7}{2}=21$种的不同取法。

现在让我们简单地提一下圆排列．幼儿园中 n个小朋友（其中包括兰兰）围成一圈跳拍手舞，问有多少不同的围圈办法？设想对每一种固定的围圈办法，令从兰兰开始向某一方向依次走出站成一直列，这样我们得到一个以兰兰打头的