高等学校教学用书

相似理论在金属塑性加工中的应用

GAODENG XUEXIAO JIAOXUE YONGSHU

冶金工业出版社

高等学校教学用书

相似理论在金属塑性加工中的应用

北京科技大学 鹿守理 编

冶金工业出版社

(京)新登字036号

图书在版编目（CIP）数据

相似理论在金属塑性加工中的应用/鹿守理编.-北京：冶金工业出版社，1995.5

高等学校教学用书

ISBN 7-5024-1594-7

Ⅰ.相… Ⅱ.鹿… Ⅲ.相似理论-应用-金属压力加工-高等学校-教材 Ⅳ.TG301

中国版本图书馆CIP数据核字（94）第11022号

出版人 卿启云（北京沙滩嵩祝院北巷39号，邮编100009）

香河县第二印刷厂印刷；冶金工业出版社发行；各地新华书店经销

1995年4月第1版，1995年4月第1次印刷

850mm×1168mm 1/32； 3.125印张； 80千字；93页；1-500册

2.50元

前　　言

对金属塑性加工过程进行研究，离不开物理模拟方法。物理模拟方法的理论基础是相似理论。当由于问题的复杂性而列不出描述该问题的微分方程，或列出的微分方程无法求解时，则可根据相似理论导出相应的相似准数，进而求得相似准数之间的关系式，使问题得以解决。

德国、前苏联及日本等国在用相似理论解决金属塑性加工问题方面得出了很好的结果，并有许多关于在金属塑性加工中应用相似理论的专著和论文发表。在这些国家的金属塑性加工专业的教学中，相似理论也占有重要的地位。

我国金属塑性加工专业的教学中过去没有这方面的内容。工程技术人员在进行实验研究时，往往不知道必须保证什么条件（相似条件）进行实验研究才能获得可靠的结果；在需要使用已有的实验研究结果时，往往发现把在人家的设备上测得的数据（例如宽展系数、轧制力等）用到自己的设备上时误差很大，而不知道在什么条件（相似条件）下才可直接使用已有的实验研究结果，以及当这些条件不能完全保证时，如何使用这些结果才能避免过大的误差；当问题无法列方程求解时，也不会用建立准数关系式求解。因此，开设一门相似理论在金属塑性加工中应用的课程是必要的。

本书是作者自1985年以来在北京科技大学金属塑性加工专业历年开设选修课的基础上，按27学时的大纲编写的。本书的特点是不追求相似理论的完整性，而是把重点放在相似理论在金属塑性加工中的应用上。全书由三部分组成。第一部分介绍相似理论的基本概念。由于学时所限，这部分不可能完整地介绍相似理论，只能简要地介绍相似理论的最基本概念。这部分是根据已发表的相似理论专著（〔1〕至〔5〕）编写的，必要时读者可参考这

些专著进一步加深相似理论的基础。第二部分根据金属塑性加工的基本微分方程组详细、完整地推导金属塑性加工中的相似准数和模型定律，分析金属塑性加工的相似条件。第三部分根据文献资料和作者本人的研究结果，介绍应用相似理论和物理模拟方法解决塑性加工问题的具体方法和实例。

书中有关热轧和冷轧的试验结果是在德国阿亨大学IBF研究所R.Kopp教授指导下完成的。本书初稿完成后曾请西安建筑科技大学严崇年教授和唐山工程技术学院马义德教授审查，他们给初稿提出了许多宝贵意见，在此向他们表示衷心的感谢。

由于作者水平所限，书中不当之处在所难免，真诚地欢迎批评指正。

作者

一九九四年三月

目　录

绪　论

为了研究金属塑性加工过程或其中的物理现象，常使用能够再现这些过程或现象的重要特征的某种客体来代替真实过程或现象。这种研究方法称为模拟。其中被代替的真实过程或物理现象称为原型，用以代替原型的客体称为模型。

模拟是科学研究的重要方法。实质上任何一种科学研究方法，无论是理论方法（这时用各类符号的抽象模型），还是实验研究方法（此时用实体模型）都是以模拟为基础。

金属塑性加工过程模拟可以实现的功能很多，例如揭示金属塑性加工过程或其中的物理现象的本质，建立描述金属塑性加工过程各参量的函数关系，制订最优工艺过程和工艺制度，设计最优设备结构和参数，代替试生产或试运转以便在正式生产或运转之前发现可能存在的问题，培训操作人员等等。

用模拟来代替在真实的塑性加工过程或其中的物理现象上进行研究有许多优点，比如节省研究费用和消耗、不打乱正常生产过程、可以灵活地控制和调节影响因素及其变化、准确测量试验数据等等。

金属塑性加工过程模拟可以用能再现原型的几何、物理、动力和功能等特征的实体模型实现，称为实体模拟；也可以借助于描述被模拟客体特征的数学表达式、图表、结构框图、算法或计算机程序等抽象模型实现，这样的模拟称为抽象模拟。

在实体模拟中可以用物理本质与原型相同的模型，这样的模拟称为物理实体模拟，或简称为物理模拟；也可以用本质与原型不同，但数学描述与原型相同的实体模型，这样的模拟称为数学实体模拟；借助于用数学符号对过程或物理现象的重要特征进行的描述（称为数学模型）进行的抽象模拟，则是广义的数学模拟；借助于数值计算法进行的数学模拟，称为数值模拟；随着计

算机功能的发展，近代模拟往往用电子计算机来实现，称为计算机模拟。

数学模拟是以描述过程或现象的数学表达式为基础，所以可较方便地看出各参量对结果的影响。数学模拟只有当建立起描述过程或现象的数学表达式之后，才能实现。金属塑性加工中的现象的复杂性导致了建立复杂的数学模型的必要性，它们要考虑到所研究的过程或现象的许多方面。因此要使用现代强大的数学分析方法和计算数学。描述金属塑性加工过程的数学模型的完善程度和用于它们的研究的数学手段，在一定程度上表征了金属塑性加工学科的发展水平。

物理模拟可以把具体现象重现出来，具有直观性强、能最大限度地揭示现象的物理本质等优点。物理模拟在描述过程或现象的数学表达式尚为未知，但已知影响该过程或现象的物理量时就可实现。物理模拟在科学技术的发展中起了重要作用，就是在计算机技术高度发展的今天，在航天技术等近代尖端科学技术的发展中，物理模拟也仍然是重要的研究方法。

模拟是以模型与原型的相似性为基础。相似理论则是论述现象相似的条件和相似的现象所具有的性质的学说。

对于一些复杂的问题，往往列不出描述他们的微分方程，或者列出的微分方程无法求解，这时可根据相似理论导出相似准数，并通过模型试验，得出经验公式，使问题的求解成为可能。

因此，本书首先介绍相似理论的基本概念（第一章），进而导出金属塑性加工过程的物理相似的条件（第二章），最后介绍塑性加工过程的物理模拟和通过建立相似准数间的关系式求解金属塑性加工问题的实例（第三章）。

1 相似理论的基本概念

1.1 基本概念

1.1.1 几何相似和物理相似

两个系统几何相似是指这两个系统中相对应部分的长度保持相同的比例。例如，两个相似三角形$A'B'C'$与$A''B''C''$，它们的对应边长度保持相同的比例：

$$\frac{A'B'}{A''B''}=\frac{B'C'}{B''C''}=\frac{C'A'}{C''A''}=m_{l1}$$

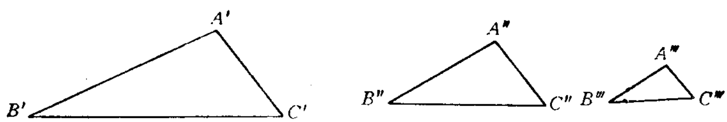

图 1-1 相似三角形

三角形$A'B'C'$与另一三角形$A'''B'''C'''$相似：

$$\frac{A'B'}{A'''B'''}=\frac{B'C'}{B'''C'''}=\frac{C'A'}{C'''A'''}=m_{l2}$$

几何相似的概念可以推广到其他物理量相似。例如时间相似是指两个系统中相对应的时间间隔保持相同的比例；力相似是指两个系统对应点上的作用力方向一致、大小保持相同的比例；温度相似是指两个系统对应点的温度保持相同的比例等等。

两个现象物理相似是指现象的物理本质相同，且各对应点上和各对应瞬间与该现象有关的各同名物理量都分别保持相同的比例，亦即各对应点上与该现象有关的各同名物理量保持相似。

1.1.2 相似常数

如上所述，现象相似是指各有关同名物理量在各对应点和瞬间分别保持相同的比例。这些比例系数m_l、m_t、m_F…，称为“相似常数”。

一对相似现象的某一物理量的相似常数为一个数值，而在另一对相似现象中该物理量的相似常数为另一数值。如图1-1中，三角形$A'B'C'$与三角形$A''B''C''$几何相似，相似常数为m_{l1}，而三角形$A'B'C'$同三角形$A'''B'''C'''$也相似，相似常数为m_{l2}，$m_{l1}\neq m_{l2}$。

表述力学和热学过程的基本物理量为长度、时间、质量和温度，因此可以给出以下基本相似常数。

几何相似常数：$m_l=l'/l''$或者$m_l=l/\overline{l}$

时间相似常数：$m_t=t'/t''$或者$m_t=t/\overline{t}$

质量相似常数：$m_m=m'/m''$或者$m_m=m/\overline{m}$

（力相似常数：$m_F=F'/F''$或者$m_F=F/\overline{F}$）

温度相似常数：$m_\theta=\theta'/\theta''$或者$m_\theta=\theta/\overline{\theta}$

（上面标以横道的各量表示是模型中的量，无横道者表示原型中的量，下同）。

对其他物理量也可同样定义其相似常数。

根据导出量与基本量之间的物理关系，导出量的相似常数可用基本量的相似常数表示。例如，速度相似常数可表示为：

$$m_v=\frac{v'}{v''}=\frac{l'/t'}{l''/t''}=\frac{l'/l''}{t'/t''}=\frac{m_l}{m_t}$$

1.1.3 相似定数

在同一个系统的两点上，同名物理量的比值称为相似定数。它在一切相似的系统中都相等。例如，在图1-1的相似三角形中

$$\frac{A'B'}{B'C'}=\frac{A''B''}{B''C''}=\frac{A'''B'''}{B'''C'''}=\cdots=k_l$$

1.1.4 模型定律、相似指标

由于相似现象中的各有关物理量必须服从一定的物理定律，它们之间受一定的关系方程约束，因此各有关相似常数之间也存

在一定关系。如上例中$m_v = m_l/m_t$。相似常数之间的这种函数系统，称为模型定律。

如果用a和$\bar{a}$表示在原型和模型中两个任意的同名物理量，m_a表示其相似常数，则可写出

$$a = m_a \cdot \bar{a}$$

a和$\bar{a}$可用基本量的指数乘积表示，即

$$\bar{a} = l^{a_1} t^{a_2} F^{a_3} \theta^{a_4}$$

$$a = (m_l l)^{a_1} (m_t t)^{a_2} (m_F F)^{a_3} (m_\theta \theta)^{a_4}$$

由比值 $$\frac{a}{\bar{a}} = \frac{(m_l l)^{a_1} (m_t t)^{a_2} (m_F F)^{a_3} (m_\theta \theta)^{a_4}}{l^{a_1} t^{a_2} F^{a_3} \theta^{a_4}}$$

得出相似常数的关系式

$$m_a = \frac{a}{\bar{a}} = m_l^{a_1} m_t^{a_2} m_F^{a_3} m_\theta^{a_4}$$

由模型定律 $\left(\text{如上例中} m_v = \frac{m_l}{m_t}\right)$得出：

$$C = \frac{m_v m_t}{m_l} = 1$$

C也称为相似指标。就是说，对相似现象，C值为1。

1.1.5 相似准数

将$m_v = v'/v''$，$m_l = l'/l''$，$m_t = t'/t''$代回上式，可以得出：

$$\frac{v't'}{l'} = \frac{v''t''}{l''}$$

这说明，在该相似的现象中，综合数群$\frac{vt}{l}$为一不变量，即：

$$\frac{vt}{l} = \mathrm{idem}$$

这种无量纲综合数群反映了物理相似的数量特征，称为相似准数。

这里“idem”表示“不变量”，它与“常量”的概念不同。不变量

是说在相似系统的对应点上，该无量纲综合数群相同，而在不同点上，同一无量纲综合数群的数值可以是不同的。

相似准数与相似常数也是不同的概念。如前所叙，相似常数只在一对相似现象中保持同一数值，而在另一对相似现象中，则为另一数值；相似准数则在一切相似现象的对应点上，均保持同一数值。

推导相似准数在相似理论应用中非常重要。

1.2 相似三定理

相似三定理是相似理论的基础，它们分别说明相似现象具有什么性质，个别现象的研究结果如何推广到所有相似现象上去，以及满足什么条件现象才相似。

1.2.1 相似第一定理

相似第一定理是以现象彼此相似为前提，研究彼此相似的现象具有的性质，所以也叫相似正定理。

相似第一定理可以表述为：彼此相似的现象其相似准数的数值相同。这一结论是根据彼此相似的现象具有的性质得出的。

根据物理相似的概念，彼此相似的现象在各对应点上和各对应瞬间的同名物理量分别保持相同的比例，且必然是同一性质的现象，服从于同一规律，描述各个量之间的关系的方程组文字上完全相同。

下面我们来研究一下两个相似的力学现象，它们服从牛顿第二定律：

$$F=m\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

对于第一现象 $$F'=m'\cdot\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}t'} \qquad (1\text{-}1)$$

对于第二现象 $$F''=m''\cdot\frac{\mathrm{d}v''}{\mathrm{d}t''} \qquad (1\text{-}2)$$

因两个现象相似，各物理量之间有以下关系：

$F'=m_F\cdot F''$，$m'=m_m\cdot m''$，$v'=m_v\cdot v''$，$t'=m_t\cdot t''$，式中 m_F、m_m、m_v、m_t分别为力相似常数、质量相似常数、速度相似常数和时间相似常数。

将以上各量代入式（1-1）得：

$$m_F\cdot F''=m_m\cdot m''\frac{m_v\cdot \mathrm{d}v''}{m_t\cdot \mathrm{d}t''}$$

$$\frac{m_F\cdot m_t}{m_m\cdot m_v}\cdot F''=m''\frac{\mathrm{d}v''}{\mathrm{d}t''}$$

显然只有当相似常数之间的关系符合

$$C=\frac{m_F\cdot m_t}{m_m\cdot m_v}=1 \tag{1-3}$$

描述两个现象的方程才能完全一致。

式（1-3）表明，各相似常数不是任意的，而是受一定关系约束。对于相似的现象

$$C=\frac{m_F\cdot m_t}{m_m\cdot m_v}=1$$

故C称为相似指标。

若将式（1-3）中的相似常数，用两系统中各量的比代替，则可写成：

$$\frac{\dfrac{F'}{F''}\cdot\dfrac{t'}{t''}}{\dfrac{m'}{m''}\cdot\dfrac{v'}{v''}}=1$$

也就是

$$\frac{F'\cdot t'}{m'\cdot v'}=\frac{F''\cdot t''}{m''\cdot v''}$$

如推广到第三个、第四个……相似现象，则有

$$\frac{F'\cdot t'}{m'\cdot v'}=\frac{F''\cdot t''}{m''\cdot v''}=\frac{F'''\cdot t'''}{m'''\cdot v'''}=\cdots\cdots$$

即在所有相似现象中，被称为相似准数的无量纲综合数群$\frac{F\cdot t}{m\cdot v}$

都等于同一数值，因此可写成：

$$\frac{F \cdot t}{m \cdot v} = \text{idem}$$

即在所有相似现象中，相似准数的数值相同。

要保持两现象相似，必须使相似准数相等。确定了相似准数，各物理量的相似常数之间的关系也就确定了，选择模型试验中各物理量的比例就有了可遵循的规则。

因此，在相似研究中的一个重要问题，就是确定相似准数。确定相似准数的方法将在第1.3节中给出。

1.2.2 相似第二定理

相似第二定理是关于物理量之间函数关系结构的定理。它说明应把模型试验结果整理成什么形式的关系式，就能推广到其他相似现象上去。相似第二定理也叫π定理。

能正确地反映物理规律的物理方程，应该是一个完全方程，即符合量纲均衡规则的方程。量纲均衡的物理方程是指方程中各项的量纲相同，同名物理量用同一种测量单位，当物理量的测量单位变化时，一个完全方程的文字结构保持不变。

相似第二定理可以表述为：一个包含n个物理量G_1、G_2、…G_n（其中k个物理量具有独立量纲）的物理方程可转换为$m=(n-k)$个由这些物理量组成的无量纲数群（指数幂乘积）π_1，π_2，……π_m之间的函数关系，即$f(G_i)=0 \Rightarrow \phi(\pi_j)=0 \begin{cases} i=1, 2, \cdots n; \\ j=1, 2, \cdots m。\end{cases}$

所谓具有独立量纲的物理量，是指该量的纲量式不能表示为其余量的量纲式幂数的结合（乘积）。例如长度L、速度LT^{-1}和能量ML^2T^{-2}是量纲互相独立的；而长度L、速度LT^{-1}和加速度LT^{-2}三者就不是量纲互相独立的，因为

$$[a]=[v]^2[l]^{-1}$$

对选择来用以表示其他物理量的具有独立量纲的量，应进行检验。如各量量纲式中的指数是线性不相关的，（也就是这些指数

所组成的矩阵的行列式不等于0)，则他们的量纲是互相独立的。

设

$$[G_1]=M^{a_1}L^{b_1}T^{c_1}$$
$$[G_2]=M^{a_2}L^{b_2}T^{c_2}$$
$$[G_3]=M^{a_3}L^{b_3}T^{c_3}$$

如果

$$\triangle=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0$$

则G_1、G_2、G_3是量纲互相独立的物理量。

在上面例子中，长度、速度和能量三者是量纲互相独立的量，而长度、速度和加速度不是量纲互相独立量，因为：

	M	L	T
长度L	0	1	0
速度LT^{-1}	0	1	-1
能量ML^2T^{-2}	1	2	-2

$$\triangle=-1\neq 0$$

	M	L	T
长度L	0	1	0
速度LT^{-1}	0	1	-1
加速度LT^{-2}	0	1	-2

$$\triangle=0$$

π定理的严格证明较麻烦，这里仅给以直观的推理方式的说明。

假设含有n个物理量G_1、G_2、……G_n的函数中，k个物理量($k<n$)具有互相独立量纲，此函数式可写成为

$$F(G_1,\ G_2,\ \cdots\cdots,\ G_k,\ G_{k+1},\ \cdots G_n)=0 \qquad (1\text{-}4)$$

式中G_1，G_2，…，G_k，为具有互相独立量纲的物理量，而G_{k+1}，G_{k+2}，…G_n的量纲可用G_1，G_2，…G_k的量纲表示，即

$$\left.\begin{aligned}[G_{k+1}]&=[G_1]^{\alpha_1}[G_2]^{\alpha_2}\cdots\cdots[G_k]^{\alpha_k}\\ [G_{k+2}]&=[G_1]^{\beta_1}[G_2]^{\beta_2}\cdots\cdots[G_k]^{\beta_k}\\ &\vdots\\ [G_n]&=[G_1]^{\rho_1}[G_2]^{\rho_2}\cdots\cdots[G_k]^{\rho_k}\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}5)$$

式中$[G_i]$表示物理量G_i的量纲，各指数$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,\beta_1$，$\beta_2$，…，$\beta_k$，$\rho_1$，$\rho_2$，…，$\rho_k$等都是无量纲的数，也可等于0。例如具有独立量纲的量也可表示为

$$\begin{aligned}[G_1]&=[G_1]^1[G_2]^0\cdots[G_k]^0\\ [G_2]&=[G_1]^0[G_2]^1\cdots\cdots[G_k]^0\\ &\vdots\\ [G_k]&=[G_1]^0[G_2]^0\cdots\cdots[G_k]^1\end{aligned}$$

从式（1-5）可得

$$\frac{[G_{k+1}]}{[G_1]^{\alpha_1}[G_2]^{\alpha_2}\cdots\cdots[G_k]^{\alpha_k}}=1$$

$$\frac{[G_{k+2}]}{[G_1]^{\beta_1}[G_2]^{\beta_2}\cdots\cdots[G_k]^{\beta_k}}=1$$

$$\vdots$$

$$\frac{[G_n]}{[G_1]^{\rho_1}[G_2]^{\rho_2}\cdots\cdots[G_k]^{\rho_k}}=1$$

如果二物理量的量纲之比为1，则此二物理量之比就是无量纲数。这样式（1-4）中的物理量G_{k+1}，G_{k+2}，……G_n都用选出的具有独立量纲的物理量G_1，G_2，……G_k来表示，变成（$n-k$）个无量纲的数，称这些数为π数

$$\frac{G_{k+1}}{G_1^{\alpha_1}\cdot G_2^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdots\cdot G_k^{\alpha_k}}=\pi_1$$

$$\frac{G_{k+2}}{G_1^{\beta_1}\cdot G_2^{\beta_2}\cdot\cdots\cdots\cdot G_k^{\beta_k}}=\pi_2$$

$$\vdots$$

$$\frac{G_n}{G_1^{p_1}\cdot G_2^{p_2}\cdot\cdots\cdots\cdot G_k^{p_k}}=\pi_{n-k}$$

而所选出的具有独立量纲的量G_1，G_2，……G_k本身则不仅其量纲之比等于1，且其数值之比也等于1，即不仅

$$\frac{[G_1]}{[G_1]^1\cdot[G_2]^0\cdot\cdots\cdots\cdot[G_k]^0}=1$$

$$\vdots$$

$$\frac{[G_k]}{[G_1]^0\cdot[G_2]^0\cdot\cdots\cdots\cdot[G_k]^1}=1;$$

且

$$\frac{G_1}{G_1^1\cdot G_2^0\cdot\cdots\cdots\cdots\cdots\cdot G_k^0}=1$$

$$\vdots$$

$$\frac{G_k}{G_1^0\cdot G_2^0\cdot\cdots\cdots\cdots\cdots\cdot G_k^1}=1$$

经过以上转换，式（1-4）可写成

$$\varphi(\underbrace{1,\ 1,\ \cdots\cdots,\ 1}_{k项},\ \pi_1,\ \pi_2,\ \pi_{n-k})=0$$

或
$$\phi(\pi_1,\ \pi_2,\ \cdots\cdots\cdots,\ \pi_{n-k})=0 \qquad (1\text{-}6)$$

以上直观地说明了π定理，即物理量的方程$f(G_i)=0$可以转变为无量纲准数之间的函数$\phi[\pi_i]=0$。

这种关系式称为准数关系式，或准数方程式。式中准数称作π项。

当函数中有l个物理量x_1，x_2，…，x_l为无量纲参数(如摩擦系数μ、应变ε、以弧度计的角度φ等)时，则以上准数方程应表示为

$$\phi(\pi_1,\ \pi_2,\ \cdots\cdots\pi_{(n-k)},\ x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_l)=0$$

前面说过，一个完全物理方程的文字结构不随量度单位的选择而变，但各物理量的数值却随单位的选择而变。在准数方程式中各项都是无量纲π数，故其数值也不随单位的选择而变。

因为对于所有彼此相似的现象，相似准数都保持相同的数值，