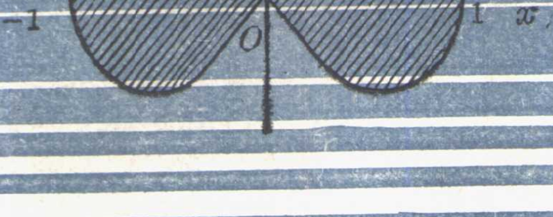
孙怀川 编著

WJF

微积分自学读本



内蒙古人民出版社

微积分自学读本

孙怀川　编著

内蒙古人民出版社

一九八四·呼和浩特

微积分自学读本

孙怀川　编著

*

内蒙古人民出版社出版
（呼和浩特市新城西街82号）
内蒙古新华书店发行　内蒙古新华印刷厂印刷
开本：850×1168 1/32　印张：25　字数：639千
1985年9月第一版　1985年11月第1次印刷
印数：1—2,500册
统一书号：7089·377　每册：4.30元

前　　言

数学是掌握科学技术的重要工具，要掌握近代科学技术，就必须具备高等数学知识。这本《微积分自学读本》正是为了适应广大职工、干部和知识青年的自学需要而编写的。本书通俗地、系统地讲述了微积分知识，全书共九章，分三个部分：第一部分为微积分引论。包括前三章，即函数、极限和函数的连续性。第二部分为一元函数的微积分。包括四章，即导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用。第三部分为多元函数的微积分。包括最后两章，即多元函数的微分学与重积分。

在编写本书时，考虑到适于自学，使读者在没有教师讲解和指导的情况下，能够看懂学会，在内容上注意到了科学知识的系统性、完整性和严格性，较多地联系到初等数学知识和实际问题；在讲述方法上，力图做到通俗易懂，重点突出，采用了由浅入深、深入浅出的讲述方法。由具体实例到抽象概括，进而引出定义、定理，并尽可能地用几何直观图形加以比拟说明。注意到了重点和难点及关键部分的细节讲述，安排了具有典型性的例题，抓住了解题分析这一重要环节，配置了必要的习题，并附有答案。书中安排了学习辅导内容，在每章的开头，概述了全章的主要内容，提出了“学习要求”；在每章的结尾有“自学指导”，指出了本章的重点和难点，并对各部分内容的学习方法做了具体的指导，最后安排了复习题和综合练习题，可作为检查学习情况的模拟测验试卷。读者在学习每一章时，应注意阅读“自学指导”的内容，认真做好必要的习题并写好学习笔记。

在编写本书的过程中，得到了很多同志的热情帮助和支持，哈尔滨师范大学数学分析教研室主任钱自强副教授、东北三省数学教学研究会副理事长颜秉海副教授审读了初稿，并提出了很多宝贵意见。吕正芹同志承担了本书全部稿件的誊清整理工作，吕正芹、王可芹和吴海清同志为本书绘制了插图。在此一并致谢。

著名数学家陈景润同志是广大自学青年、自学职工的良师好友，因此，他对这本自学用书的编写十分关心。在他夜以继日地猛攻数学难关的百忙之中，还抽出时间对本书的编写提出宝贵的建议，并做了具体的指导。当本书即将出版时，他还为本书题词，鼓励广大青年、广大职工立志自学成才，为祖国的四化建设大业多做贡献。这对于广大读者和作者本人都是极大的鼓舞。在此请允许作者代表广大自学青年、广大自学职工、广大读者和作者本人，向著名数学家陈景润同志表示衷心的感谢，并致以崇高的敬意。

本书可作为广大职工、干部和知识青年自学微积分的读物，也可供中学数学教师和大专院校理工科低年级学生作教学参考。

由于作者水平所限，书中缺点和错误在所难免，恳望读者批评指正。

作　者

一九八三年夏于哈尔滨

目　　录

第一章　函 数

函数是高等数学中的重要的基本概念，是微积分学中主要的研究对象，

学 习 要 求

1. 弄清常量与变量、实数与数轴、数集与区间等基本概念，掌握实数绝对值的运算方法。

2. 深刻理解函数的概念，掌握求函数定义域的方法。

3. 掌握函数的三种表示方法。

4. 掌握函数的奇偶性、增减性、有界性以及周期性等基本性质。

5. 理解反函数、隐函数及复合函数的概念。

6. 熟练地掌握六种基本初等函数的性质及其图形的特点。

第一节　函数的概念

一、常量与变量

由于函数的概念是建立在变量的基础之上，所以研究函数就必须搞清什么是常量，什么是变量。

1. 量的概念

在日常生活中和自然科学技术中，我们到处都可以遇到“量”的概念。例如，这块布有多少尺？这袋米有多少斤？这片地有多少亩？这池中的水有多少升？等等。这些长度、重量、面积、体积等等，都是量的概念。

量的形式有各种各样，但是它们都有一个共同的特点，这就是每一个量都可以用与它同类的单位量来度量。例如，长度可以用米、厘米等长度单位来度量；电流强度可以用安培、毫安等电流强度的单位来度量。因此，我们把可以用度量单位来度量的对象叫做量。度量的结果便得到了数。量是具体的，而数是抽象的。

需要说明的是，在数学中，并不研究具体的量，因为，数学的理论和方法，是要应用到种种本性不同的量上去的，所以，在陈述数学原理和方法时，必须抽去各种量的性质，而只考虑它们的数值。因而，在数学中所讨论的量和物理学、化学等学科中所讨论的量不同，在这里，量本身不含有什么物理的或化学的意义，是抽象的量，这就是所谓的**数学量**。对于这种抽象的数学量，我们通常用一个英文字母来表示它。

2. 常量与变量

数学量一般可分为两种，一种是常量，另一种是变量。

定义　在所研究的问题中，数值保持不变的量叫做**常量**；数值不断变化的量叫做**变量**。

常量通常用英文前面的几个字母 a，b，c，d，…… 等来表示；变量通常用后面的几个英文字母 u，v，w，x，y，z 等来表示。

例如，在同一个地点研究自由落体运动时，重力加速度就是常量；而时间、速度就是变量。

常量和变量并不是绝对的。

同一个量，在一种条件下可能是常量，而在另一种条件下，就可能是变量。常量和变量在一定的条件下可以相互转变。例如，重力加速度 g，对于同一个地点来说，它是一个常量；而对于不同的地区来说它则为一个变量了。又如，一条钢轨的长度，在没有摩擦的情况下，由于热胀冷缩而引起的钢轨的长度变化是很微小的，通常可以忽略不计，因而我们可以把它看做是一个常量；但是，在铺设钢轨时，就必须考虑到行车时因为摩擦而产生的热对钢轨长度的影响，这时候，钢轨长度的变化就不能忽略不计了，就要把钢轨的长度当作变量来研究。

二、实数与数轴

在本书中所研究的变量与常量的数值都是在实数的范围之内，因此，我们有必要简单地复习一下实数的基本知识。

1. 实　数

数是由于计算个数和量的测量而产生的。如果被度量的量恰好是单位量的整数倍，也就是说，如果被度量的量恰好可以被单位量所量尽，那么，所得到的数就是整数。如果量不尽，但是，存在着一个新的单位，而这个新的单位既能够量尽被度量的量，又能够量尽原来采用的单位量，那么，所得到的数就是分数。如果量不尽，而且又不存在这样一个新的单位量，这时，我们称被度量的量和原单位量之间是不可通约的，此时所得到的数就是无限不循环小数，我们把它叫做**无理数**。

我们把正整数、负整数、分数和零统称为**有理数**；它可以表示为$\frac{q}{p}$的形式。其中，p，q都是整数，而且$p\neq0$。

无理数在初等数学中遇到的很多，例如$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sin10°$，

π 等等，我们把有理数与无理数统称为实数。

2. 数 轴

实数与数轴之间是一一对应关系，由于用数轴可以表示实数，所以，研究实数就要掌握数轴的知识。

图 1·1

什么是数轴呢？规定了正方向、原点和单位长度的直线就是数轴。

在平面上，我们任取一个水平线 x（图1·1），并规定由左向右的方向为正，以箭头表示。在直线上任取一点 O 做为原点，在 O 点的右方任取一点 U，并规定 OU 为单位长 1，这样就构成了一个数轴。

这个数轴上的任意一点 A，都表示为一个实数。我们用单位量 OU 来度量 OA，就必然得到一个实数 a，我们把 a 叫做点 A 的坐标。如果点 A 在 O 点的右侧则为正实数；点 A 在 O 点的左侧则为负实数。反之，对于任何一个实数 a，在数轴上都有一个点 A 与它相对应，OA 被 OU 度量的结果为 a。如果 a 为正值时，A 点在 O 点的右侧；如果 a 为负值时，A 点就在 O 点的左侧了。

数轴上任何一个点都表示某一个实数；反之，任何一个实数必定是数轴上某一点的坐标。

有了数轴，研究数就方便多了，因为用数轴可以把很多抽象的数的概念，用直观的几何来表示和解释。这就使我们能够对数学概念理解得更深刻了。

三、数集与区间

1. 数 集

我们把适合于某一种条件的所有实数，叫做一个**数集**，通常

用大写的英文字母 A、B、C 等来表示。

数集A中的每一个数 x，叫做数集A的一个元素，并用 $x\in A$ 表示，读作 x 属于A。

例如，自然数的全体 1 ，2 ，3 ……组成一个数集；又如满足不等式 $0<x<1200$的一切实数 x 也组成一个数集。

2．区　间

我们把变量变化的范围叫做变域，常见的变域是“区间”．区间是指介于某两个实数之间的全体实数，那两个实数叫做区间的端点．区间可以看做是数轴上一“线段”上所有点的集．

区间可以分为无限区间与有限区间两大类，我们以两个不等式为例来说明．

① 有限区间

有限区间可分为：开区间、闭区间、半开半闭区间三种．

开区间

设 a、b 为两个实数，且 $a<b$ ．我们把满足不等式

$$a<x<b$$

的一切实数 x 的全体叫做开区间，用记号（a，b）表示。开区间（a，b）不包括 a，b 两个实数，如图1·2（1）．

闭区间

我们把满足不等式

$$a\leqslant x\leqslant b$$

的一切实数 x 的全体叫做闭区间，用记号〔a，b〕表示．闭区间〔a，b〕包括 a，b 两个实数，如图1·2（2）．

半开半闭区间

我们把满足不等式

$$a<x\leqslant b \quad 与 \quad a\leqslant x<b$$

的一切实数 x 的全体叫做半开半闭区间，分别用记号（a，b〕与〔a，b）表示，如图 1·2（3）（4）．

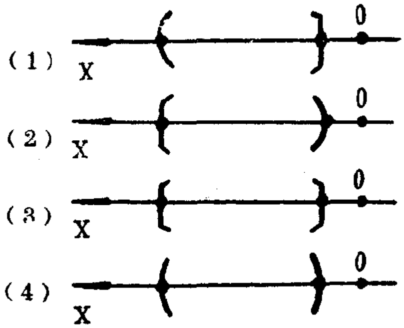


图 1·2

② 无限区间

无限区间具有五种，第一种是区间的两端都是无限的，即满足不等式

$$-\infty<x<+\infty$$

的全体实数，就是整个数轴，用记号 $(-\infty,\ +\infty)$ 来表示。

无限区间还有一种情况，就是区间的某一边有限制，而另一边没有限制。

左边没有限制，右边有限制，即满足于不等式

$$-\infty<x<b \quad 及 -\infty<x\leqslant b$$

的全体实数所构成的区间，分别用记号 $(-\infty,\ b)$ 与 $(-\infty,\ b]$ 来表示。

右边没有限制，左边有限制，即满足于不等式

$$a<x<+\infty \quad 及 \quad a\leqslant x<+\infty$$

的全体实数所构成的区间，分别用记号 $(a,\ +\infty)$ 与 $[a,\ +\infty)$ 来表示。

需注意，在这里，“∞”并不表示一个数，只是一个记号。

四、实数的绝对值

在研究函数的时候，经常要用到绝对值这个概念和运用绝对值进行计算。为此，在这里再介绍一下有关绝对值的基本知识。

1. 实数的绝对值

什么是某一实数的绝对值呢？设 a 是一个实数，那么，所谓 a 的绝对值，就是当 $a\geqslant 0$ 时为 a；而当 $a<0$ 时为 $-a$。采用符

号$|a|$表示实数a的绝对值．这样，由定义便得

$$|a|=\begin{cases} a & 当 \quad a\geqslant 0 \\ -a & 当 \quad a<0 \end{cases}$$

可见，任何实数的绝对值都总是正数或零，绝不能是负数。

例如，　$|2|=2$　　　$|-100|=100$

$|\sqrt{3}|=\sqrt{3}$　　　$|-\sqrt{5}|=\sqrt{5}$

从数轴上来看，实数a的绝对值就是从坐标原点0到a之间的距离．

由绝对值的定义可知，不等式

$$-|a|\leqslant a\leqslant |a|$$

成立。

这个不等式能成立是很容易理解的．因为，当$a>0$时，左边为负数，故左边不等号成立，而右边便取等号；当$a<0$时，右边为正数，故右边的不等号成立，而左边取等号；当$a=0$时，左右两边都取等号。

由绝对值的定义还可以得到下面的事实成立：

设$a>0$则

$$|x|\leqslant a \quad 同 \quad -a\leqslant x\leqslant a$$

是等价的。

这也很容易理解．因为当x在闭区间$[-a, a]$上变化时，它所取得的一切数值的绝对值都不会大于a，所以，$|x|\leqslant a$。反之，如果$|x|\leqslant a$，那么，实数x必定在闭区间$[-a, a]$上，x必定满足　$-a\leqslant x\leqslant a$，因此，$|x|\leqslant a$　与　$-a\leqslant x\leqslant a$等价．

例1　设$|x-b|<a$，求x的变化区间。

解　由$|x-b|<a$而得

$$-a<x-b<a$$

从而

$$b-a<x<b+a$$

因此可知x是在开区间$(b-a, b+a)$内变化。

2．绝对值的运算

下面来讲述关于绝对值运算的四个定理．

定理1　和的绝对值不大于各项绝对值之和．

即

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|$$

一般地　$|a+b+c+\cdots+k|\leqslant|a|+|b|+|c|+\cdots+|k|$．

证明　$\because$　$-|a|\leqslant a\leqslant|a|$

$-|b|\leqslant b\leqslant|b|$

两式相加，得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant(|a|+|b|)$$

而这个不等式与不等式

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|$$

是等价的．从而定理得证．对于一般情况可由数学归纳法推得．

定理2　差的绝对值不小于各项绝对值的差．

即

$$|a-b|\geqslant|a|-|b|$$

证明　$\because$　$|a|=|a-b+b|$

即　$|a|=|(a-b)+b|$

由定理1得

$$|(a-b)+b|\leqslant|a-b|+|b|$$

因而

$$|a|\leqslant|a-b|+|b|$$

两边各减$|b|$，得

$$|a|-|b|\leqslant|a-b|$$

即

$$|a-b|\geqslant|a|-|b|$$

从而定理得证．

定理3　乘积的绝对值等于各项绝对值的乘积．即

$$|abc\cdots k| = |a|\cdot|b|\cdot|c|\cdots|k|.$$

定理 4　商的绝对值等于被除数的绝对值与除数的绝对值之商。即

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

这两个定理的正确性很明显，证明从略。

五、函数的概念

1. 函数的定义

大家知道，任何事物的发展变化都不是孤立的，都是和它周围的事物相联系着的。它们之间往往是遵循着一定的规律而变化着的。变量与变量之间所确定的关系就是所说的函数关系，为了便于理解函数的概念，我们先举几个例子。

例如，在物理学中，自由落体的运动规律为

$$S = \frac{1}{2}gt^2$$

其中 S 为路程，g 为重力加速度（在同一地点为一常量），t 为时间。如果物体落到地面时所用的时间为 T，那么，对于每一个变量 $t\in[0, T]$，通过公式 $S = \frac{1}{2}gt^2$，都有一个完全确定的变量 S 值与之相对应。

又如，圆的面积公式为

$$A = \pi R^2.$$

其中，A 为圆的面积，R 为半径，这个公式表示了圆的面积 A 与圆的半径 R 之间的关系。对于每一个变量 $R\in(0, +\infty)$，通过公式 $A = \pi R^2$，都有一个确定的变量 A 值与之相对应。

再如，直线的方程为

$$y = kx + b.$$

其中，y 为直线上点的纵坐标，x 为横坐标，k 为直线的斜率，