图书在版编目（CIP）数据

高等数学/北京建筑工程学院数学教研室编 .—北京：中国建材工业出版社，2002.8

ISBN 7-80159-277-8

Ⅰ.高…　Ⅱ.北…　Ⅲ.高等数学—高等学校—教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 052290 号

内 容 提 要

全书共十章，包括极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程，空间解析几何与向量代数，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数。每章配有(A)、(B) 两组习题并附有习题答案。(A) 组为基本类型题，(B) 组是对 (A) 组的适当扩充与提高，以客观题为主。书后附有基本积分表，以备查用。

本书是工科专科高等数学通用教材，适合高等工科院校和成人高等教育的大专班、高职班及本科高等数学少学时的班级使用。也可供工程技术人员和具有高中水平的读者参考与自学

高等数学

北京建筑工程学院数学教研室编

中国建材工业出版社出版（北京海淀区三里河路 11 号）
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
北京丽源印刷厂印刷

开本：787×960　1/16　印张：27.125　字数：485 千字
2002 年 8 月第 1 版　2002 年 8 月第 1 次印刷
印数：1—4000 册　定价：38.00 元
ISBN 7-80159-277-8/G·051

前　　言

本书是根据原国家教委组织制订的高等数学课程教学基本要求、并参考全国高等教育自学考试指导委员会制订的理工类高等数学自学考试大纲编写的工科专科高等数学通用教材。在内容选择、结构体系及应用等方面，努力体现基础课为专业课服务的思想及适应培养技术应用型人才的知识能力的要求；努力体现专科的特点，力求贯彻少而精的原则。削减了次要内容和繁难的定理证明，注重几何直观，淡化演算技巧，突出了基本概念、基本方法和基本技能。并注意学生基本运算能力和运算方法的训练及理论联系实际能力的培养。语言表述力求条理清楚，通俗易懂，便于自学。

本书初稿曾在北京建筑工程学院的专科班、高职班、本科建筑学等高等数学少学时专业及夜大、分院使用多年，效果较好。近年来随着数学课程教学改革的深入开展，《高等数学》教材出版了不少，但适合工科高等院校的专科班、高职班及本科高等数学少学时班级使用的教材却仍少见。为了适应这一层次的教学需要，我们对初稿进行了认真的校对和修订，结合教学实践，重新编写了本教材。本书在保持初稿的结构体系的基础上，对内容作了适度的增删、修改与完善，扩大了适应面，增强了伸缩性，力求做到宽编窄用。各章配有（A）、（B）两组习题并附有习题答案。（A）组为基本类型题，（B）组是对（A）组的适当扩充与提高，以客观题为主。书中有些内容加了＊号，使用本书时可根据教学的需要和学时安排略去不讲。

本书由边果慧同志担任主编，刘长河同志对全书作了认真审核及修改，在此表示衷心感谢。同时也对曾经参加本书初稿编写的李友柏等同志及参与本书编写与出版的各位同志表示诚挚的谢意。

由于编者水平有限，书中的错误和不妥之处，敬请读者批评指正。

编　者

2002 年 3 月

目　　录

第一章　极限与连续

高等数学的重要基本理论和运算法则都是建立在极限理论的基础上的，掌握极限理论，是学好高等数学的前提. 本章在复习函数有关概念之后，着重介绍函数极限的基本理论和主要运算方法，并讨论函数的连续性.

§1.1　函　　数

一、函数概念

定义　设有变量 x 和 y，如果当变量 x 在其变化范围 D 内任意取定一个数值时，变量 y 按照一定法则总有确定的数值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作

$$y=f(x)$$

其中 x 叫自变量，y 叫因变量，D 叫函数的定义域.

为了深刻理解函数概念，作以下几点说明：

1. 函数 $y=f(x)$ 中的"f"表示变量 x 和 y 之间的对应法则，称为函数关系. 如果同时考察几个不同函数时，要用不同的字母来表示各自的函数关系，例如 $y=f(x)$，$y=g(x)$，$y=\varphi(x)$ 等等.

注意，$f(x)$ 是一个完整的函数记号，不可理解为 f 乘以 x，正如 $\tan x$ 不能理解为 tan 乘以 x 一样.

2. 函数 $y=f(x)$ 的定义域常用区间来表示. 确定函数定义域的一般原则是：

(1)在实际问题中，函数的定义域要根据问题的实际意义确定，例如正方形的面积 $y=x^2$，其定义域是 $(0,+\infty)$.

(2)由数学式子给出的函数，它的定义域就是使算式有意义的全体实数. 例如 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}+\arcsin x$ 的定义域是 $[-1,1)$.

3. 函数概念的两个要素是：函数关系与定义域. 两个函数只有当它们的函数关系与定义域完全相同时，才能认为是同一个函数. 如 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $\varphi(x)=x+1$，由于它们的定义域不同，故表示两个不同的函数.

4. 自变量 x 在定义域 D 内取定 x_0，函数 y 所对应的值叫函数 $y=f(x)$

在 x_0 点的函数值，记作 $f(x_0)$.

函数 $y=f(x)$ 的函数值的全体称为函数的值域：$W=\{y \mid y=f(x), x\in D\}$. 例如，函数 $y=\sin x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，其值域为 $[-1,1]$.

5. 函数的表示法通常有三种，即解析法、表格法和图示法. 本课程所讨论的函数一般都是用解析法表示，而且常常同时画出它的图形，以利对函数进行分析研究.

在自然科学及工程技术中，用解析式表示函数时，经常还会遇到在定义域的不同范围内用不同的式子表示的函数. 例如脉冲发生器产生的一个三角波（图 1-1），它的电压 u 与时间 t 的函数关系为

$$u=\begin{cases}\dfrac{3}{2}t, & 0\leqslant t\leqslant 10\\[2mm] 30-\dfrac{3}{2}t, & 10<t\leqslant 20\end{cases}$$

它表示了在不同时间范围内，电压变化的不同规律. 当 $t=2$ 时，$u=\dfrac{3}{2}\times 2=3$；当 $t=12$ 时，$u=30-\dfrac{3}{2}\times 12=12$. 又如符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

这种用几个式子分段表示的函数称为分段函数，它表示的是一个函数.

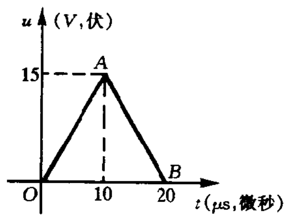


图 1-1

6. 如果自变量 x 在定义域中每取定一个值时，函数 y 都只有唯一确定的值与之对应，这种函数叫单值函数，否则叫多值函数. 对于多值函数，可以拆成若干个单值函数，其中每一个单值函数叫做该多值函数的一个单值支. 例如反三角函数 $y=\operatorname{Arc}\sin x$ 是多值函数，如将 y 限制在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上，它就是单值函数 $y=\arcsin x$. 以后如不特别说明，函数都是指单值函数.

7. 如果函数关系可以用含自变量的算式 $y=f(x)$ 表示，这样的函数叫显函数. 如果变量 x 和 y 的函数关系由方程

$$F(x,y)=0$$

来确定，这种函数称为由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数. 例如方程 $x^2+y^2=1$ 在 $[-1,1]$ 上确定了双值隐函数

$$y = \pm\sqrt{1-x^2}$$

二、函数的几种特性

1. 函数的单调性

定义 如果函数 $y=f(x)$ 对于区间 (a,b) 内的任意两点 x_1、x_2，且 $x_1<x_2$ 都有

$$f(x_1)<f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1)>f(x_2))$$

则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调增加(或单调减少).

在某一区间内单调增加或单调减少的函数统称为该区间内的单调函数，该区间叫函数的单调区间.

例如，$y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0]$ 内是单调减少的，在区间 $[0,+\infty)$ 内是单调增加的，但在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $y=x^2$ 不是单调函数.

单调增加函数的图形从左向右为上升的曲线，单调减少函数的图形从左向右为下降的曲线.

2. 函数的有界性

定义 如果函数 $y=f(x)$ 对于区间 (a,b) 内的一切 x 值，都有不等式

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，其中 M 是一个正常数，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有界. 如果这样的正数 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内无界.

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界函数，因为 x 取任何实数时，都有 $|\sin x|\leqslant 1$ 成立. 而函数 $y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内是无界函数，因为不存在正数 M，使 $|\tan x|\leqslant M$ 对于 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内的一切 x 值都成立，但是 $y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ 内是有界的，可取 $M=1$，对于区间 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ 内的一切 x 值，都有 $|\tan x|<1$ 成立.

有界函数的图形界于两条水平直线 $y=\pm M$ 之间.

3. 函数的奇偶性

定义 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $(-l,+l)$ 内有定义，如果对于 $(-l,+l)$ 内的一切 x，都有

$$f(-x)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对于 $(-l,+l)$ 内的一切 x，都有

$$f(-x)=-f(x)$$

成立,则称 $f(x)$为奇函数.

例如,$y=\sin x$ 是奇函数,$y=\cos x$ 是偶函数,而 $y=\sin x+\cos x$ 既非奇函数,也非偶函数.

奇函数的图形关于原点对称,偶函数的图形关于 y 轴对称.

4. 函数的周期性

定义 对于函数 $y=f(x)$,如果存在一个非零常数 T,对于定义域内的任何 x 值,都有

$$f(x+T)=f(x)$$

成立,则称 $f(x)$为周期函数,T 为函数的周期.通常周期函数的周期是指最小正周期.

显然,如果函数 $f(x)$以 T 为周期,则 $nT(n=\pm1,\pm2,\cdots)$都是该函数的周期.

例如,$y=\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数,$y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

对于周期为 T 的函数 $y=f(x)$,只要作出其一个周期(如$[0,T)$)上的图形,将该图形沿 x 轴向左、向右周期性地延拓出去,就可得到 $y=f(x)$的全部图形.

三、反函数及其图形

定义 设函数 $y=f(x)$的值域为 W,如果对于 W 中的每个 y 值,由关系式 $y=f(x)$都可确定出 x 值与之对应,这样就得到一个定义在 W 上以 y 为自变量、x 为因变量的函数 $x=\varphi(y)$,称它为 $y=f(x)$的反函数,记作 $x=f^{-1}(y)$,$y=f(x)$叫直接函数.

习惯上一般用 x 表示自变量,y 表示因变量,故 $x=f^{-1}(y)$可改写为 $y=f^{-1}(x)$,即 $y=f^{-1}(x)$为 $y=f(x)$的反函数.

例 1 求函数 $y=2x+3$ 的反函数

解 由关系式 $y=2x+3$ 中解出 x,得

$$x=\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}$$

将 x、y 互换,得 $y=2x+3$ 的反函数

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$$

例 2 求函数 $y=x^2-4$ 的反函数

解 由关系式 $y=x^2-4$ 中解出 x,得

$$x=\pm\sqrt{y+4}$$

将 x,y 互换，得 $y=x^2-4$ 的反函数

$$y=\pm\sqrt{x+4}$$

由例 2 可知，单值函数的反函数有可能是多值函数.

从几何上看，在 xOy 坐标系中函数 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 的图形是一样的，只是对于 $x=f^{-1}(y)$，纵坐标表示自变量，横坐标表示因变量. 将 $x=f^{-1}(y)$ 改写成 $y=f^{-1}(x)$ 后，这时仍以横坐标表示自变量，纵坐标表示因变量，函数 $y=f(x)$ 的图形与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称. 事实上，如果 (a,b) 是 $y=f(x)$ 图形上的点，那么 (b,a) 就是 $y=f^{-1}(x)$ 图形上的点，而点 (a,b) 与点 (b,a) 关于直线 $y=x$ 是对称的(如图 1-2).

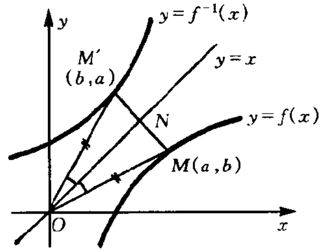


图 1-2

四、基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数. 常量作为函数时，也列入基本初等函数.

在中学数学里，对于这几类函数已作过较详细的介绍，这里只把它们的定义域、图形及主要性质列于表 1-1.

五、复合函数　初等函数

1. 复合函数

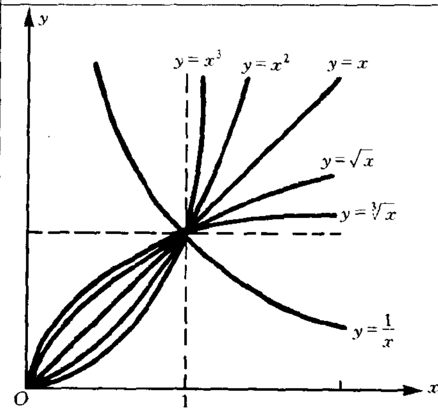
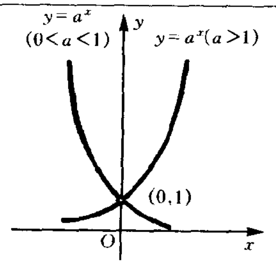
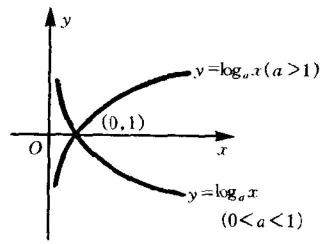
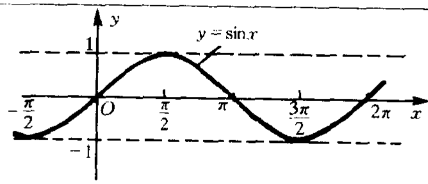
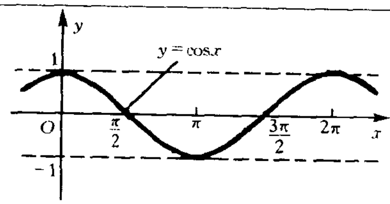
定义　设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的值域的全部或部分包含在 $f(u)$ 的定义域内，则通过变量 u，y 也是 x 的函数，称此函数是由 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称复合函数，记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

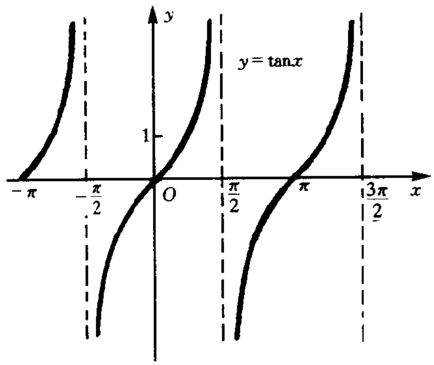
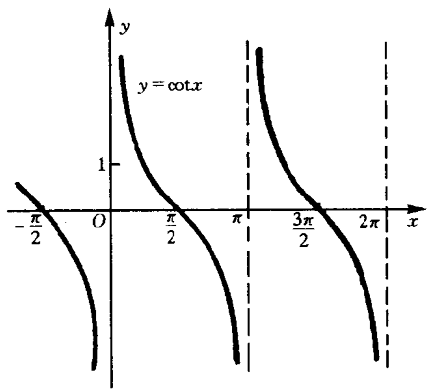
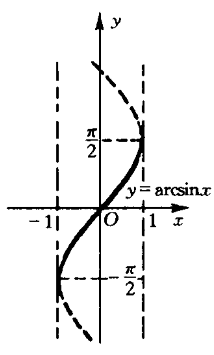
其中 u 叫中间变量.

复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域是使 $u=\varphi(x)$ 的函数值属于 $y=f(u)$ 的定义域的那些 x 值所组成的，通常只是 $u=\varphi(x)$ 的定义域的一部分. 例如，由函数 $y=3^u$ 及 $u=\sin x$ 复合而成的函数为 $y=3^{\sin x}$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 是 $u=\sin x$ 的定义域；而函数 $y=\arccos u$ 与 $u=\sqrt{1+2x}$ 复合而成的函数 $y=\arccos\sqrt{1+2x}$，其定义域为 $\left[-\frac{1}{2},0\right]$，只是 $u=\sqrt{1+2x}$ 的定义域的一部分.

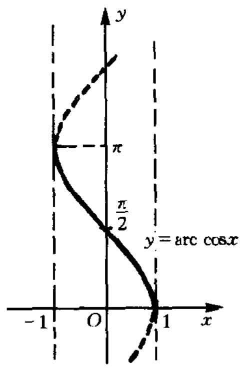
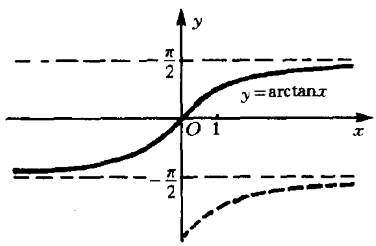
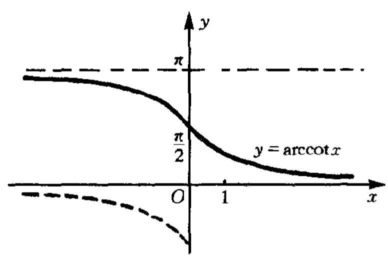
表 1-1

函数	定义域	图形	图形特点及主要性质
幂函数 $y=x^{\mu}$ (μ 为任意实数)	依 μ 的取值而定，但不论 μ 取何值，x^{μ} 在 $(0,+\infty)$ 内总有定义		经过(1,1)点；在第一象限内，当 $\mu>0$ 时，x^{μ} 为增函数；$\mu<0$ 时，x^{μ} 为减函数，$\mu=0$ 时为常数函数 $y=1$
指数函数 $y=a^x$ $(a>0, a\neq1)$ 以 $e=2.71828\cdots$ 为底的指数函数 $y=e^x$ 是工程技术中常用的函数	$(-\infty,+\infty)$		图形在 x 轴上方且通过(0,1)点 当 $a>1$ 时，a^x 为增函数；当 $0<a<1$ 时，a^x 为减函数
对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq1)$ 以 e 为底的对数函数叫作自然对数，记作 $y=\ln x$	$(0,+\infty)$		图形在 y 轴的右侧且通过(1,0)点 当 $a>1$ 时，$\log_a x$ 为增函数；当 $0<a<1$ 时，$\log_a x$ 为减函数
三角函数 正弦函数 $y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$		$\sin x$ 是以 2π 为周期的奇函数，且 $\|\sin x\|\leqslant1$ (图形界于直线 $y=\pm1$ 之间)，在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数
三角函数 余弦函数 $y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$		$\cos x$ 是以 2π 为周期的偶函数，且 $\|\cos x\|\leqslant1$ (图形界于直线 $y=\pm1$ 之间)，在 $[0,\pi]$ 上是减函数

续表

函数		定义域	图形	图形特点及主要性质
三角函数	正切函数 $y=\tan x$	$x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$		$\tan x$ 是以 π 为周期的奇函数，在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内是增函数
	余切函数 $y=\cot x$	$x\neq k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$		$\cot x$ 是以 π 为周期的奇函数，在 $(0,\pi)$ 内是减函数
反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$	$[-1,1]$		$\arcsin x$ 的值域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，是单调增加的奇函数

续表

<table>
<tr><th colspan="2">函 数</th><th>定 义 域</th><th>图 形</th><th>图形特点及主要性质</th></tr>
<tr><td rowspan="3">反三角函数</td><td>反余弦函数
$y = \arccos x$</td><td>$[-1,1]$</td><td>
</td><td>$\arccos x$ 的值域为$[0,\pi]$,是减函数</td></tr>
<tr><td>反正切函数
$y = \arctan x$</td><td>$(-\infty,+\infty)$</td><td>
</td><td>$\arctan x$ 的值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,是单调增加的奇函数</td></tr>
<tr><td>反余切函数
$y = \operatorname{arccot} x$</td><td>$(-\infty,+\infty)$</td><td>
</td><td>$\operatorname{arccot} x$ 的值域为$(0,\pi)$,是减函数</td></tr>
</table>

应当注意,不是任何两个函数都可以复合成复合函数的.例如 $y = \arcsin u$ 与 $u = 2 + x^2$ 就不能复合成复合函数,因为对于 $u = 2 + x^2$ 的定义域$(-\infty,+\infty)$内的任何 x 值,所对应的函数值 u 都大于等于 2,都不能使 $y = \arcsin u$ 有意义.

复合函数也可由两个以上的函数复合而成.例如 $y = \ln u$, $u = 1 + v$, $v = \sqrt{w}$, $w = 1 + x^2$ 复合而成的函数为 $y = \ln(1 + \sqrt{1 + x^2})$,其中 u、v、w 都是中间变量.

利用复合函数的概念,可以把一些较复杂的函数拆成几个简单函数,以便于对函数的研究和计算,所谓简单函数,即为基本初等函数或由基本初等函数经过有限次四则运算而构成的函数.例如函数 $y=\sqrt{1+\arctan\frac{x}{3}}$ 可以看作由 $y=\sqrt{u}$, $u=1+v$, $v=\arctan w$, $w=\frac{x}{3}$ 四个函数复合而成的函数.

2. 初等函数

定义 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成的,并可用一个解析式子表示的函数,叫做初等函数.

例如, $y=3^{\sin x}$, $y=\arccos\sqrt{1+2x}$, $y=\ln(1+\sqrt{1+x^2})$,
$y=\sqrt{1+\arctan\frac{x}{3}}$ 等都是初等函数;而

$$y=\begin{cases}\frac{3}{2}t, & 0\leqslant t\leqslant 10\\ 30-\frac{3}{2}t, & 10<t\leqslant 20\end{cases}$$

$$y=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

及 $y=x-\frac{x^3}{3\times 3!}+\frac{x^5}{5\times 5!}-\frac{x^7}{7\times 7!}+\cdots$ 都是非初等函数.而绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$,由于可表示为 $y=\sqrt{x^2}$,故它是初等函数.

3. 双曲函数

在工程技术中,常遇到一类初等函数——双曲函数,它是由指数函数 e^x 与 e^{-x} 构成的,其定义为

双曲正弦函数 $\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

双曲余弦函数 $\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

双曲正切函数 $\operatorname{th}x=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

它们的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$,图形如图 1-3 所示.其中, $\operatorname{sh}x$ 是单调增加的奇函数, $\operatorname{ch}x$ 是偶函数, $\operatorname{th}x$ 是单调增加的奇函数且 $|\operatorname{th}x|<1$.

由双曲函数的定义,可以推出与三角函数相类似的下列公式:

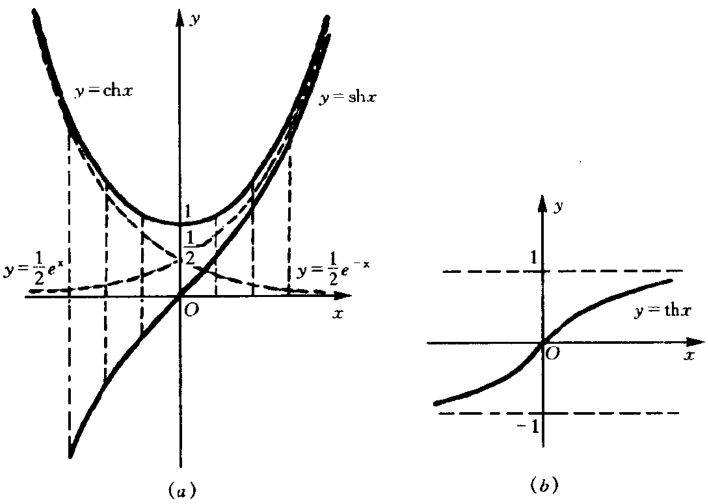


图 1-3

$$\operatorname{sh}(x_1 \pm x_2) = \operatorname{sh}x_1\operatorname{ch}x_2 \pm \operatorname{ch}x_1\operatorname{sh}x_2$$

$$\operatorname{ch}(x_1 \pm x_2) = \operatorname{ch}x_1\operatorname{ch}x_2 \pm \operatorname{sh}x_1\operatorname{sh}x_2$$

$$\operatorname{ch}^2x - \operatorname{sh}^2x = 1$$

$$\operatorname{sh}2x = 2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x$$

$$\operatorname{ch}2x = \operatorname{ch}^2x + \operatorname{sh}^2x$$

$$\operatorname{th}2x = \frac{2\operatorname{th}x}{1+\operatorname{th}^2x}$$

双曲函数 $y=\operatorname{sh}x$、$y=\operatorname{ch}x$、$y=\operatorname{th}x$ 的反函数叫反双曲函数,分别记作 $y=\operatorname{arsh}x$、$y=\operatorname{arch}x$、$y=\operatorname{arth}x$.

§1.2 数列的极限

极限是自变量在某一变化过程中,函数的变化趋势.

在各种类型的极限中,数列的极限最为简单.

一、数列及其简单性质

按照某一法则,顺序排列成的一串数

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

叫做数列,记作 $\{x_n\}$.数列中的每个数叫数列的项,第 n 项 x_n 叫一般项.

例如,

$$1,3,5,\cdots,2n-1,\cdots \tag{1}$$

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots \tag{2}$$

$$1,0,1,\cdots,\frac{1-(-1)^n}{2},\cdots \tag{3}$$

$$1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,(-1)^{n-1}\frac{1}{n},\cdots \tag{4}$$

$$\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\cdots,\frac{1}{3^n},\cdots \tag{5}$$

都是数列,它们的一般项分别为 $2n-1,\frac{n}{n+1},\frac{1-(-1)^n}{2},(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 和 $\frac{1}{3^n}$.

在几何上,数列 $\{x_n\}$ 可以用数轴上的一个有序点列来表示.

数列 $\{x_n\}$ 的一般项 x_n 可表示为

$$x_n=f(n)\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

这是一个定义域为正整数集的函数,叫做整标函数.因此,数列是一类特殊的函数.

作为特殊的函数,数列具有以下简单性质:

1. 数列的单调性①

对于数列 $\{x_n\}$,如果

$$x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant\cdots$$

则称数列 $\{x_n\}$ 是单调增加的;如果

$$x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant\cdots$$

则称数列 $\{x_n\}$ 是单调减少的.单调增加和单调减少数列,统称单调数列.

上面写出的数列(1)、(2)是单调增加的,数列(5)是单调减少的.

2. 数列的有界性

对于数列 $\{x_n\}$,如果存在正数 M,使得数列中的每项都满足

$$|x_n|\leqslant M\quad(n=1,2,\cdots)$$

则称数列 $\{x_n\}$ 是有界的,否则是无界的.

上面写出的数列(2)~(5)都是有界的,数列(1)是无界的.

二、数列的极限

研究一个数列,主要是考察当 n 无限增大(记作 $n\to+\infty$,简记为 $n\to\infty$)时,对应的 x_n 的变化趋势.

在数列(1)~(5)中容易看出,当 n 无限增大时,它们的变化趋势是不同的.其中数列(1),当 $n\to\infty$ 时,x_n 无限增大;数列(2)、(4)、(5),当 $n\to\infty$ 时,x_n 都无限地接近一个确定的常数$\Big(\frac{n}{n+1}$无限接近于常数 1;$(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 无限

① 这里所说的单调性是广义的,允许有"="成立,与函数的单调性有所不同.

接近于常数 0；$\frac{1}{3^n}$也无限接近于常数 0)；数列(3)，当 n 为奇数时，$x_n=1$，当 n 为偶数时，$x_n=0$，因此当 $n\to\infty$ 时，x_n 没有确定的趋向.

对于数列最重要的是在其变化过程中，x_n 无限接近于某一确定常数的那种渐趋稳定的状态，这时称数列 $\{x_n\}$ 具有极限. 如果在变化过程中，$|x_n|$ 无限变大或没有确定的趋向，则称数列 $\{x_n\}$ 没有极限. 下面给出数列极限的描述性定义：

定义　给定数列 $\{x_n\}$，如果当 n 无限增大时，x_n 的值无限接近于一个确定常数 a，则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad 或 \quad x_n\to a\,(n\to\infty)$$

否则，称数列 $\{x_n\}$ 是发散的.

上面的数列(2)、(4)、(5)是收敛的，而数列(1)、(3)是发散的.

在数列极限定义中，所谓当 $n\to\infty$ 时，x_n 无限接近常数 a，在数轴上表示为当 n 越大，点 x_n 与点 a 越接近，即 $|x_n-a|$ 越小，当 n 无限增大时，$|x_n-a|$ 无限地变小. 刻划 n 无限增大时，$|x_n-a|$ 无限变小这一特性，可以用如下数学语言：对于任意给定的正数 ε（无论多么小），只要 n 足够大，都有 $|x_n-a|<\varepsilon$. 所谓 n 足够大，就是可以找到项数 N，在该项以后的一切项，即 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立. 下面是数列极限的精确定义：

定义　如果对于任意给定的正数 ε（无论多么小），总存在正整数 N，使得对于 $n>N$ 的一切 x_n，不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

都成立，则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限（或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a），记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

数列极限的几何解释：

将数列 $\{x_n\}$ 的各项及常数 a 用数轴上的对应点表示. 因 $|x_n-a|<\varepsilon$ 相当于 $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$，所以数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限的几何意义就是对于任意给定的正数 ε，必能找到相应的项数 N，使得从第 $N+1$ 项开始，后面所有的项对应的点都落在以 a 为中心、以 ε 为半径的开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内（如图 1-4）.

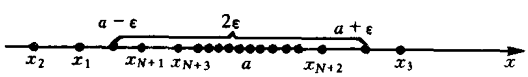


图 1-4

通常称开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 为点 a 的 ε 邻域，其中点 a 叫邻域的中心，ε 叫邻域的半径. 因此数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的几何意义也可说成：对于任意给定的正数 ε，总能找到正整数 N，数