



普通高等工科教育机电类规划教材

自动控制原理

湘潭工学院 刘祖润 主编
南京机械高等专科学校 黄坚 副主编

13
33

机械工业出版社

993272

普通高等工科教育机电类规划教材

自动控制原理

主 编 刘祖润

副主编 黄 坚

参 编 卢秉娟 李晓秀 王思聪

主 审 李仁发

机械工业出版社

本书是根据全国高等工科大学电气工程类专业“自动控制原理”课程教学大纲的要求编写的。全书从高等工程教育对人才的培养目标出发,讨论了经典控制理论的基本概念、基本原理和基本方法,着重加强对基本理论及其应用的阐述。内容包括:自动控制与自动控制系统的一般概念;控制系统的数学模型;控制系统的时域分析法、根轨迹法和频率特性法;系统的校正方法;线性采样系统的基本原理和性能分析等。

全书以工程技术应用能力的培养为主线组织教学内容;注重物理概念,强化工程应用;突出重点,精简繁琐推演;加强理论联系实际与适应性,富有工程性;叙述上深入浅出,条理清晰。全书有较多示例和习题,每章均有小结,有助于对基本概念的理解与基本方法的运用,以利于巩固基础知识和训练提高分析与解决实际问题的能力。

本书可作为高等工科大学工业自动化、电气技术、机械、动力、冶金等专业的教材或教学参考书,也适用于职工大学、函授大学的相近专业,并可供有关专业师生及从事自动化方面工作的工程技术人员参考。

自动控制原理

湘潭工学院 刘祖润 主编

南京机械高等专科学校 黄坚 副主编

*

责任编辑:王小东 版式设计:张世琴

封面设计:姚毅 责任校对:孙志筠

责任印制:路琳

*

机械工业出版社出版(北京市百万庄大街22号)

邮政编码:100037

(北京市书刊出版业营业许可证出字第117号)

中国建筑工业出版社密云印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 787×1092¹/₁₆·印张 13.25·字数 321千字

1998年10月第1版 第1次印刷

印数 0001—8000册 定价:17.50元

*

ISBN 7-111-06109-8/TP·668(课)

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

前 言

本书是根据 1996 年 6 月全国高等工科学学校电气工程类专业教学指导委员会威海会议审定并通过的教学计划、教学大纲和同年 12 月《自动控制原理》教材编写会议制订的教材编写大纲,由该委员会组织编写的机电类规划教材。

在现代科学技术的诸多领域中,自动控制技术起着越来越重要的作用。自动控制技术的广泛应用,有效地提高了产品的质量和劳动生产率,改善了劳动条件。它已渗透到国民经济的各部门以及人们日常生活的许多方面,成为现代社会活动中不可缺少的重要组成部分。自动控制原理是研究自动控制一般规律的技术科学,是自动控制技术的理论基础。按其发展的不同阶段,可分为经典控制理论和现代控制理论,并且正向以控制论、信息论、仿生学为基础的智能控制理论深入发展。基于后续课程和工程实践的需要,本书讨论了经典控制理论的基本概念、基本原理和基本方法,着重加强基本理论及应用的阐述。内容包括自动控制与自动控制系统的一般概念,控制系统的数学模型,控制系统的时域分析法、根轨迹法和频率特性法,控制系统的校正方法,线性采样系统的基本原理和性能分析等。本书对培养辩证思维能力,进一步学习专业知识和提高工程实践应用能力,具有重要的作用。

本书从高等工程教育对人才的培养目标出发,总结了编者多年来讲授本课程的经验。力求以工程技术应用能力的培养为主线组织教学内容;突出重点,精简篇幅;注重物理概念,强化工程应用,减少繁琐数学推演;加强理论联系实际,增强适应性;结合实例,联系专业,富有工程性;体现专科特色,适合专科教学。内容编排上条理明晰、层次分明、言简意赅,便于自学;选编了较多示例和习题,每章均有小结,有助于对基本概念的理解与基本方法的运用,以利于巩固基础知识和训练提高定性分析能力、定量估算能力、数-形结合能力与解决实际问题的能力。

本教材可作为高等工科院校电气工程类各专业,特别是工业自动化、电气技术、机电一体化等专业的教学用书,也适用于职工大学、函授大学的相近专业,并可供有关专业师生和工程技术人员参考。

本书由刘祖润主编,黄坚任副主编。参加本书编写的有黄坚(第一、七章),卢秉娟(第二章),李晓秀(第三章),王思聪(第四章),其余章节由刘祖润编写,并负责全书统稿。

全书由李仁发教授主审。张永丰、姜泓教授对本书的编写提出了很多指导性的意见;刘建勋、邹阿金、曹晓波、柳树林等参加了审稿;许多同行曾给予热情的支持和帮助,提出过不少宝贵的修改意见。在此一并致以诚挚的感谢。

限于作者水平,书中错误与不妥之处在所难免,敬请读者不吝指正。

编 者

1997 年 11 月

EAB14/06

目 录

前言		习题	86
第一章 概述	1	第五章 控制系统的频率特性法	88
第一节 自动控制与自动控制系统	1	第一节 频率特性	88
第二节 自动控制系统的分类	3	第二节 典型环节的频率特性	93
第三节 对控制系统的性能要求	3	第三节 控制系统开环频率特性	101
第四节 自动控制理论发展简述	5	第四节 系统开环频率特性与闭环系统的稳定性	108
小结	5	第五节 控制系统时域性能和开环频率特性的关系	117
习题	6	第六节 根据系统闭环频率特性分析系统的动态性能	125
第二章 控制系统的数学模型	7	小结	129
第一节 控制系统的微分方程	7	习题	130
第二节 传递函数	13	第六章 控制系统的校正方法	136
第三节 典型环节的传递函数及其动态响应	14	第一节 系统校正的一般概念	136
第四节 控制系统的动态结构图	21	第二节 常用校正装置及其特性	137
第五节 反馈控制系统的传递函数	33	第三节 串联校正	143
小结	35	第四节 反馈校正	159
习题	35	第五节 恒值系统的校正	161
第三章 控制系统的时域分析法	40	小结	166
第一节 控制系统的典型输入信号和时域性能指标	40	习题	167
第二节 一阶系统分析	42	第七章 采样控制系统分析	171
第三节 二阶系统分析	43	第一节 采样控制系统的基本概念	171
第四节 高阶系统分析	52	第二节 采样控制系统的数学基础	176
第五节 控制系统的稳定性分析	52	第三节 采样控制系统的脉冲传递函数	184
第六节 控制系统的稳态误差计算	56	第四节 采样控制系统的动态性能分析	190
第七节 控制系统综合分析示例	63	第五节 采样控制系统的稳定性分析	195
小结	65	第六节 采样控制系统的稳态误差	198
习题	66	小结	201
第四章 控制系统的根轨迹法	71	习题	201
第一节 根轨迹的基本概念	71	附录 常用函数的拉氏变换与 Z 变换对照表	204
第二节 绘制根轨迹的基本法则	73	参考文献	206
第三节 控制系统性能的根轨迹法分析	80		
小结	86		

第一章 概 述

本章将简要介绍有关自动控制的一般概念、自动控制系统的组成和分类、对控制系统的基本要求以及有关自动控制原理的基本情况。

第一节 自动控制与自动控制系统

一、自动控制的基本概念

在现代科学技术的许多领域中,自动控制技术得到了广泛的应用。所谓自动控制,是指在无人直接参与的情况下,利用控制装置操纵受控对象,使被控量等于给定值,见图 1-1。

其中,控制装置和受控对象为机械装置,而给定值和被控量均为一定形式的物理量。下面举例加以说明。

例 1-1 水温控制系统(见图 1-2)。



图 1-1 自动控制示意图

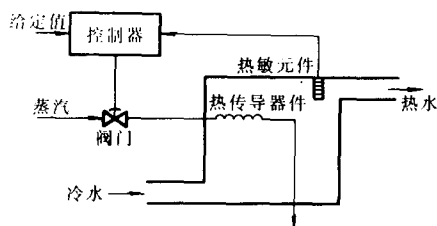


图 1-2 水温控制系统

这里,受控对象为水箱,具体地说,是水箱中的水。控制装置包括热敏元件(主要用来测量水温)、控制器(主要作用为比较给定值和检测值,并进行计算,得到控制阀门开度的控制量)和阀门(作用为执行控制器发出的控制命令)。被控量为水温,它是表征受控对象物理特征的物理量。而给定值为要求达到的水温值,它可以是与该水温值对应的不同形式的物理量。

该控制系统的工作原理为水箱中流入的为冷水,热蒸汽经阀门并流经热传导器件,通过热传导作用将冷水加热,加热后的水流出水箱。若由于某种原因,水箱中的水温低于给定值所要求的水温,则热敏元件将检测到的水温值转换成一定形式的物理量之后,馈送给控制器,控制器将给定值和检测值比较计算之后,发出控制信号,将阀门的开度增加,使更多的热蒸汽流入,直至实际水温与给定值相符为止。反过来,当水温偏高时也可进行相应的调节。这样,就实现了没有人直接参与的自动水温控制。

二、自动控制系统的基本构成及控制方式

自动控制系统一般有两种基本结构,对应着两种基本控制方式。

1. 开环控制 控制装置与受控对象之间只有顺向作用而无反向联系时,称为开环控制,见图 1-3。

例 1-2 简单的电动机转速控制系统(见图 1-4)。

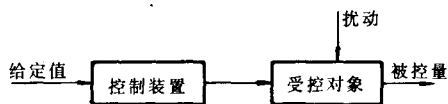


图 1-3 开环控制系统

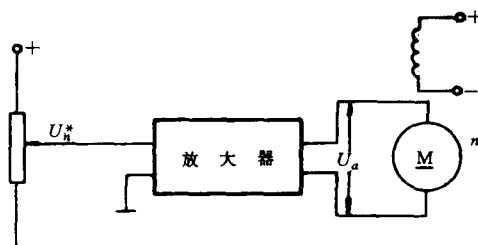


图 1-4 开环控制的调速系统

本例中,受控对象为电动机,控制装置为电位器、放大器。当改变给定电压 U_n^* 时,经放大器放大后的电压 U_a 随之变化,作为被控量的电动机转速 n 亦随之变化。就是说,系统正常工作时,应由 U_n^* 来确定 n 。

若由于电网电压的波动,或负载的改变等扰动量的影响使得转速 n 发生变化,而这种变化未能被反馈至控制装置并影响控制过程,故系统无法克服由此产生的偏差。

开环控制的特点是,系统结构和控制过程均很简单,但抗扰能力差,控制精度不高,故一般只能用于对控制性能要求较低的场合。

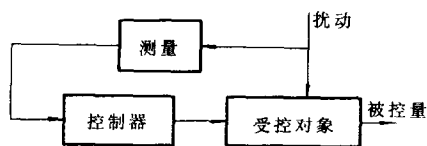


图 1-5 按扰动补偿的控制方式

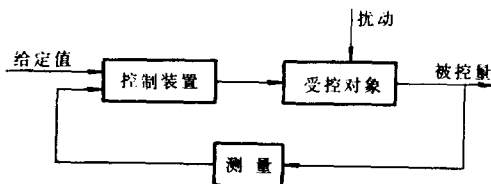


图 1-6 闭环控制系统

如果扰动能被检测出来,则可采用按扰动补偿的控制方式,见图 1-5。其基本原理是,将扰动测量出来送入控制器,以形成与扰动作用相反的控制量,该控制量与扰动共同作用的结果,使被控量基本不受扰动影响。这里,由于被控量对控制过程无影响,故仍属开环控制。

2. 闭环控制 控制装置与受控对象之间,不但有顺向作用,而且还有反向联系,即有被控量对控制过程的影响,这种控制称为闭环控制,其控制系统称为闭环控制系统(见图 1-6)。

闭环控制又常称为反馈控制或按偏差控制。

例 1-3 采用转速负反馈的直流电动机调速系统(见图 1-7)。

这里与上述开环控制系统不同的是,增加了作为测量装置的测速发电机以及分压电位器。电动机的转速 n 被其转换成反馈电压 U_n ,并反馈至输入端,形成闭合环路。加在放大器输入端的电动势 e 为给定电压 U_n^* 与 U_n 的差值,即 $e = U_n^* - U_n$ 。

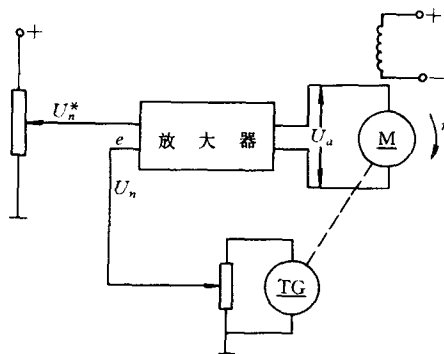


图 1-7 闭环控制的调速系统

此闭环控制系统中,输出转速 n 取决于给定电压 U_n^* 。但是对于电网电压波动,负载变化以及除测量装置之外的其它部分的参数变化所引起的转速变化,可以通过自动调整加以抑制。例如,如果由于以上原因使得转速下降($n \downarrow$),将通过以下的调节过程使 n 基本维持恒定。

$$n \downarrow \rightarrow U_n \downarrow \rightarrow e \uparrow \rightarrow U_a \uparrow \rightarrow n \uparrow$$

显然,闭环控制的特点是,能减小或消除由于扰动所形成的被控量的偏差值,因而具有较高的控制精度和较强的抗扰能力。但若设计调试不当,易产生振荡甚至不能正常工作。自动控制原理中所讨论的系统主要是闭环控制系统。

另外,也可将闭环控制与按扰动补偿控制相结合,形成复合控制。

第二节 自动控制系统的分类

自动控制系统的分类方法较多,常见的有以下几种。

一、线性系统和非线性系统

若一个元件的输入与输出的关系曲线为直线,则称该元件为线性元件,否则称为非线性元件。若一个系统中所有的元器件均为线性元器件,则该系统称为线性系统;若系统中有一个非线性元器件,则该系统称为非线性系统。线性系统的数学模型为线性微分方程或差分方程,即其各项系数均不随变量的改变而变化。

二、定常系统和时变系统

从系统的数学模型来看,若微分方程的系数不是时间变量的函数,则称此类系统为定常系统,否则称为时变系统。

若系统微分方程的系数为常数,则称之为线性定常系统。此类系统为本书主要讨论对象。

三、连续系统、离散系统和采样系统

从系统中的信号来看,若系统各部分的信号都是时间的连续函数即模拟量,则称此系统为连续系统。若系统中有一处或多处信号为时间的离散函数,如脉冲或数码信号,则称之为离散系统。若系统中所有信号均为离散信号,则称之为纯离散系统。若系统中既有模拟量也有离散信号,则称之为采样系统。

四、恒值系统、随动系统和程序控制系统

若系统的给定值为一定值,而控制任务就是克服扰动,使被控量保持恒值,此类系统称为恒值系统。例如,电机速度控制、恒温、恒压、水位控制等。若系统给定值按照事先不知道的时间函数变化,并要求被控量跟随给定值变化,则此类系统称为随动系统。如火炮自动跟踪系统、轮舵位置控制系统等。

若系统的给定值按照一定的时间函数变化,并要求被控量随之变化,则此类系统称为程序控制系统。例如数控伺服系统以及一些自动化生产线等。

此外,根据系统元部件的类型,还可分为机电控制系统、液压控制系统、气动系统以及生物系统等。根据系统的主要目的,可分为位置控制系统、速度控制系统、温度控制系统等。

第三节 对控制系统的性能要求

一个理想的控制系统,在其控制过程中始终应使被控量等于给定值。但是,由于机械部分

质量、惯量的存在,电路中储能元件的存在以及能源功率的限制,使得运动部件的加速度受到限制,其速度和位置难以瞬时变化。所以,当给定变化时,被控量不可能立即等于给定值,而需要经过一个过渡过程,即动态过程。所谓动态过程就是指系统受到外加信号(给定值或扰动)作用后,被控量随时间变化的全过程。

由动态过程可以反映出系统内在性能的好坏,而常见的评价系统优劣的性能指标也是从动态过程中定义出来的。对系统性能的基本要求有三个方面。

一、稳定性

稳定性是这样来表述的:系统受到外作用后,其动态过程的振荡倾向和系统恢复平衡的能力。

如果系统受到外作用后,经过一段时间,其被控量可以达到某一稳定状态,则称系统是稳定的,见图 1-8;否则称为不稳定,见图 1-9。

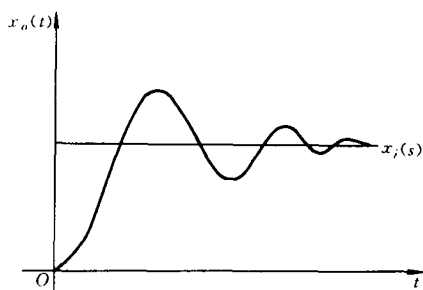


图 1-8 稳定系统的动态过程

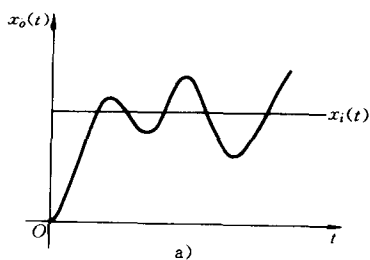


图 1-9 不稳定系统的动态过程

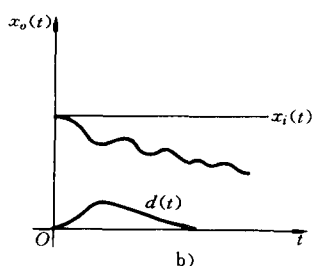


图 1-9a 为在给定信号作用下,被控量振荡发散的情况;图 b 所示为受扰动作用后,被控量不能恢复平衡的情况。另外,若系统出现等幅振荡,即处于临界稳定的状态,也属于不稳定。

不稳定的系统是无法正常工作的。即使系统有重新恢复平衡的能力,动态过程中的振荡也不能太大,否则将导致系统部件的松动和被破坏。

二、快速性

快速性是通过动态过程时间长短来表征的,见图 1-10。过渡过程时间越短,表明快速性越好,反之亦然。快速性表明了系统输出对输入的响应的快慢程度。系统响应越快,则动态精度越高,复现快变信号的能力越强。

三、准确性

准确性是由输入给定值与输出响应的终值之间的差值大小来表征的,见图 1-11。它反映了系统的稳态精度。

若系统的最终误差为零,则称为无差系统,否则称为有差系统。稳定性、快速性和准确性往往是互相制约的。求稳有可能引起反应迟缓、精度低;求快则可能加剧振荡,甚至引起不稳定。

怎样根据工作任务的不同,分析和设计自控系统,使其对三方面的性能有所侧重,并兼顾其它,以达到要求,正是自控原理及其后续课程要解决的问题。

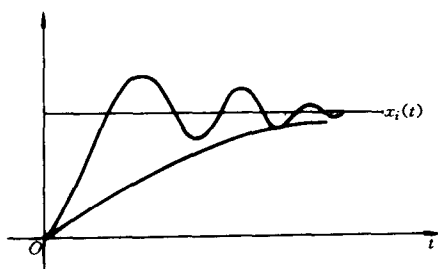


图 1-10 控制系统的快速性

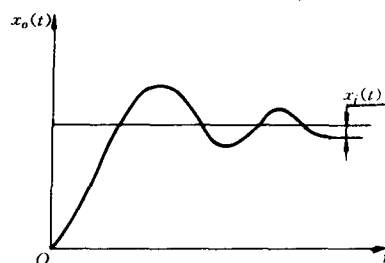


图 1-11 控制系统的稳态精度

第四节 自动控制理论发展简述

自动控制理论研究的是如何按受控对象和环境特征,通过能动地采集和运用信息,施加控制作用,使系统在变化或不确定的条件下正常运行并具有预定功能。它是研究自动控制共同规律的技术科学,其主要内容涉及受控对象、环境特征、控制目标和控制手段以及它们之间的相互作用。

具有“自动”功能的装置自古有之,瓦特发明的蒸汽机上的离心调速器是比较自觉地运用反馈原理进行设计并取得成功的首例。麦克斯韦对它的稳定性进行分析,于1868年发表的论文当属最早的理论工作。从20世纪20年代到40年代,形成了以时域法、频率法和根轨迹法为支柱的“古典”控制理论。60年代以来,随着计算机技术的发展和航天等高科技的推动,又产生了基于状态空间模型的所谓“现代”控制理论。

随着自动化技术的发展,人们力求使设计的控制系统达到最优的性能指标,为了使系统在一定的约束条件下,其某项性能指标达到最优而实行的控制称为最优控制。

当对象或环境特性变化时,为了使系统能自行调节,以跟踪这种变化并保持良好的品质,又出现了自适应控制。

尽管出现的各种理论都精辟而透彻,但实践中,常常发现仍是古典频域法最为适用。究其原因,在于复杂理论所基于的精确模型难以得到。真正优良的设计必须允许模型的结构和参数不精确并可能在一定范围内变化,即具有鲁棒性。这是当前的重要前沿课题之一。另外,使理论实用化的一个重要途径就是数学模拟(仿真)和计算机辅助设计(CAD)。

前面谈到的主要是针对线性系统的线性理论。近年来,在非线性系统理论、离散事件系统、大系统和复杂系统理论等方面均有不同程度的发展。智能控制在实用方面也得到了很快的发展,它主要包括专家系统、模糊控制和人工神经网络等内容。

总之,自动控制理论正随着技术和生产的发展而不断发展,而它反过来又成为高新技术发展的重要理论根据。本书所介绍的内容是该理论中最基本也是最重要的内容,即古典控制理论部分。它在工程实践中用得最多,也是进一步学习自动控制理论的基础。

小 结

(1) 自动控制就是在没有人直接参与的情况下,利用控制装置操纵受控对象,使被控量等

于给定值。

(2) 自动控制的基本方式有开环控制和闭环控制两种。开环控制实行起来简单,但抗扰动能力较差,控制精度也不高。自动控制原理中主要讨论闭环控制方式,其主要特点是抗扰动能力强,控制精度高,但存在能否正常工作,即稳定与否的问题。

(3) 可根据需要,将自动控制系统按照不同的分类方法进行归类。

(4) 一般地,可从稳(能否正常工作)、快(快速响应能力)、准(控制精度)等几方面的性能来评价自动控制系统。而这几方面的性能往往是互相制约的,因而需根据不同的工作任务来分析和设计自控系统,使其在满足主要性能要求的同时,兼顾其它性能。

(5) 自动控制理论是分析和设计自动控制系统的理论基础,大致可分为古典控制理论和现代控制理论两大部分,本书主要介绍古典控制理论。随着生产技术的不断更新和发展,自控理论也在不断发展,了解这方面的情况,对于学习和掌握好自动控制技术也是必要的。

习 题

1-1 试阐述下列概念并举例说明:

自动控制;控制装置与受控对象;给定值与被控量;开环控制与闭环控制;线性系统与非线性系统;连续系统与采样系统;恒值系统与随动系统;稳定性、快速性和准确性。

1-2 试列举开环控制和闭环控制的例子,并说明其工作原理。

1-3 直流发电机电压控制系统如图 1-12 所示,图 a 为开环控制,图 b 为闭环控制。发电机电动势与原动机转速成正比,同时与励磁电流成正比。当负载变化时,由于发电机电枢内阻上电压降的变化,会引起输出电压的波动。

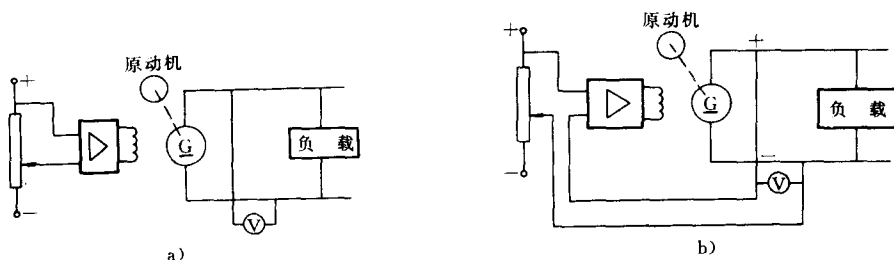


图 1-12 题 1-3 图

(1) 试说明开环控制的工作原理,并分析原动机转速的波动和负载的变化对发电机输出电压的影响。

(2) 试分析闭环控制的控制过程,并与开环控制进行比较,说明负反馈的作用。

第二章 控制系统的数学模型

我们已经知道,自动控制系统是由控制对象、执行机构、放大器、检测装置和控制器等组成的。在进行系统的分析和设计中,了解这些元部件的工作原理及运动过程是非常重要的,但要更深入地研究系统的动态特性,要做的首要工作就是建立控制系统的数学模型。

描述系统在动态过程中各物理量之间相互关系的数学表达式,称为系统的数学模型。

在控制系统中,输入和扰动往往随时间改变,因此,系统中的变量都和时间有关,故系统的数学模型通常是以时间为自变量的动态模型。前一章介绍了控制系统的类型,由于实际系统的种类各异,故描述系统的数学模型亦有不同的分类。本书讨论所涉及的数学模型主要是线性的、非时变的确定性模型,即线性定常系统。

建立控制系统数学模型的方法有分析法和实验法。分析法是对系统各部分的运动机理进行分析,根据它们所依据的物理规律和化学规律分别列写相应的运动方程,例如电学中的基尔霍夫定律,力学中的牛顿定律等。当然和模型有关的因素很多,在建立模型时不可能也不必把一些非主要因素都囊括进去而使模型过于复杂,应根据实际,建立关于系统某一方面属性的描述。实验法是人为地给系统施加某种测试信号记录其响应,并用适当的数学模型去逼近,这种方法称为系统辨识。本章只研究用分析法建立线性定常系统数学模型的方法。

作为线性定常系统,其数学模型可用微分方程、传递函数、动态结构图和频率特性几种形式描述。本章介绍微分方程、传递函数和动态结构图模型,频率特性模型在第五章中讨论。

第一节 控制系统的微分方程

一、系统动态微分方程的建立

微分方程是描述自动控制系统动态特性的最基本方法。一个完整的控制系统通常是由若干元器件或环节以一定方式连接而成的,系统可以由一个环节组成的小系统,也可以是由多个环节组成的大系统。对系统中每个具体的元器件或环节按照其运动规律可以比较容易地列出其微分方程,然后将这些微分方程联立起来,以求出整个系统的微分方程。列写系统微分方程的一般步骤是:

- (1)根据实际工作情况,确定系统或各元器件的输入变量和输出变量。
- (2)从输入端开始,按照信号传递的顺序和各元器件所遵循的规律,列写相应的微分方程。
- (3)消去中间变量,得到系统的输出量与输入量之间关系的微分方程。一般情况下,将微分方程写成标准形式,即与输出量有关的项写在方程的左端,与输入量有关的项写在方程的右端,方程两端变量的导数项均按降幂排列。

下面举例说明控制系统中常用的电气元器件、力学元件等微分方程的列写方法。

例 2-1 图 2-1 所示的 RLC 串联电路,设输入量为 $u_1(t)$,输出量为 $u_2(t)$,试列写其微分方程。

解 根据基尔霍夫定律和元件电流与电压的关系有

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + u_2(t) = u_1(t)$$

$$i(t) = C \frac{du_2(t)}{dt}$$

消去中间变量 $i(t)$, 可得

$$LC \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} + RC \frac{du_2(t)}{dt} + u_2(t) = u_1(t)$$

令 $T_l = L/R$, $T_c = RC$ 均为时间常数, 则上式又可写为

$$T_l T_c \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} + T_c \frac{du_2(t)}{dt} + u_2(t) = u_1(t) \quad (2-1)$$

可见, RLC 无源网络的动态数学模型是一个二阶常系数线性微分方程。

例 2-2 设有一个由弹簧、物体和阻尼器组成的机械系统如图 2-2 所示, 设外作用力 $F(t)$ 为输入量, 位移 $y(t)$ 为输出量, 列写机械位移系统的微分方程。

解 根据牛顿第二定律可得

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = F(t) - F_B(t) - F_K(t) \quad (2-2)$$

式中 m ——物体的质量;

$F_B(t)$ ——阻尼器粘性阻力;

$F_K(t)$ ——弹簧的弹性力。

$F_B(t)$ 与物体运动速度成正比, 即

$$F_B(t) = f \frac{dy(t)}{dt}$$

式中 f ——阻尼系数。

$F_K(t)$ 与物体的位移成正比, 即

$$F_K(t) = ky(t)$$

式中 k ——弹性系数。

将上述关系式代入式(2-2)中得微分方程为

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = F(t) - f \frac{dy(t)}{dt} - ky(t)$$

移项得

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + f \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = F(t) \quad (2-3)$$

比较这两个例子可看出, 不同类型的元件或系统可以有形式相同的微分方程, 这种相似为控制系统的计算机数字仿真提供了基础。

例 2-3 如图 2-3 所示有源网络, 设输入电压为 $u_i(t)$, 输出电压为 $u_o(t)$, K_V 为运算放大器开环放大倍数, 试列写其微分方程。

解 因为运算放大器的 K_V 值很大, 所以 a 点的电位

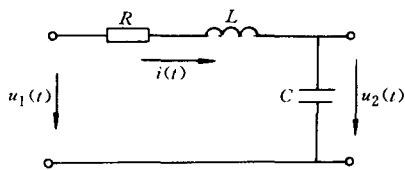


图 2-1 RLC 串联电路

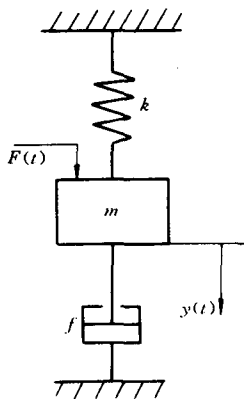


图 2-2 弹簧、重物、阻尼器动力系

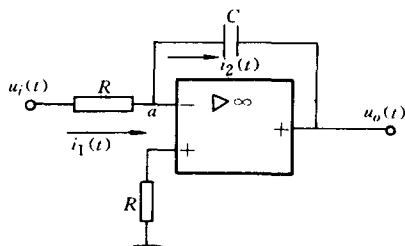


图 2-3 有源 RC 网络

$$u_a(t) = -\frac{u_o(t)}{K_V} \approx 0$$

又因为一般运算放大器的输入阻抗很高,所以

$$i_1(t) \approx i_2(t)$$

据此可列出

$$\begin{aligned} \frac{u_i(t)}{R} &= i_2(t) \\ i_2(t) &= -C \frac{du_o(t)}{dt} = \frac{u_i(t)}{R} \\ -RC \frac{du_o(t)}{dt} &= u_i(t) \end{aligned}$$

令 $T = RC$, 则上式可写为

$$-T \frac{du_o(t)}{dt} = u_i(t)$$

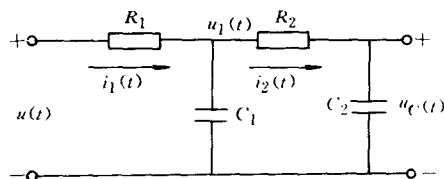


图 2-4 两级 RC 滤波网络

例 2-4 图 2-4 所示为两级 RC 电路串联组成的无源滤波网络,试列写以 $u(t)$ 为输入、 $u_C(t)$ 为输出的网络的微分方程。

解 根据基尔霍夫定律可列写如下方程

$$u(t) = i_1(t)R_1 + \frac{1}{C_1} \int [i_1(t) - i_2(t)] dt \quad (2-4)$$

$$\frac{1}{C_1} \int [i_1(t) - i_2(t)] dt = i_2(t)R_2 + \frac{1}{C_2} \int i_2(t) dt \quad (2-5)$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C_2} \int i_2(t) dt \quad (2-6)$$

$$i_2(t) = C_2 \frac{dU_C(t)}{dt} \quad (2-7)$$

将式(2-6)、式(2-7)代入式(2-5)得

$$\frac{1}{C_1} \int [i_1(t) - i_2(t)] dt = R_2 C_2 \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) \quad (2-8)$$

对上式两端分别微分得

$$\frac{1}{C_1} [i_1(t) - i_2(t)] = R_2 C_2 \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \frac{du_C(t)}{dt}$$

整理得

$$i_1(t) = i_2(t) + R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + C_1 \frac{du_C(t)}{dt} \quad (2-9)$$

将式(2-8)、式(2-9)代入式(2-4)得

$$u(t) = \left(C_2 \frac{du_C(t)}{dt} + R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 U_C(t)}{dt^2} + C_1 \frac{du_C(t)}{dt} \right) R_1 + R_2 C_2 \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)$$

整理得:

$$R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + (R_1 C_2 + R_1 C_1 + R_2 C_2) \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = u(t) \quad (2-10)$$

令 $R_1 C_1 = T_1, R_2 C_2 = T_2, R_1 C_2 = T_3$, 则得到

$$T_1 T_2 \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + (T_1 + T_2 + T_3) \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = u(t) \quad (2-11)$$

可见,该滤波网络的动态数学模型是一个二阶常系数线性微分方程。

例 2-5 试写出图 2-5 所示电枢控制的他励直流电动机的微分方程。以电枢电压为输入量,以电动机输出角速度为输出量。

解 根据基尔霍夫定律有

$$u_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + e_a(t) \quad (2-12)$$

式中 $e_a(t)$ ——电枢反电动势。

若忽略电枢反应、涡流及磁滞影响,当励磁电流 i_f 恒定时,磁通 Φ 为恒值。则

$$e_a(t) = C_e \omega(t)$$

式中 C_e ——电动势常数,单位为 $V \cdot s$;

ω ——电动机输出角速度,单位为 s^{-1} 。

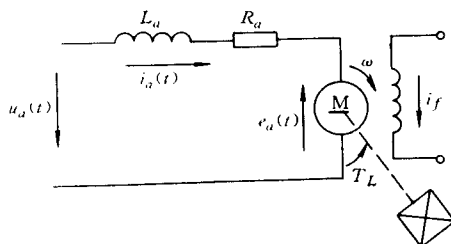


图 2-5 电枢控制他励直流电动机示意图

电磁转矩

$$T_e(t) = C_m i_a(t)$$

式中 C_m ——转矩常数,单位为 $N \cdot m/A$ 。

$$\text{转矩平衡方程式} \quad T_e(t) = J \frac{d\omega}{dt} + f\omega + T_L(t) \quad (2-13)$$

式中 $T_L(t)$ ——负载力矩,单位为 $N \cdot m$;

f ——电动机及负载折合到电动机轴上的粘性摩擦系数,单位为 $N \cdot m \cdot s$;

J ——电动机及负载折合到电动机轴上的转动惯量,单位为 $N \cdot m \cdot s^2$ 。

消去中间变量 $i_a(t)$ 、 $e_a(t)$ 和 $T_e(t)$,即可得到表示 $u_a(t)$ 、 $\omega(t)$ 及 $T_L(t)$ 之间关系的微分方程。

$$\begin{aligned} \frac{JL_a}{C_m} \frac{d^2 \omega(t)}{dt^2} + \left(\frac{L_a f}{C_m} + \frac{JR_a}{C_m} \right) \frac{d\omega(t)}{dt} + \left(C_e + \frac{R_a f}{C_m} \right) \omega(t) \\ = u_a(t) - \frac{R_a}{C_m} T_L(t) - \frac{L_a}{C_m} \frac{dT_L(t)}{dt} \end{aligned} \quad (2-14)$$

它为二阶常系数线性微分方程。这表明,在以电枢电压为输入,电动机角速度为输出时,电枢控制的他励直流电动机为二阶系统。

在工程实际中,为便于分析系统,略去次要因素,使系统变得简单。下面分几种情况讨论。

(1) 忽略粘性摩擦的影响,即设 $f=0$ 。这时式(2-14)变为

$$\frac{JL_a}{C_m} \frac{d^2 \omega(t)}{dt^2} + \frac{JR_a}{C_m} \frac{d\omega(t)}{dt} + C_e \omega(t) = u_a(t) - \frac{R_a}{C_m} T_L(t) - \frac{L_a}{C_m} \frac{dT_L(t)}{dt}$$

令 $T_m = \frac{JR_a}{C_e C_m}$, 称为机电时间常数;

$T_l = \frac{L_a}{R_a}$, 称为电枢电磁时间常数。

则上式可简化成

$$T_m T_l \frac{d^2 \omega(t)}{dt^2} + T_m \frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) = \frac{1}{C_e} u_a(t) - \frac{T_m}{J} T_L(t) - \frac{T_m T_l}{J} \frac{dT_L(t)}{dt} \quad (2-15)$$

(2) 忽略电枢电感的影响,即设 $L_a=0$ 。这时式(2-14)变为

$$\frac{JR_a d\omega(t)}{C_m} + \left(C_e + \frac{R_a f}{C_m} \right) \omega(t) = u_a(t) - \frac{R_a}{C_m} T_L(t) \quad (2-16)$$

为一阶系统。

(3)同时忽略粘性摩擦的电感的影响,即设 $f=0, L_a=0$, 式(2-14)变为

$$T_m \frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) = \frac{1}{C_e} u_a(t) - \frac{T_m}{J} T_L(t) \quad (2-17)$$

为一阶系统。

工程上,转速用 $n(\text{r/min})$,转动惯量用 $GD^2/(4g)$ 计量, G 是电枢的重量, D 是电枢直径。角速度 ω 和转速 n 的关系为

$$\omega(t) = \frac{2\pi n(t)}{60}$$

则式(2-14)变为

$$T_m T_i \frac{d^2 n(t)}{dt^2} + T_m \frac{dn(t)}{dt} + n(t) = \frac{1}{C_e'} u_a(t) - \frac{T_m}{GD^2} T_L(t) - \frac{T_m T_i}{GD^2} \frac{dT_L(t)}{dt} \quad (2-18)$$

式中 $C_e' = \frac{2\pi C_e}{60}$, 式(2-17)变为

$$T_m \frac{dn(t)}{dt} + n(t) = \frac{1}{C_e'} u_a(t) - \frac{T_m}{GD^2} T_L(t) \quad (2-19)$$

对由多个环节组成的控制系统建立微分方程时,一般先由系统原理线路图画系统框图,并分别列写组成系统各环节的微分方程,然后,消去中间变量便得到描述系统输出量与输入量之间关系的微分方程。列写时应注意前一个环节的输出是后一个环节的输入,一级一级的单向传送,前后连接的两个环节中,注意后级对前级的负载效应。

例 2-6 试列写图 2-6 所示电动机调速系统的微分方程。

解 控制系统的受控对象是电动机,系统的输出量是转速,输入量为给定电压 $U_n^*(t)$ 。控制系统由给定器、运算放大器、功率放大器(整流)和测速发电机等部分组成,现分别列写各环节的微分方程。

首先画出系统的原理框图,如图 2-7 所示。

运算放大器 $u_1(t) = K_1(U_n^*(t) - U_n(t))$

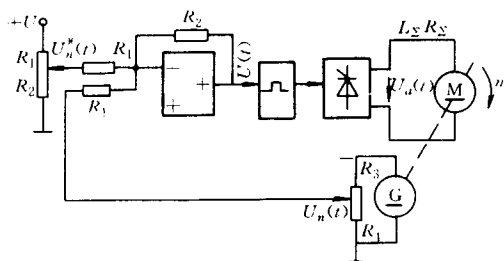


图 2-6 电动机调速系统

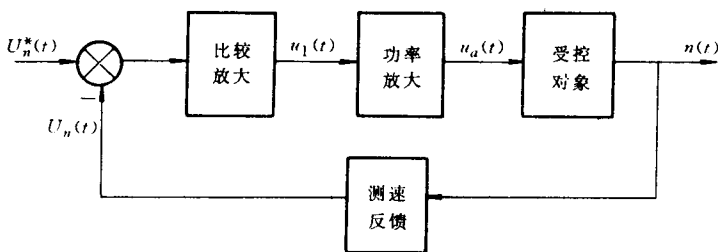


图 2-7 电动机调速系统原理框图

式中 $K_1 = R_2/R_1$ ——运算放大器的比例系数。

功率放大器 本系统采用晶闸管整流装置,它包括触发电路和晶闸管主回路,忽略晶闸管控制电路的时间滞后,其输出输入方程为

$$u_a(t) = K_i u_1(t)$$

式中 K_i ——晶闸管装置的电压放大系数。

直流电动机 引用例 2-5 所求的直流电动机微分方程式,空载时有

$$T_m T_l \frac{d^2 n(t)}{dt^2} + T_m \frac{dn(t)}{dt} + n(t) = \frac{1}{C_e'} u_a(t)$$

式中

$$T_m = \frac{GD^2 R_\Sigma}{375 C_e C_m}$$

$$T_l = \frac{L_\Sigma}{R_\Sigma}$$

测速发电机 测速发电机的输出电压 $u_n(t)$ 与转速 $n(t)$ 成正比,即有

$$u_n(t) = K_n n(t)$$

式中 K_n ——测速发电机比例系数。

从上述各方程中消去中间变量 $u_n(t)$ 、 $u_1(t)$ 、 $u_a(t)$,经整理后便得到控制系统的微分方程

$$\frac{T_l T_m}{1+K} \frac{d^2 n(t)}{dt^2} + \frac{T_m}{1+K} \frac{dn(t)}{dt} + n(t) = \frac{K_g u_n^*}{C_e' (1+K)}$$

式中

$$K = \frac{K_1 K_g K_i}{C_e'}$$

$$K_g = K_1 K_n$$

二、线性定常微分方程的求解

建立数学模型的目的之一是为了用数学方法定量地对系统进行分析。当系统微分方程列出后,只要给定输入量的初始条件,便可对微分方程求解。在工程中,求解微分方程采用拉氏变换法。有关拉氏变换法的原理,在工程数学中已学过,这里不再叙述,只给出一个例子用以说明。

例 2-7 设 RC 网络如图 2-8 所示,在开关 S 闭合之前,电容 C 上的初始电压为零。试求开关 S 闭合后电容电压 $u_c(t)$ 的变化规律。

解 开关 S 瞬时闭合,相当于网络有阶跃电压 $u \cdot 1(t)$ 输入。电路的微分方程为

$$RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u \cdot 1(t)$$

两端进行拉氏变换得

$$RCsU_c(s) + U_c(s) = \frac{1}{s}U$$

由上式求出输出量 $u_c(t)$ 的拉氏变换表达式

$$U_c(s) = \frac{U}{s(RCs+1)}$$

展开成部分分式

$$U_c(s) = \frac{1}{s}U - \frac{RC}{RCs+1}U$$

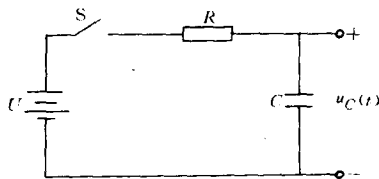


图 2-8 RC 网络