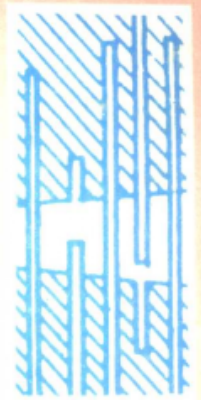
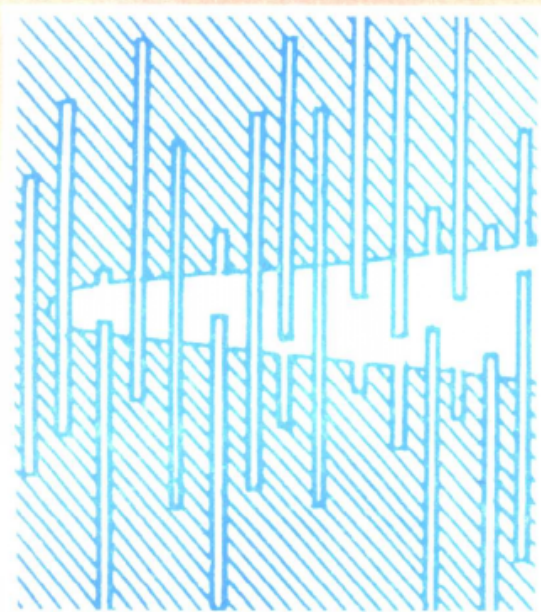


989655

高等学校
教材
高教

复合材料 细观力学性能

乔生儒 主编



西北工业大学出版社

高等学校教材

复合材料细观力学性能

主编 乔生儒

编者 乔生儒 曾燮榕 白世鸿

西北工业大学出版社

1997年1月 西安

(陕)新登字 009 号

【内容提要】 本书主要论述复合材料的细观力学性能,同时也少量涉及到宏观力学性能;不仅阐述最基本的理论基础,还简单介绍最基本的测试方法。本书内容包括纤维强度,各向异性弹性体基础,单向复合材料力学性能,短纤维复合材料力学性能,颗粒复合材料力学性能,混杂复合材料的力学性能,复合材料的断裂、界面、疲劳、冲击和蠕变等性能。

本书可作为材料科学与工程类专业的本科生、研究生教材,也可供教师和工程技术人员参考。

高等学校教材
复合材料细观力学性能

乔生儒 主编
责任编辑 刘 红
责任校对 钱伟峰

©1997 西北工业大学出版社出版发行
(710072 西安市友谊西路127号 电话 8493844)
陕西省新华书店经销
西安长青印刷厂印装
ISBN 7-5612-0913-4/TB·9(课)

开本:787×1092 毫米 1/16 印张:12.25 字数:292千字
1997年1月第1版 1997年1月第1次印刷
印数:1—1000册 定价:13.00元

购买本社出版的图书,如有缺页、错页的,本社发行部负责调换。

前 言

近年来材料科学取得了许多新成就,复合材料的发展更是迅猛异常,其研究、设计、制造和应用更加广泛,给高等教育提供了大量新信息,同时也提出了新要求。在高等学校材料科学与工程的教学过程中,应该对这些新信息予以充分重视,而且应放到重要的教学内容中去,以适应复合材料发展的需求。为此,我们为材料科学与工程专业高年级本科生和研究生开设了“先进复合材料学”和“复合材料力学性能”等课程。在教学过程中,我们深感缺乏相应的教材和教学参考书籍,因此急需编写适合材料类专业的复合材料细观力学性能的教材,以满足当前教学中的需要。

本教材与“先进复合材料学”、“复合材料原理及工艺”等课程密切配合,阐述最基本最成熟的复合材料力学性能,并兼顾最基本的力学性能测试方法。同时也适当介绍一些新成就和新动向,以开阔视野,活跃思路。由于主要是面向材料科学与工程专业的学生,因此尽量不涉及繁琐的数学推导,而着重物理概念的阐述。

在编写过程中,作者参阅了国内外部分文献、资料和书籍,希望使该教材能与当前复合材料的应用研究接轨。作者根据教学实践中的体会和学生们提出的问题,也力图使该教材满足学生们的愿望,但限于编者水平,书中错误和不妥之处在所难免,恳请专家、读者多加批评指正,以便我们进行修改、补充,不断完善这本教材。

本书由西北工业大学乔生儒教授、曾燮榕副教授、白世鸿讲师三人编写,其中乔生儒负责编写前言、第一~五章及七、八章,曾燮榕编写第九~十一章,白世鸿编写第六、十二章。

本书由西安交通大学蒋咏秋教授主审。他在百忙中逐字逐句审阅后提出了许多宝贵意见和建议,并提供了许多参考文献,编者在此深表感谢。

“复合材料细观力学性能”这门课程是中国工程院院士张立同教授建议在我校材料类专业开设的,在编写中得到了她的支持和帮助。此外,蓝立文、矫桂琼和迟之范教授也对本书提出过许多宝贵意见,在此一并致谢。

编 者

1995年10月1日

目 录

第一章 纤维和纤维束强度	1
§ 1.1 纤维基本参数	1
§ 1.2 单丝强度与模量	2
§ 1.3 纤维束的性能	2
§ 1.4 纤维和纤维束强度的统计分布	4
§ 1.5 纤维的理论强度	7
习题及思考题	8
第二章 各向异性体弹性基本方程	9
§ 2.1 一点的应力状态	9
§ 2.2 平衡微分方程	10
§ 2.3 应变及几何方程	12
§ 2.4 应力和应变的关系	13
习题及思考题	17
第三章 单向连续纤维复合材料	18
§ 3.1 引言	18
§ 3.2 研究单向连续纤维增强复合材料力学性能的基本假设	18
§ 3.3 代表性体元	19
§ 3.4 复合材料的纵向力学性能	20
§ 3.5 单向复合材料的纵向压缩强度及破坏机理	28
§ 3.6 单向连续纤维复合材料的横向性能	30
§ 3.7 主波柔比 ν_{LT}	34
§ 3.8 面内剪切性能	34
§ 3.9 正轴和偏轴应力—应变关系、耦合现象	37
§ 3.10 单向层合板的强度理论	44
§ 3.11 层合板标记及铺层简介	48
习题及思考题	50
第四章 短纤维复合材料的力学性能	52
§ 4.1 应力传递理论	52
§ 4.2 短纤维复合材料的弹性模量	58
§ 4.3 短纤维增强复合材料的强度	60

习题及思考题	62
第五章 复合材料的断裂	63
§ 5.1 引言	63
§ 5.2 断裂的链式模型	63
§ 5.3 断裂韧性的概念	66
§ 5.4 复合材料断裂模型	71
§ 5.5 含不同厚度脆性界面层和涂层的脆性纤维的断裂和强度	81
习题及思考题	85
第六章 粒子(颗粒)增强复合材料的力学性能	86
§ 6.1 引言	86
§ 6.2 颗粒增强塑料的细观力学分析	87
§ 6.3 颗粒的增韧效应	94
§ 6.4 颗粒的表面状态对复合材料性能的影响	95
习题及思考题	97
第七章 界面力学性能分析	98
§ 7.1 引言	98
§ 7.2 界面力学性能的微观测试方法	98
§ 7.3 界面强度对复合材料性能的影响	102
§ 7.4 界面反应层对力学性能的影响	105
§ 7.5 界面残余应力及测试技术,热膨胀系数	113
习题及思考题	116
第八章 混杂复合材料的力学性能	117
§ 8.1 引言	117
§ 8.2 单向混杂复合材料的弹性常数	117
§ 8.3 单向混杂复合材料的强度	118
§ 8.4 混杂效应及其机理	121
习题及思考题	123
第九章 复合材料的疲劳	124
§ 9.1 复合材料疲劳损伤机理	124
§ 9.2 疲劳损伤特征表征	132
§ 9.3 疲劳寿命预测	141
§ 9.4 复合材料的疲劳性能及影响因素	142
习题及思考题	145

第十章 复合材料的高温蠕变性能	146
§ 10.1 复合材料高温蠕变的一般规律.....	146
§ 10.2 载荷沿纤维方向作用下的连续纤维增强复合材料的高温蠕变.....	147
§ 10.3 载荷沿纤维方向作用下的短纤维增强复合材料的高温蠕变.....	150
§ 10.4 偏轴载荷作用下复合材料的高温蠕变.....	154
习题及思考题.....	158
第十一章 复合材料的冲击性能	159
§ 11.1 复合材料冲击性能一般表征.....	159
§ 11.2 复合材料的冲击性能.....	160
§ 11.3 复合材料冲击损伤.....	163
§ 11.4 复合材料在高速冲击载荷下的破坏行为.....	165
习题及思考题.....	169
第十二章 复合材料力学性能测试	170
§ 12.1 前言.....	170
§ 12.2 拉伸性能测定.....	170
§ 12.3 弯曲试验.....	174
§ 12.4 压缩试验.....	176
§ 12.5 剪切试验.....	177
§ 12.6 疲劳试验.....	179
§ 12.7 冲击试验.....	180
习题及思考题.....	181
参考文献	182

第一章 纤维和纤维束强度

先进复合材料是一种具有更高性能的复合材料,在制备过程中需要使用高性能增强剂。因此,高强度、高模量及低密度的纤维材料,诸如碳、硼、凯美拉(Kevlar,中文又叫芳纶)、碳化硅、玻璃等纤维就在这样的要求下发展起来。在制备复合材料过程中应对纤维和纤维束的力学性能有所了解。

§ 1.1 纤维基本参数

为统一纤维性能的表述,特定义以下纤维参数。

1.1.1 细度

在介绍细度的概念之前,先应解释单丝和原纱这两个名词。单丝是指拉丝漏板每个孔中拉出的丝;原纱是指多根单丝(数目由漏丝板的孔数决定)从漏板拉出汇集成的单束丝,也称纤维束丝。

纤维的细度是指单丝的直径,一般用微米表示。工艺上还有两种表示原纱粗细的方法^[1],即重量法和定长法。国标 GB—7690.1 中作了专门定义,称之为纤维束线密度。

重量法:用 1 g 原纱的长度来表示,称为支数。如 90 支纱就是指 1 g 原纱的长度为 90 m。当原纱中单丝数目相同时,纤维支数越高,单丝就越细。

定长法:该法是国际上统一使用的方法,单位为 Tex,系指 1 000 m 长原纱的支数。如 500 Tex 表示 1 000 m 长的原纱的质量为 500 g。原纱中单丝数目相同时, Tex 数值越大,单丝就越粗。

纤维的横截面有可能不是圆的,计量这种非圆形横截面的直径时采用当量直径。当量直径可用下式计算

$$de = KL$$
$$K = \frac{2\sqrt{\frac{A}{\pi}}}{L}$$

式中 de —— 纤维的当量直径, μm ;

K —— 异形横截面纤维的特征(轴)线长, μm ;

L —— 形状修正系数;

A —— 一定数量异形横截面纤维的平均截面积, μm^2 。

1.1.2 股数与捻度

合成一束纤维的原纱数叫做股数, N 根原纱合成一股叫 N 股。捻度是纤维束的一个重要指标,纤维束有加捻和无捻之分。无捻纤维束由多股平行的原纱并合而成或由一次拉制的多根

单丝直接集束而成；加捻纤维束是多股原纱并合时加捻而成或由一次抽制的多根单丝加捻而成。1 m 长原纱合股时捻的圈数叫捻度。

加捻纱一般用于织物制品。如果直接用于浸渍树脂，或制造无纬预浸料，最好采用无捻纱。这种纱束中纤维平行排列，强度高，纤维间松散，易被浸渗。

§ 1.2 单丝强度与模量^[2]

单丝强度与模量的测量已有国家标准(GB3916)，按下述方法准备拉伸样品：先以坐标纸做成纸框，再用镊子夹取长 4~5 cm 的单丝，置于纸框空格中间，见图 1-1。然后用胶粘的办法让单丝定位，使纤维与纸框平行，用另一半纸框折叠盖压住单丝。这样使单丝夹在折叠纸框中间，以免在拉伸试验中被夹头夹断。

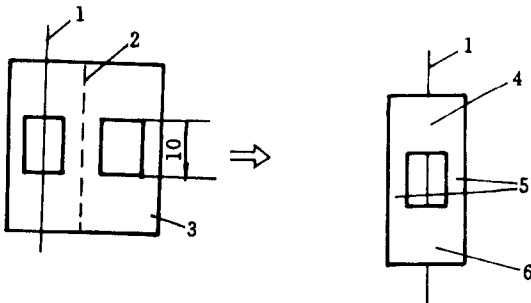


图 1-1 单丝试样制作纸框图

1—单丝 2—折迭痕 3—纸框 4—上夹头夹持处
5—剪断处 6—下夹头夹持处

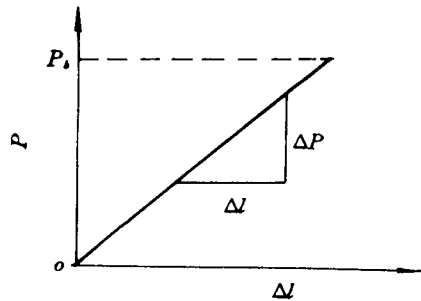


图 1-2 单丝拉伸载荷变形曲线

试样用夹头夹好后，用剪刀把试样两边的纸框剪断(见图 1-1 中的 5 处)，这样在拉伸过程中便由单丝承载。拉伸试验中可记录得到载荷—变形关系曲线，如图 1-2 所示。从曲线上获得有关数据后，便可计算得出单丝的强度和模量，其中单丝强度 S (MPa) 按 $P_s /$ 纤维横截面算出， P_s 为最大单丝载荷，单丝模量 E (GPa) 由 $\Delta P / \Delta L$ 求出。

现市场上销售的增强纤维，基本上都是脆性材料，因此其应力—应变曲线相应的都近似于直线。

§ 1.3 纤维束的性能

纤维束力学性能的测定按国标 GB3362 执行。由于纤维束在拉伸试验中很难将每根纤维同时均匀夹紧，为改善试样在夹头中的夹持条件，可使用树脂将一束纤维中的各根纤维粘结在一起，利用树脂易变形的特点，使夹持试样中，应力较均匀地分担在各根纤维上。但由于树脂和纤维同时都参与了承力和变形，测得的数据要受到树脂存在的影响，所以测得的纤维强度和模量称为表现强度和表现模量。树脂的强度和模量大大低于纤维，计算中可不考虑。

纤维束拉伸试样的制作及试验操作如下：(1) 取一束纤维，记录纤维的支数和股数。(2) 通过浸胶槽浸胶(牵引速率不宜过快，让胶液浸透纤维束)，浸胶后剪成 50 cm 左右长(至少一

组 10 根),用少许力分别拉直绷紧固定在一框架上,将浸胶后的纤维与框架一起放入烘箱加热固化。(3) 固化后的纤维束按图 1-3 所示尺寸裁剪,两头用胶粘剂和牛皮纸加强。准确测量试样标距,精确到 0.5 mm。(4) 往试验机上装夹试样,注意纤维束与加载轴线相重合。(5) 选择适当的拉伸速度(如 1~10 mm/min)和走纸速度(拉伸速度 40 倍),记录载荷—变形曲线,直至纤维断裂。(6) 最后由该曲线计算纤维束的表观拉伸强度、表观拉伸模量和断裂伸长率。其计算公式如下:

表观拉伸强度 σ_i :

$$\sigma_i = P/A \quad (1-1)$$

式中 P ——拉伸断裂载荷, N;

A ——纤维束中纤维横截面积, m^2 或 mm^2 。 $A = t/\rho_i$, 其中 t 为纤维线束密度(g/km), ρ_i 为纤维密度。

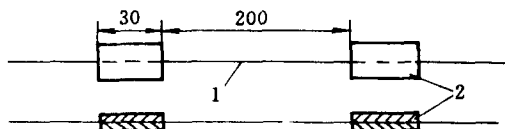


图 1-3 纤维束拉伸试验试样

1—纤维束 2—纸片

表观拉伸模量 E_a :

$$E_a = \frac{\Delta P}{A} \cdot \frac{L}{\Delta L} \quad (1-2)$$

式中 ΔP ——曲线上直线段截取的载荷差, N;

ΔL ——对应于 ΔP 段的变形量, mm;

L ——试样标距, mm;

A ——同式(1-1)。

断裂伸长率 ϵ :

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L} \times 100\% \quad (1-3)$$

式中 ΔL ——断裂载荷相对应的标距内总变形量, mm。

显然,树脂参与变形,测得的 ϵ 值亦不精确,应适当进行修正。修正方法为:分别制备标距为 50、100、150、200、250 mm 的试样各 10 个,测量它们的断裂载荷 P (N) 和断裂变形值 ΔL (mm);计算每种标距试样 $\Delta L/P$ 的平均值;将各种标距长度 L 对应的 $\Delta L/P$ 按下式计算修正系数 K :

$$\Delta L/P = aL + K \quad (1-4)$$

式中 K ——回归直线的截距;

a ——常数。

修正后的拉伸模量 E_i 为

$$E_i = E_a / (1 - \frac{P}{\Delta L} \cdot K) \quad (1-5)$$

由纤维束拉伸试验的断裂载荷值,可以计算纤维束的平均股强度。股强度定义为每股纤维所能承受的最大拉力。

§ 1.4 纤维和纤维束强度的统计分布

纤维强度不是一个集中值,而是分布在一个范围内,主要是工业化生产的纤维不是均匀的,并且含有某些缺陷。纤维的直径愈粗,含缺陷的总量就有可能愈大,纤维强度就会愈低;纤维长度愈长,含缺陷的可能性也愈大,纤维强度也将愈低。为了用纤维强度推断复合材料的强度,应该首先知道纤维强度的统计分布规律。

1.4.1 纤维强度的统计分布规律^[3,9]

实验发现,尽管纤维强度值比较分散,但其值有一定的规律性,图1-4就是一个例子。通常这种分布规律符合 Weibull 分布,最常用两参数 Weibull 分布来描述,即

$$f(\sigma) = La\beta\sigma^{\beta-1}\exp(-L\sigma^\beta), \quad \sigma \geq 0 \quad (1-6)$$

式中 $f(\sigma)$ —— 机率密度函数,即在 σ 和 $\sigma + d\sigma$ 之间破坏应力的或然率;

L —— 纤维长度;

α 和 β —— 说明分布的两个参数,其中 α 为尺度参数, β 为形状参数。

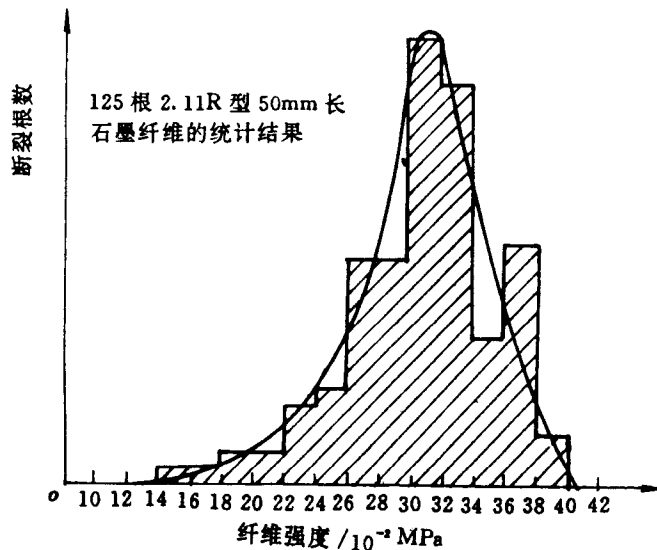


图 1-4 石墨纤维强度的典型分布

图 1-5 是 $\alpha = 1$, β 取各种值时的 $f(\sigma)$ 图形。当 $\beta > 1$ 时, $f(\sigma)$ 的曲线有一个峰。尺度参数 α (又叫量纲参数) 对分布曲线的影响可从图 1-6 看出, 图中 $\beta = 2$, α 取不同值时得到的几条 $f(\sigma)$ 的图形。

利用概率论的基本知识, 不难求得纤维的平均强度(数学期望) $\bar{\sigma}$ 和标准偏差(方差) s , 它们可分别用下面的式子表示:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= (\alpha L)^{1/\beta} \Gamma(1 + 1/\beta) \\ s &= (\alpha L)^{1/\beta} \{ \Gamma(1 + 2/\beta) - \Gamma^2(1 + 1/\beta) \}^{1/2} \end{aligned} \quad (1-8)$$

可见 α 和 β 与纤维的平均强度和标准偏差 s 有关。用变异系数 μ 反映纤维强度的离散程度, 变异系数为标准偏差 s 除以平均强度 $\bar{\sigma}$, 可用下式求得

$$\mu = \frac{s}{\bar{\sigma}} = \frac{\{\Gamma(1 + 2/\beta) - \Gamma^2(1 + 1/\beta)\}^{1/2}}{\Gamma(1 + 1/\beta)} \quad (1-9)$$

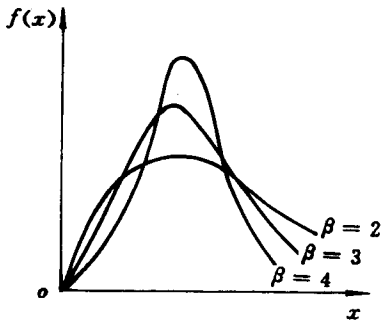


图 1-5 $\alpha = 1, \beta = 2, 3, 4$ 时的 Weibull 分布曲线

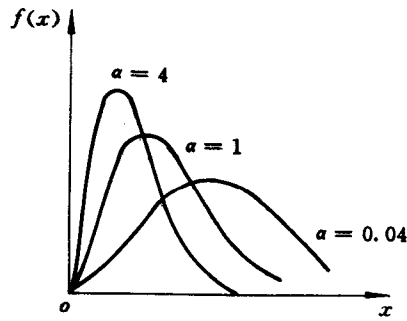


图 1-6 $\beta = 2, \alpha = 4, 1, 0, 0.04$ 时的 Weibull 分布曲线

因此 μ 仅仅是 β 的函数, 如果 $0.05 \leq \mu \leq 0.5$, 则 $\mu \approx \beta^{-0.02}$, 因此 β 可用变异系数的倒数来度量, 对于实际纤维 β 值大于 1。对于玻璃纤维, 变异系数大约为 0.1, 相应于 β 值大约为 11。对于硼丝, μ 值在 0.2 和 0.4 之间, 相应于 β 值在 2.7 和 5.8 之间。根据公式(1-7), 当 β 值为 10 时, 纤维长度增加 10 倍, 会导致纤维的平均强度减少 25%。如果 β 为 4 左右, 相应于纤维强度减少大约 50%。微分公式(1-6), 并令其等于零, 可发现统计 σ^* (即最可几破坏应力) 值:

$$\sigma^* \cong \{(\beta - 1)/\beta\}^{1/\beta} (\alpha L)^{-1/\beta} \quad (1-10)$$

或者, 如果 β 很大, 则

$$\sigma^* \cong (\alpha L)^{-1/\beta} \quad (1-11)$$

$(\alpha L)^{-1/\beta}$ 可看作为强度参考水平。两个参数 α 和 β 可以从实验数据求得, 例如可从平均的纤维强度及其标准偏差求得。

纤维强度的分布函数 $F(\sigma) = \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma$, 即

$$F(\sigma) = 1 - \exp(-\alpha L \sigma^\beta) = 1 - \exp\left[-L \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^\beta\right], \sigma \geq 0 \quad (1-12)$$

这里, $F(\sigma)$ 是 L 长的纤维在应力不超过 σ 时的破坏概率, $\sigma_0 = (\alpha^{-1/\beta})$ 仍叫尺度参数。

新近对碳纤维所做的实验表明^[5], β 未必是个常数, 它与样本大小及纤维长度有关。在通常的试验标距下, 若取确定的子样数, β 值变化不大, 可作常数处理。当长度减小(小于 2.5 mm)时, β 值随长度减小而变小。这样, 可使碳纤维的强度分布成为两个 β 值的叠加。若采用双峰 Weibull 分布^[6], 可更好地描述这种纤维强度的分布, 但这种分布函数包含有 4~6 个由实验确定的 Weibull 参数, 更为复杂。

在复合材料强度的各种统计理论中, 通常需要准确确定无效长度(约 0.5 mm 或更小)下的纤维强度分布。对于这样短的纤维, 用实验准确地测量其强度是很困难的, 只能由一般试验

标距下所得纤维平均强度,利用纤维强度的 Weibull 分布,推算出极短纤维的平均强度及其分布。文献指出,这样处理会带来一些误差,因此,Phani 等^[7]人提出一种修正的 Weibull 分布函数,可适用于任意长度的纤维。

值得指出,处在复合材料基体中的纤维强度与单独的纤维试验所得强度不完全相同,这就是所谓的原位强度(in situ strength)问题。这种现象实质上是由于复合材料中各相材料的协同作用和相互影响的结果,使原有纤维本身的强度特性发生了一些变化。这个问题至今还没有简单的解答。

Weibull 分布能很好地描述纤维的强度分布。它有多种形式:两参数、三参数、双峰及多峰 Weibull 分布^[8]等。为简便起见,大多数均采用两参数形式。

1.4.2 纤维束强度的统计分析

制作复合材料时,纤维常常不是以单根形式来使用的,而是采用纤维束。人们很容易误认为纤维束的强度就是单根纤维强度的平均值。而事实上由于单根纤维强度的分散性,同时纤维束中各纤维受力不均衡,导致了纤维断裂有先后之分。受力大强度低的纤维先行断裂,而受力小强度高的后断。部分纤维断裂后,剩余纤维受力情况又有所变化,故纤维束的破坏是一个逐步断裂的过程。这样便使纤维束的强度低于单根纤维时的强度。

用统计理论精确地确定单纤维强度与纤维束强度分布之间的关系是 Daniels 首先作出的。他早就证明了纤维束中纤维的断裂平均应力 σ_B ,亦即纤维束强度近似地服从正态分布。

$$\omega(\sigma_B) = \frac{1}{\psi_B \sqrt{2\pi}} \exp - \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_B - \bar{\sigma}_B}{\psi_B} \right)^2 \right\} \quad (1-13)$$

其中, $\omega(\sigma_B)$ 是纤维束强度的密度分布函数, $\bar{\sigma}_B$ 是纤维束强度的均值,由下式确定

$$\bar{\sigma}_B = \sigma_{f_{\max}} \{1 - F(\sigma_{f_{\max}})\} \quad (1-14)$$

这里的 $F(\sigma)$ 是单纤维的强度分布函数, $\sigma_{f_{\max}}$ 由 $\sigma[1 - F(\sigma)]$ 求极值解出。 $\sigma_{f_{\max}}$ 是最大断裂载荷的那束纤维中纤维平均应力。标准偏差为

$$\psi_B = \sigma_{f_{\max}} [F(\sigma_{f_{\max}}) \{1 - F(\sigma_{f_{\max}})\}]^{1/2} N^{-1/2} \quad (1-15)$$

式中 N ——一束纤维中的纤维根数。

显然,纤维根数 N 越大,纤维破坏强度的再现性就越高。

令 $\frac{d}{d\sigma} \{\sigma[1 - F(\sigma)]\}_{\sigma=\sigma_{f_{\max}}} = 0$

可得最大纤维应力 $\sigma_{f_{\max}}$ 为

$$\sigma_{f_{\max}} = (L\alpha\beta)^{-\frac{1}{\beta}} \quad (1-16)$$

代入(1-14)式后可得

$$\bar{\sigma}_B = (L\alpha\beta)^{-\frac{1}{\beta}} \exp\left(-\frac{1}{\beta}\right) = (L\alpha\beta e)^{-\frac{1}{\beta}} \quad (1-17)$$

对比(1-17)式,可见纤维束的平均强度比单纤维的平均强度低。纤维束强度与单纤维强度的离散性有关。当纤维束强度极不分散时,在断裂的纤维束中纤维平均应力 σ_B 与单根纤维平均强度 $\bar{\sigma}$ 几乎相同。当单纤维强度的变异系数从零开始一直增加,其极限为无穷大时,那么

纤维束中平均纤维应力将会趋于 0。即

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \sigma_B = 0$$

当变异系数为 $\mu = 10\%$ 时,纤维束中平均纤维应力 σ_B 大约是单纤维平均强度 $\bar{\sigma}$ 的 80%;当 $\mu = 25\%$ 时,纤维束中的平均纤维应力将是单纤维平均强度的 63%。

§ 1.5 纤维的理论强度

材料的强度从本质上讲与原子间或分子间的结合力即键力有关。通常存在四种类型的键力,即金属键、离子键、共价键和分子间的作用力(次价键)。质点间(原子、离子或分子间)既有吸引力 σ_1 ,同时还存在斥力 σ_2 ,其合力为 $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ 。结合力的大小与质点 N_1 和 N_2 间的距离 r 有关。图 1-7 为双质点间作用力示意图。曲线 1 代表吸引力随质点间距 r 的变化关系,曲线 2 代表斥力随 r 的变化曲线,曲线 3 是合力与 r 之间关系曲线。当 $r = r_0$ 时,合力 σ 为 0, $r < r_0$ 时为斥力,而当 $r > r_0$ 时合力为引力。合力曲线上的最高点 σ_m 代表质点间的最大结合力,亦即使两质点要脱离结合必须克服 σ_{max} 。 σ_{max} 就是理论强度。作为一级近似,合力曲线简化作正弦曲线来看待,如图 1-8 所示,则有

$$\sigma = \sigma_m \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (1-18)$$

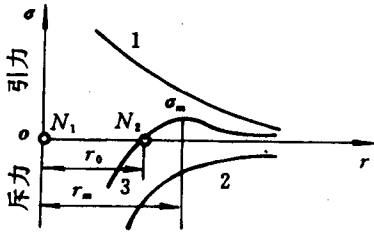


图 1-7 引力、斥力、合力随质点间距变化关系

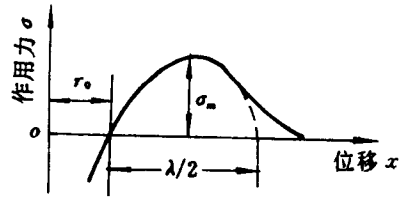


图 1-8 质点间作用力与质点间位移关系曲线

式中 x —— 质点间位移;
 λ —— 正弦曲线的波长。

如位移很小,则 $\sin \frac{2\pi x}{\lambda} \approx \frac{2\pi x}{\lambda}$, 于是

$$\sigma = \sigma_m \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (1-19)$$

根据虎克定律,在弹性状态,

$$\sigma = E\epsilon = \frac{Ex}{r_0} \quad (1-20)$$

式中 E —— 弹性模量;
 ϵ —— 弹性应变;
 r_0 —— 质点间的平衡距离。

合并式(1-19), (1-20), 消去 x , 得

$$\sigma_m = \frac{\lambda E}{2\pi r_0} \quad (1-21)$$

另一方面,材料断裂时,形成两个新的表面,需要表面形成功,其值应等于破坏质点间结合所作的功,可用曲线下所包围的面积来计算,即

$$U_0 = \int_0^{\lambda/2} \sigma_m \sin \frac{2\pi x}{\lambda} dx = \frac{\lambda \sigma_m}{\pi} \quad (1-22)$$

这个能量应等于表面能 γ 的两倍,即

$$\frac{\lambda \sigma_m}{\pi} = 2\gamma$$

或

$$\lambda = \frac{2\pi\gamma}{\sigma_m} \quad (1-23)$$

代入式(1-21),消去 λ ,得

$$\sigma_m = \left(\frac{E\gamma}{r_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1-24)$$

从上式可知,当 E, r_0 一定时, σ_m 与表面能 γ 有关。

若令 $r_0 \approx \frac{\lambda}{2}$ (这是一个很理想的假设),则由式(1-21)得

$$\sigma_m \approx \frac{E}{\pi} = 0.318E$$

此乃材料理论强度的近似公式。 E 是一个非常大的数字,因此材料的理论强度很高。用其他复杂的近似计算,理论强度值在 $\frac{E}{4} \sim \frac{E}{15}$ 之间,一般取 $\frac{E}{10}$ 用来分析问题。用上述结果可估算出 E 玻璃的理论强度为 7 GPa,碳纤维弹性模量约 900 GPa,理论强度为 27 ~ 155 GPa,NaCl 的理论强度为 2 GPa,Fe 的理论强度为 13 GPa。材料实际强度要比理论强度低得多,主要是实际材料中有许多缺陷。减少缺陷就可提高强度,例如玻璃纤维的实际强度比块状玻璃高得多,就是因为纤维直径很小,减少了大量缺陷。

习题及思考题

1. 工程应用中希望纤维和纤维束强度数据集中。请考虑分布参数中的 α, β 值在应用中希望越大越好,还是越小越好。

2. 硼纤维的系列试验表明: $\mu = \frac{s}{\sigma} = 10\%$, 请计算 $\bar{\sigma}_B / \bar{\sigma}$, 其中 $\bar{\sigma}$ 是纤维平均强度, $\bar{\sigma}_B$ 是纤维束平均强度。

第二章 各向异性体弹性基本方程

我们把物体内各点性能都相同的材料叫均质材料,而把物体内各点性能不相同的称为非均质材料;把物体内各个点在每个方向上都表现出相同性能的材料叫各向同性材料,而把物体内各个点在各个方向上具有不同性能的材料叫各向异性材料。考虑材料是否均质,这与所观察对象的尺度有关。例如,从原子尺度来看,任何材料都不是均质的,但是当观察对象的尺度大到一定程度时,原子结构已失去其重要性,可以将其视作均质的。复合材料与传统材料(例如金属材料、高分子材料、陶瓷材料等)的一个重要区别是,前者是非均质、各向异性材料,而后者是均质各向同性材料。就弹性力学研究来说,两者的平衡方程和几何方程都是一样的,但是应力应变间的关系,即物理方程方程却不是一样的,前者比后者复杂得多。

纤维增强的复合材料属各向异性体。为了便于讨论后续各章内容,本章将简单介绍各向异性体弹性力学的一些基础知识。

§ 2.1 一点的应力状态

为了说明一点 P 的应力状态,围绕 P 点切出一个微小的正六面体,称之为单元体,见图 2-1。此单元体的各面上外法线均与坐标轴平行。规定外法线方向与坐标轴正向一致的面称为正面,否则为负面。例如图 2-1 中 $ABCD$ 为正面, $A'B'C'D'$ 为负面。

垂直于作用面的应力分量称为法向应力或正应力,它们是 σ_{xx} 、 σ_{yy} 、 σ_{zz} ,平行于作用面的应力分量是 σ_{xy} 、 σ_{yx} 、 σ_{yz} 、 σ_{zy} 、 σ_{zx} 、 σ_{xz} ,称为剪应力。双下标中第一个字母表示作用面的外法线方向,第二个表示应力分量的指向。在正面上的应力分量,如果其方向与坐标轴的正向一致就是正的,如果其方向与坐标轴的正向相反,则是负的;对于负面上的应力分量,若其方向与坐标轴的正向相反是正的,而同向的则是负的。图 2-1 中标出的各应力分量全是正的。

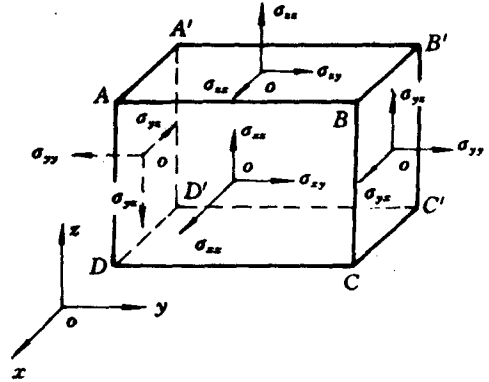


图 2-1 微元体及应力记号

按照上述关于应力符号的规定,对于正应力来说,引起拉伸的正应力是正的,引起压缩的正应力是负的,这与材料力学中的规定相同;但对于剪应力的正负号的规定,其结果正好与材料力学规定结果相反。

本书中为了方便,把 x 、 y 、 z 有时记作 1、2、3,其一般项记为 σ_{ij} , i 和 j 分别为 1、2、3,于是各面上的正应力分量为 σ_{11} 、 σ_{22} 、 σ_{33} ,而剪应力分量为 σ_{12} 、 σ_{13} 、 σ_{21} 、 σ_{23} 、 σ_{31} 、 σ_{32} 。有时还可把正应力分量记作 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 , σ_x 、 σ_y 、 σ_z 省去第二个下标,把剪应力分量记作 τ_{xy} 、 τ_{xz} 、 τ_{yz} 、 τ_{yx} 、 τ_{zy} 、 τ_{zx} 等。

以后用简单的方法便可证明,作用于相邻两个相互垂直平面上的剪应力是相等的,即 σ_{xy}

$= \sigma_{yx}, \sigma_{zx} = \sigma_{xz}, \sigma_{yz} = \sigma_{zy}$ 。这样,描述弹性体内一点的应力分量只需 6 个,这 6 个分量写成以下的方阵

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

§ 2.2 平衡微分方程

从受力弹性体中取出一平行六面体微体加以研究。平行六面体微体的面与各坐标平行,并设边长为 dx, dy, dz , 而其体积为 $dx dy dz$, 如图 2-2 所示。这一平行六面体受其周围部分物体的作用力,对于微体来讲,这些作用力是外力。此外,物体中还存在有体积力,这种力分布在物体的质量上,例如物体的重力,物体受到的磁力及离心力等。

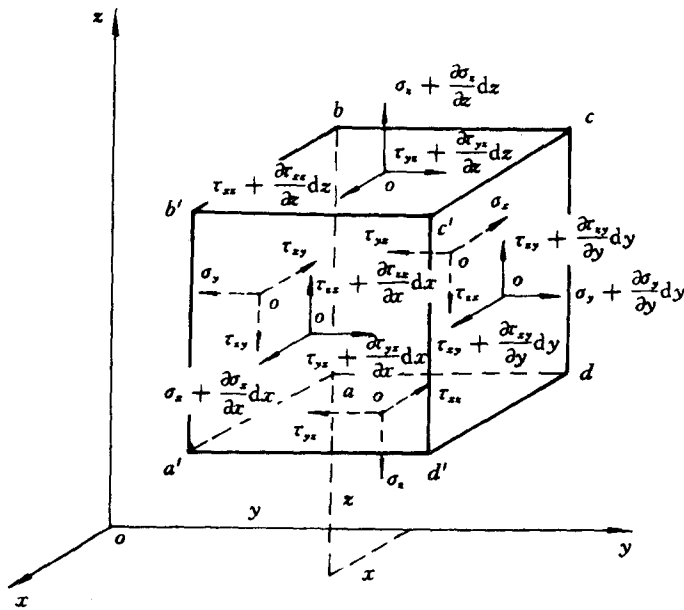


图 2-2

我们将单位体积所受到的体积力沿坐标轴向分解为三个分力 X, Y, Z ; 作用于六面微体上的体积力为 $X dx dy dz, Y dx dy dz, Z dx dy dz$ 。

在物体各点的应力,一般来讲是不相同的,应力用该点的坐标 x, y, z 函数表示。在六面微体的后面 $abcd$ 上作用的正应力为

$$\sigma_x = f(x, y, z)$$

在六面微体的前面 $a'b'c'd'$, 坐标 x 得到增量 dx , 因此这面上的正应力是

$$\sigma'_x = f(x + dx, y, z)$$

上式可展开为级数

$$f(x + dx, y, z) = f(x, y, z) + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} dx$$