责任编辑：杨晓红
封面设计：赵卫庆

- 完全按照2003年考研数学新大纲编写，分值150分
- 作者均系北大、清华、人大、北航等高校曾参与过考研命题的教授
- 所有试题均附详细解答及分析

2003年
硕士研究生入学考试
数学全真预测试卷

ISBN 7-5077-1185-4
9 787507 711851 >
定价：20.00元

2003年

硕士研究生入学考试

数学全真预测试卷

主编：李恒沛（北京航空航天大学教授）
胡金德（清华大学教授）
王式安（北京理工大学教授）

理工类

學苑出版社

2003年全国硕士研究生入学考试

数学全真预测试卷

20套

(附详解及分析)

——理工类——

主编 李恒沛 北京航空航天大学教授
胡金德 清华大学教授
王式安 北京理工大学教授

学苑出版社

图书在版编目(CIP)数据

2003年硕士研究生入学考试数学全真预测试卷(经济类、理工类)/李恒沛主编.
—北京:学苑出版社,2002.4

ISBN 7-5077-1185-4

Ⅰ.硕… Ⅱ.李… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-试题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第071167号

2003年硕士研究生入学考试数学全真预测试卷

(理工类)

学苑出版社出版发行

北京市万寿路西街11号 100036

北京诚顺达印刷有限公司印刷

787×1092 16开本 17印张 344千字

2002年9月北京第1版 2002年9月北京第1次印刷

印数:3000册 定价:20.00元

前　言

全国硕士研究生入学数学试题是遵循考试大纲命制的，而且命题的基本原则是一贯的。从整体上看，有利于国家对高层次人才的选拔，有利于高等学校数学教学的改革，同时便于招考单位的录取工作，对于提高数学的教学质量有一定的促进作用。

数学考试内容涉及到高等数学、线性代数及概率统计等三门课知识。试题考查的知识点要分布合理，能基本覆盖所要考的主要内容，知识涵盖面比较宽，试题题量与难度比较适中，试题设计科学规范，其信度和效度较高，力求整个试卷基本反映出数学考试大纲的规定和要求，较好地体现基本概念、基本理论和基本方法的能力考查，试题还着重考查知识的综合运用能力。与此同时，注意到试题标准（题型、题量、难易度比例、结构等）的连续性与试题难度的稳定，使考生心中有数，避免出现大起大落的现象。

对于考生来说，最迫切的问题是如何复习与备考，才能达到考试的要求，取得好的考试成绩。考生要处理好这个问题，首先必须深刻理解考试大纲中所规定的内容，分清主次，了解其深度与广度，注意到在试题中经常出现的题型，经过一段时间系统复习以后，还必须自我检验复习效果，了解自己哪部分内容掌握得较好，哪部分内容掌握得不够，以便进行针对性的补习，以期较快地提高成绩。拿这套模拟试卷来检验不失为一个行之有效的方法。

从历年研究生入学考试数学试题来看，试题尚有以下特点：**概念性强**。着重考查考生对基本概念的掌握，会运用基本定理完成对一些命题的证明，从不同角度、不同提法（即所谓变形、变式）来考查考生对其掌握的熟练程度。**综合性强**。一道试题着重考查一部分内容，而这部分内容又有很多知识点，不可能面面俱到，只能综合几个知识点来考查。这类题几乎年年试卷都有，旨在考查考生的能力与数学素质。**运算性强**。正确地运算基于正确的概念和方法，数学试题虽有一定的计算量，但只要考生基本概念清楚，基本理论融会贯通，基本方法运用自如，运算起来就能快捷正确。试题具有一定的灵活性，从不同侧面（或不同角度或相关的几个知识点）考查考生的能力，注意一题多解，好让考生临场发挥，运作自如。此外，试题还注意到论证性和应用性，考查考生逻辑推理的能力和综合应用的能力，这本是必不可少的，不论是对工学、经济学，还是管理学各专业的考生来说，都是这样，无一例外。

本书的编者都是长期在重点大学从事数学教学和科研的教授，都曾参加过全国统考试题的命制工作，对考研命题有深刻的研究，并参与历年考研数学试卷的评阅、分析和总结，积累了较为丰富的命题经验，编者愿此书的出版会对考研学子大有裨益。

北京科技大学秦明达教授在百忙之中仔细审阅了理工类部分内容，并提出许多宝贵意见，在此深表感谢。

编　者

2002.7

目　录

考生编号

密封线内禁止答题

数学一预测试卷(1)

一、填空题(本题满分 24 分,每小题 4 分.)

(1)设平面 π 过直线 $\begin{cases} x+2y-1=0 \\ 3y+z-5=0 \end{cases}$,且平行于直线 $\frac{x}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-3}$,则平面 π 的方程为____________.

(2)曲线 $y=|\ln x|$ 与直线 $x=\frac{1}{e}$, $x=e$ 及 x 轴所围成的平面图形的面积为____________.

(3)设 L 是从点(1,1,1)到点(4,4,4)的直线段,则 $\int_L \frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-x-y+2z}}=$____________.

(4)已知 $|A_{n\times n}|=a$, $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $n\times 1$ 矩阵, $\boldsymbol{\beta}$ 是 $1\times n$ 矩阵, a、b、c 是数,且

$$\begin{vmatrix} A & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} & b \end{vmatrix}=0,$$

则 $\begin{vmatrix} A & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} & c \end{vmatrix}=$________.

(5)已知 $P(A)=P(B)=a$,且 $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$,则 $a=$________.

(6)设随机变量 ξ 的分布密度函数为 $f(x)=\begin{cases} g(x), & x<0, \\ 0, & x\geqslant 0. \end{cases}$

则随机变量 $|\xi|$ 的分布密度函数为 $f_1(x)=$__________.

二、选择题(本题满分 24 分,每小题 4 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1)幂级数 $1-\frac{x-1}{3\sqrt{2}}+\frac{(x-1)^2}{3^2\sqrt{3}}-\frac{(x-1)^3}{3^3\sqrt{4}}+\frac{(x-1)^4}{3^4\sqrt{5}}-\cdots$ 在其收敛区间的两个端点处必

(A)都是收敛的.

(B)都是发散的.

(C)左端点收敛,右端点发散.

(D)左端点发散,右端点收敛.

[ ]

(2)下列表达式中正确的是

(A) $\int_{\pi}^{2\pi}|\sin x|\mathrm{d}x \leqslant \int_{\pi}^{2\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x$.

(B) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{1+\cos x}\mathrm{d}x < \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin x}{1+x^4}+\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$.

(C) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_c^d f(x)\mathrm{d}x, [a,b] \subset [c,d]$.

(D) $\int_{-1}^1 |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x$, $f(x)$ 连续, $x \in [-1,1]$.

[ ]

(3)若 $f(x)$在点 x_0 的某邻域内有连续的三阶导数,且 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$, $f'''(x_0)<0$,则

(A)函数 $f(x)$在点 $x=x_0$ 处取得极小值.

(B)函数 $f(x)$在点 $x=x_0$ 处取得极大值.

(C)$(x_0,f(x_0))$是曲线 $y=f(x)$的拐点.

(D)$(x_0,f(x_0))$不是曲线 $y=f(x)$的拐点.

[ ]

(4)已知 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵, $\zeta_1=[1,2,-2]^T$, $\zeta_2=[2,1,-1]^T$, $\zeta_3=[1,1,t]^T$ 是线性非齐次方程的 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}$的解向量,则

(A)$t=-1$,必有 $r(\boldsymbol{A})=1$.　　(B)$t=-1$ 时,必有 $r(\boldsymbol{A})=2$.

(C)$t\neq-1$,必有 $r(\boldsymbol{A})=1$.　　(D)$t\neq-1$ 时,必有 $r(\boldsymbol{A})=2$.

[ ]

(5)已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵, $\boldsymbol{A}$ 可逆,且 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则下列结论错误的是

(A)$\boldsymbol{A}^T\sim\boldsymbol{B}^T$.　　(B)$\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1}$.

(C)$\boldsymbol{AB}\sim\boldsymbol{BA}$.　　(D)(A)(B)(C)中至少有一个结论不成立.

[ ]

(6)设随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(1,4)$和 $N(2,9)$,记 $p_1=P(X\leqslant-1)$和 $p_2=P(Y\geqslant5)$,则必有

(A)$p_1>p_2$.　　(B)$p_1<p_2$.

(C)$p_1-p_2=0$.　　(D)$p_1+p_2=1$.

[ ]

三、(本题满分 8 分)

设 $z=yf(2x,\frac{y}{x})$, f 具有二阶连续偏导数,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

四、(本题满分 12 分)

设 $f(x)$具有二阶连续导数,且 $f(0)=0,f'(0)=1$.又设曲线积分

$\int_c [xe^{2x}-6f(x)]\sin y\mathrm{d}x-[5f(x)-f'(x)]\cos y\mathrm{d}y$ 与路径无关,求 $f(x)$.

五、(本题满分 12 分)

设 $x_1=1,x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\qquad(n=2,3,\cdots\cdots)$,

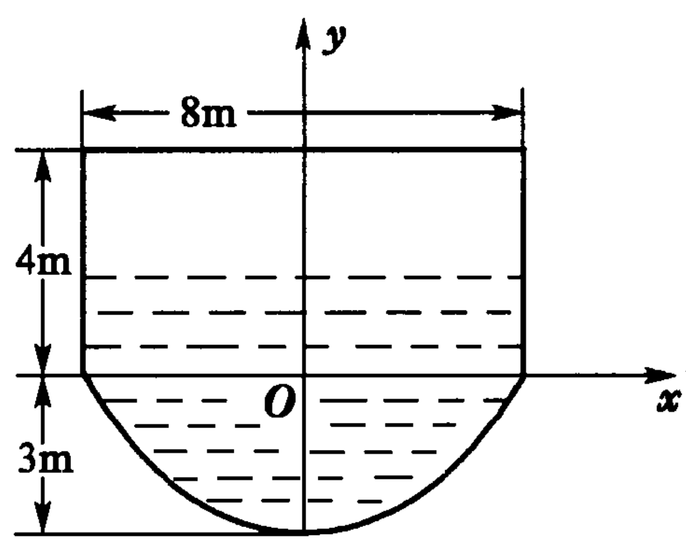
求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

六、(本题满分 12 分)

计算 $\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,其中$\sum$ 为任一不经过原点的封闭曲面的外侧.

七、(本题满分 12 分)

设一盛有某种液体的旋转形容器,过旋转轴的剖面尺寸及坐标系的选择如图所示.上部两边轮廓线为铅直线,下部轮廓线为抛物线,液体的比重为 μ,原蓄存液体深 5m,现将该液体抽至容器口水平面处排出.试问欲使容器内液面下降 4m 时,需作多少功?



八、(本题满分 10 分)

设 $f(x)$在$[a,b]$具有二阶导数,且 $f''(x)\neq0,f(a)=f(b)=0$,试证:

(1) $\forall x\in(a,b)$,有 $f(x)\neq0$;

(2) $\exists\zeta\in(a,b)$,使 $f'(\zeta)=f(\zeta)$.

九、(本题满分 9 分)

设 $A = \begin{bmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a \end{bmatrix}$

(1)计算 A^2,并将 A^2 用 A 和单位阵 E 表出.

(2)求 A^{-1}.

十、(本题满分 9 分)

该 A、B 都是三阶矩阵,满足 $AB = A + B$,且 A 有三个不同的特征值,证明

(1)A、B 可交换,即 $AB = BA$.

(2)存在可逆阵 P,使 $P^{-1}AP$,$P^{-1}BP$ 同时为对角阵.

十一、(本题满分 9 分)

设 A、B 是两个随机事件,又设随机变量

$X = \begin{cases} 1, 若\ A\ 出现, \\ 0, 若\ \bar{A}\ 出现; \end{cases}$　　$Y = \begin{cases} 1, 若\ B\ 出现, \\ 0, 若\ \bar{B}\ 出现. \end{cases}$

(1)若 A、B 的概率非 0 和 1,试求 X 和 Y 的相关系数.

(2)证明 X 和 Y 不相关的充要条件是 A 和 B 独立.

十二、(本题满分 9 分)

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本,已知 $E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$, $\sigma > 0$, 又设 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2$,试求 $E(\bar{X}), D(\bar{X})$ 和 $E(S^2)$.

密　封　装　订　线

密　封　装　订　线

数学一预测试卷(2)

一、填空题(本题满分 24 分,每小题 4 分.)

(1)设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内有定义,且 $|f(x)|\leqslant x^2$,则 $f'(0)=$______.

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=$______.

(3) 设 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$,则 $\int_L(x+y^3)\mathrm{d}s=$______.

(4)设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶不可逆阵,$\boldsymbol{A}$ 的元素 a_{11} 的代数余子式 $A_{11}\neq 0$,$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,则方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的通解是______.

(5)设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布,已知 $E[X(X-1)]=2$,则 $\lambda=$______.

(6)设非负随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=Ax^5\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, $x>0$,则 $A=$________.

二、选择题(本题满分 24 分,每小题 4 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1)曲线 $y=x+\frac{\ln x}{x}$

(A)有且仅有铅直渐近线.

(B)有且仅有斜渐近线.

(C)既有铅直渐近线,又有斜渐近线.

(D)既无铅直渐近线,又无斜渐近线.

[ ]

(2)设平面 π 平行于两直线 $\frac{x}{2}=\frac{y}{-2}=z$ 及 $2x=y=z$,且与曲面 $z=x^2+y^2+1$ 相切,则 π 的方程为

(A) $4x+2y-z=0$.　　(B) $4x-2y+z+3=0$.

(C) $16x+8y-16z+11=0$.　　(D) $16x-8y+8z-1=0$.

[ ]

(3)设 $f(x)$ 为以 2π 为周期的周期函数,它在区间 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ 0, & 0<x<\pi,\end{cases}$$

则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $x=-\pi$ 处收敛于

(A) 0.　　(B) π.

(C) $-\frac{\pi}{2}$.　　(D) $\frac{\pi}{2}$.

[ ]

(4)设 A、B 是 n 阶矩阵，A^*、B^* 分别是 A、B 对应的伴随矩阵，则分块矩阵 $C=\begin{bmatrix}0 & A\\ B & 0\end{bmatrix}$ 的伴随阵 $C^*=$

(A) $\begin{bmatrix}0 & |A|\ A^*\\ |B|B^* & 0\end{bmatrix}$.　　(B) $\begin{bmatrix}0 & (-1)^n|A|B^*\\ (-1)|B|A^* & 0\end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix}0 & |B|A^*\\ |A|B^* & 0\end{bmatrix}$.　　(D) $\begin{bmatrix}0 & (-1)^n|B|B^*\\ (-1)|A|A^* & 0\end{bmatrix}$.

[　　]

(5) A,B 是 n 阶矩阵，且 $A\sim B$，则 A,B 之间不相同的是

(A)特征值.　　(B)行列式值.

(C)秩.　　(D)特征向量.

[　　]

(6)设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自正态总体 X 的简单随机样本，X 服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，$\sigma>0$. 记 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，已知 $F=k\frac{\bar{X}^2}{S^2}$ 服从 $F(n_1,n_2)$ 分布，则必有

(A) $k=n,n_1=1$.　　(B) $k=n^2,n_1=1$.

(C) $k=n,n_1=n$.　　(D) $k=n^2,n_1=n$.

[　　]

三、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x,y)$ 可微，$f(0,0)=0$，$f_x'(0,0)=a$，$f_y'(0,0)=b$，$\varphi(x)=f[x,f(x,x)]$，求 $\varphi'(x)$，$\varphi'(0)$.

四、(本题满分 12 分)

设 $|x|\leqslant 1$，由 Lagrange 微分中值定理，$\exists\,\theta\in(0,1)$，使 $\arcsin x=\frac{x}{\sqrt{1-\theta^2x^2}}$，

试证 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

五、(本题满分 12 分)

设 $\forall x>0$,曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x,f(x))$ 处的切线在 y 轴上的截距为 $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,求 $f(x)$ 的一般表达式.

六、(本题满分 12 分)

证明方程 $\sin x + x\cos x = 0$ 在区间 $(0,\pi)$ 内有且仅有一个实根.

七、(本题满分 12 分)

设函数 $f(u)$ 具有连续的导数,求

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{\pi t^4}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

八、(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 在点 x_0 处具有 n 阶导数,且 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0, f^{(n)}(x_0)\neq 0$,试证:

(1)当 n 为奇数时,$f(x)$ 在点 x_0 不取局部极值.

(2)当 n 为偶数时,$f(x)$ 在点 x_0 取得局部极值.

1°当 $f^{(n)}(x_0)>0$,$f(x)$ 在点 x_0 取得极小值.

2°当 $f^{(n)}(x_0)<0$,$f(x)$ 在点 x_0 取得极大值.

九、(本题满分 9 分)

设二次曲面 $5x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3+2cx_2x_3=1(c<0)$是柱面.

(1)求参数 c.

(2)求一正交变换,将此曲面方程化为标准形,并写出此标准形.

十、(本题满分 9 分)

设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵,且 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})<n$,证明 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 有公共的特征值和特征向量.

十一、(本题满分 9 分)

袋中有编号 1,2,3,4,5 五个球,从中任取两个.已知第一次取到的球的编号大于 3,求第二次取到的球的编号为奇数的概率.

十二、(本题满分 9 分)

设随机变量 X_1 和 X_2 分别服从参数为 1 和 2 的指数分布,X_3 服从均匀分布 $U[0,2\sqrt{3}]$,又设它们间的相关系数为 $\rho_{X_1X_2}=\frac{1}{2}$,$\rho_{X_1X_3}=-\frac{1}{2}$和 $\rho_{X_2X_3}=\frac{1}{2}$,令 $Y=X_1+X_2$,$Z=X_3-X_2$.试求 ρ_{YZ}.

密 封 装 订 线

密 封 装 订 线

密 封 线 内 禁 止 答 题

数学一预测试卷(3)

一、填空题(本题满分 24 分,每小题 4 分.)

(1)设两直线 $l_1:\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{8}=\frac{z-1}{a}$, $l_2:\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$ 相交,则 $a=$______.

(2)设当 $x\to+\infty$,有 $f(x)\to+\infty$, $g(x)\to+\infty$,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l(0<l<+\infty)$,则

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln g(x)}=$______.

(3) 交换二次积分的积分次序:

$\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy+\int_1^4 dx\int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy=$______.

(4) 设

$$f(x)=\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & a_{13}+x & a_{14}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & a_{23}+x & a_{24}+x \\ a_{31}+x & a_{32}+x & a_{33}+x & a_{34}+x \\ a_{41}+x & a_{42}+x & a_{43}+x & a_{44}+x \end{vmatrix}$$

则 $f''(x)=$______.

(5)设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$,则 $E(X^2+e^X)=$______.

(6)甲、乙两厂各生产同类产品 n 件($n>2$).已知运输途中损坏两件,设每件产品被损坏的可能性相同,则被损坏的产品是同一厂生产的概率是______.

二、选择题(本题满分 24 分,每小题 4 分,每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1)设 $f(x)$ 可导,且 $f(x)=1+\frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt$,则 $f'(x)=$

(A) $\frac{1}{x}$. (B) $\frac{1}{x}f(x)$.

(C) $-\frac{1}{x^2}\int_1^x f(t)dt$. (D) $\frac{f(x)}{x}-\int_1^x\frac{f(t)}{t^2}dt$.

[ ]

(2)设 $y=f(x)$,且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0+2x)}{6x}=3$,则 $dy|_{x=x_0}=$

(A) $-3dx$. (B) $-9dx$.

(C) $2dx$. (D) $18dx$.

[ ]

(3)下列级数中,发散的是

(A) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{m-1}{m}\right)^{n}$ $(m>1)$.

(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{2}-1)^{n}n^{k}}$ (k 为正的常数).

(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{n}\right)^{n}$.

[　　]

(4)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是四个三维非零向量,则

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关 $\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关 $\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出 $\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出 $\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(5)设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}14&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$

(A)等价且相似.　　(B)等价但不相似.

(C)相似但不等价.　　(D)不相似且不等价.

[　　]

(6)已知事件 A 与 B 同时发生时,事件 C 必发生,则有

(A) $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$.　　(B) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$.

(C) $P(C)=P(AB)$.　　(D) $P(C)=P(A\cup B)$.

[　　]

三、(本题满分 8 分)

求函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

的一阶偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$,并问函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 是否可微?

四、(本题满分 12 分)

讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n^2+n\alpha+\beta}{n}\pi$$ (α,β 皆为常数)的敛散性.

五、计算(本题满分 12 分)

$$\iint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{e}^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $\sum$ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z=1$ 与 $z=2$ 所截得的部分的下侧.

六、(本题满分 12 分)

证明

$(a+b)^p \leqslant a^p + b^p\ (a \geqslant 0, b \geqslant 0, 0 < p < 1)$.

七、(本题满分 12 分)

设有方程 $(1+x)y = \int_0^x [2y + (1+x)^2 y''] \mathrm{d}x - \ln(1+x)$,

其中 $x \geqslant 0$,且有 $y'(0) = 0$,求方程所确定的函数 y.

八、(本题满分 10 分)

设平面力场的大小与作用点到原点的距离成正比(比例系数 $k>0$),方向为作用点向径方向按逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 角,试求质点沿曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 从点 $A(a,0)$ 逆时针方向移到点 $B(0,a)$ 时,场力所做的功.

九、(本题满分 9 分)

(1)证明矩阵方程 $A_{n\times s}X_{s\times t}=B_{n\times t}$ 有解的充分必要条件是 $r(A)=r(A\,\vdots\,B)$

(2)当 $A=\begin{bmatrix}1&3&9\\2&0&-6\\-3&1&7\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&a\\6&2\\-10&1\end{bmatrix}$ 时,问 a 为何值时,$AX=B$ 有解,有解时,求解 X.

十、(本题满分 9 分)

(1)已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关,向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出,且表出式为

$$[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t]=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1t}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2t}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\c_{s1}&c_{s2}&\cdots&c_{st}\end{bmatrix}$$

记 $B=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t]$ $\qquad C=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1t}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2t}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\c_{s1}&c_{s2}&\cdots&c_{st}\end{bmatrix}$

证明: $r(B)=r(C)$

(2)已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,且 $\beta_1=k\alpha_1+\alpha_2+k\alpha_3$，$\beta_2=-\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=k\alpha_1-\alpha_2+k\alpha_3$,试讨论向量组 β_1,β_2,β_3 的线性相关性.

十一、(本题满分 9 分)

设在乒乓球比赛中,甲乙双方战胜对方的概率均为 $\frac{1}{2}$,谁先赢得三场为胜,试问平均比赛多少场次能决出胜负?

十二、(本题满分 9 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自参数为 $\frac{1}{\theta}$ 的指数分布总体的简单随机样本,试求 θ 的矩估计和最大似然估计,并验证所得估计是否无偏?

密 封 装 订 线

密 封 装 订 线