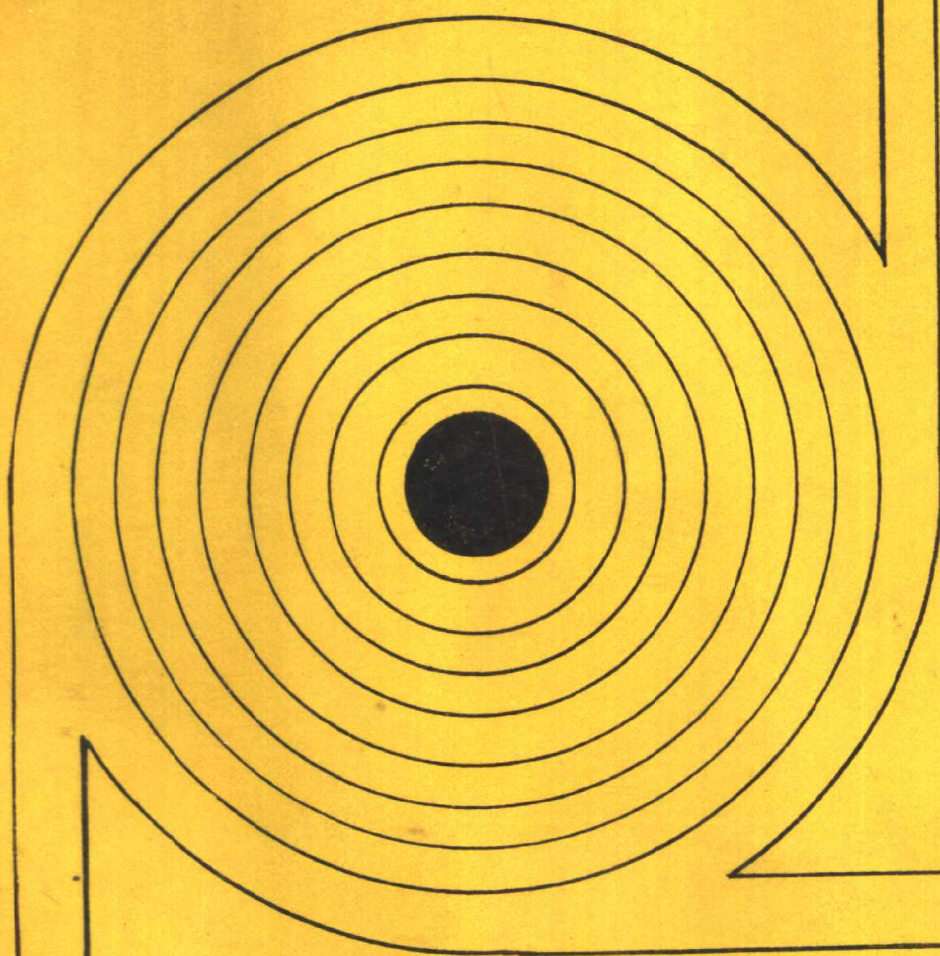


转子动力学

钟一谔 何衍宗 王正 李方泽



清华大学出版社

转 子 动 力 学

钟一谔 何衍宗 王 正 李方泽

清 华 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书系统地论述转子动力学的基本分析方法、转子的各种动力学特性及其影响因素、复杂转子系统的分析和计算方法、挠性转子的平衡方法以及旋转机械的测试技术。

本书可作为力学、动力、机械、电机、化工机械本科生和研究生教材、亦可供研究所及工厂技术人员参考。

TH 113

8513

84367

71

293

转 子 动 力 学

钟一谔等 编著

☆

清华大学出版社出版

北京 清华园

清华大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

☆

开本：787×1092 1/16 印张：19 字数：486 千字

1987 年 11 月第 1 版 1987 年 11 月第 1 次印刷

印数：0001~5600

统一书号：平装 15235·316 定价：平装 3.20 元

精装 15235·317 精装 5.20 元

绪 言

一般工厂中常见的机器都装有旋转部件即转子。转子连同它的轴承和支座等统称为转子系统。象汽轮机、发电机、电动机以及离心机、气体压缩机等都是典型的旋转机器，都以转子作为工作的主体。机器运转时，转子系统常常发生振动。振动的害处是产生噪声，减低机器的工作效率；严重的振动会使元件断裂，造成事故。如何减少转子系统的振动是设计制造旋转机器的重要课题。转子系统的振动是多样的，它包括转轴的扭转振动和弯曲振动，圆盘（叶轮）的振动或盘上叶片的振动等等。其中转轴的弯曲振动较为复杂，牵涉的因素较多。转子动力学就是以转轴的弯曲振动作为主要研究对象的。

早期的旋转机器转速较低，振动的起因主要是圆盘的偏心，即重心不在转动轴线上。因此用静平衡的办法使偏心距尽量小，就可以基本消除转子的振动。随后，机器的工作转速提高及圆盘厚度增加成为圆柱形或锥形，用静平衡方法已不能消除转子的振动，而要用动平衡的办法。平衡的理论根据是转轴的弯曲振动与圆盘质量及偏心距的大小有一定量关系。这种关系称为“不平衡质量的动力响应”。旋转机器还出现过这样的现象：虽然转子经过动平衡，但当升速到某个转速时，转轴仍然发生剧烈的振动。发生剧烈振动时的转速称为“临界转速”。对转子临界转速的研究和计算是转子动力学的重要内容之一。

常见的旋转机器（如电动机）的工作转速都小于转轴最低的临界转速。转速低于最低临界转速的转子通常称为刚性转子。对于这种转子，计算不平衡质量动力响应的理论和动平衡技术都比较简单。为了提高机器的工作容量和效率，转子越来越往高速和细长的方向发展。例如大型汽轮发电机组，它的转子的转速往往高于最低临界转速。这样的转子称为挠性转子。对于挠性转子的动平衡，无论在理论上还是在技术上都比刚性转子的动平衡更为深入和复杂。研究挠性转子系统的不平衡质量的动力响应和动平衡技术是近来转子动力学的一个重要内容。

转子不平衡质量所引起的振动属于强迫振动，它的角频率和转动角速度相等。对于高速转子，除了不平衡质量引起的振动以外，还有频率与转动角速度不相等的振动，称为“涡动”。转轴与圆盘配合面的摩擦、转轴的材料内阻、轴承油膜力或汽轮机叶轮的汽动力等等都是产生涡动的因素。在理论上，转轴的这种涡动属于“自激振动”，或称“失稳运动”。涡动可以使转轴发生疲劳破坏或在轴承内的润滑油不能形成油膜而烧坏等事故。研究高速转子的“稳定性”以防止其失稳运动在近代转子动力学中占有重要的位置。

大型汽轮发电机组或航空发动机在运转时，它们的基础也可能发生振动。基础的弹性变形和内阻对转轴的临界转速、稳定性等都有不能忽视的影响。把基础和转子系统作为一个整体来研究其振动特性越来越受重视。这也是当前转子动力学需要考虑的问题。因此有些学者把本门学科称为“转子-轴承-基础系统动力学”。

旋转机器的结构往往是很复杂的。例如汽轮发电机组包含发电机的转子和汽轮机的转子。发电机转子细而长，有许多嵌在线槽中的导线；而汽轮机转子则装有许多直径较大的叶轮。转子通过轴瓦支于轴承座；而轴承座本身的结构也是比较复杂的。要研究实际转子系统

的振动,需把实际结构简化为合理的模型才能进行理论分析,找出振动特性和主要结构参数之间的定量关系。简化模型决定了分析过程的难易程度和分析结果的可靠程度。无论是计算转子的临界转速、不平衡质量的动力响应,还是各种因素引起的涡动,都以一定的简化模型作为依据。

所谓简化模型就是以某些主要参数如尺寸、弹性刚度、阻尼系数、质量等表示的力学模型。在这些参数中,有些可以通过计算获得;有些则要通过实际测量获得。此外,实际的旋转机器如果发生显著的振动以致不能正常运转,也需要通过实际测量以获得描述振动特性的数据如振幅、频率、位相等,才能分析和判断所发生振动的性质及其原因;然后采取措施消减振动。如何选择及安排各种测振及分析仪器以获得可靠的模型参数或振动特性数据,是转子动力学不可缺少的环节。

本书将介绍和论述上述主要问题。第一章至第六章着重论述转子动力学的基本分析方法,转子的各种动力学特性及其影响因素。第七章至第九章论述复杂转子系统的分析和计算方法。第十章和第十一章则主要论述旋转机械的测振与实验技术及动平衡等消减转子振动的方法。各章的主要执笔人为:

第一、五、六章 钟一谔;

第二、四、七、八章 何衍宗;

第三、九、十章 王 正;

第十一章 李方泽。

本书是作者根据在清华大学从事转子动力学的科学研究和教学的经验,并参考国内外有关文献著作而编写的。它可作为“转子动力学”课程的教材,也可供机械、电机、动力或化工机械等方面的工程科技人员参考。

由于作者的水平和经验有限,书中难免有缺点和错误。敬希读者给予指正。

作者 1984 年 7 月

目 录

绪言	I
第一章 单圆盘转子的临界转速与不平衡响应	1
§1.1 转子的涡动	1
§1.2 圆盘的偏心质量引起的振动, 临界转速	3
§1.3 圆盘相对于转动坐标系的运动	6
§1.4 陀螺力矩	8
§1.5 圆盘绕其中心的转动方程	11
§1.6 考虑陀螺力矩时, 转子的临界角速度	13
§1.7 弹性支承对转子临界转速的影响	17
参考文献	20
第二章 刚性支承下多圆盘转子的临界转速和不平衡响应	21
§2.1 运动微分方程	21
§2.2 特征值的性质	24
§2.3 主振动中转子系统的进动频率及其运动形象	25
§2.4 同步正向涡动与同步反向涡动, 临界转速	28
§2.5 算例	29
§2.6 不平衡响应	34
§2.7 用模态叠加法求解转子的不平衡响应	36
参考文献	40
第三章 滑动轴承的动力特性	41
§3.1 滑动轴承工作的概述	41
§3.2 油膜力的线性化, 油膜动力特性系数	43
§3.3 油膜动力特性系数的计算	46
§3.4 油膜动力特性系数的实验测定	58
§3.5 几种特殊形式轴承的动力特性系数	61
§3.6 油膜力的非线性表达式, 径向分力与周向分力	63
参考文献	67
第四章 转子系统的临界转速与某些因素的关系	69
§4.1 转子质量的离散化	69
§4.2 支承的简化模型和支承总刚度系数	71
§4.3 转子-轴承系统的特征值问题	73
§4.4 频率方程中根的分离定理	80
§4.5 支承弹性对临界转速的影响	81
§4.6 转子系统与各单个转子临界转速间的区别与联系	84

§4.7 临界转速对系统各种参数的敏感度·····	88
§4.8 转子-轴承系统参数的调整·····	95
参考文献·····	97
第五章 转轴内阻引起的不稳定运动·····	98
§5.1 材料内阻引起转子不稳定运动的机理·····	98
§5.2 材料内阻的特性·····	99
§5.3 转子运动稳定性的判据,失稳角速度·····	102
§5.4 转子失稳后轴心的闭环运动·····	108
§5.5 转轴与圆盘配合面的干摩擦引起的不稳定问题·····	113
§5.6 多圆盘转子的失稳角速度·····	116
参考文献·····	119
第六章 轴承油膜力或其它因素引起的转子失稳运动·····	120
§6.1 滑动轴承的油膜力引起的涡动频率与失稳转速·····	120
§6.2 轴承油膜力引起的转子涡动的性质·····	125
§6.3 引起转子不稳定运动的其它因素·····	133
§6.4 转轴主轴方向的刚度不相等对转子运动的影响·····	135
参考文献·····	142
第七章 计算临界转速和不平衡响应的传递矩阵法·····	143
§7.1 典型部件的传递矩阵·····	143
§7.2 具有各向同性支承的转子系统的临界转速及模态振型·····	145
§7.3 刚性支承情况下的临界转速和振型·····	148
§7.4 临界转速的 Riccati 传递矩阵解法·····	150
§7.5 支承为各向异性时转子的临界转速·····	158
§7.6 不平衡响应·····	165
§7.7 不平衡响应的 Riccati 传递矩阵解法·····	172
参考文献·····	175
第八章 计算临界转速和不平衡响应的有限元法·····	176
§8.1 单元的划分与结点位移向量·····	176
§8.2 单元的运动方程·····	177
§8.3 系统的运动方程·····	183
§8.4 转子系统的涡动频率与临界转速·····	186
§8.5 转子系统的不平衡响应·····	190
§8.6 系统自由度的减缩·····	192
参考文献·····	194
第九章 转子-轴承-基础系统的振动分析·····	196
§9.1 转子-轴承-基础系统的力学模型·····	196
§9.2 用模态组合法分析转子-轴承-基础系统·····	198
§9.3 用阻抗匹配法分析转子-轴承-基础系统·····	201
§9.4 转子-轴承-基础系统固有频率分布的特点·····	204

参考文献	206
第十章 转子的平衡	207
§10.1 静不平衡与动不平衡, 刚性转子与挠性转子	207
§10.2 刚性转子的平衡	210
§10.3 挠性转子的平衡	215
§10.4 挠性转子的振型平衡法	216
§10.5 挠性转子平衡的影响系数法	224
§10.6 振型平衡法与影响系数法的比较及其相互关系	225
§10.7 挠性转子轴系的现场平衡	226
§10.8 采用最小二乘法的影响系数法	227
§10.9 利用模态响应圆的平衡法 (振型圆平衡法)	228
§10.10 有关平衡的标准	231
参考文献	232
第十一章 旋转机械的振动测试	233
§11.1 概述	233
§11.2 传感器的选用	237
§11.3 惯性式速度传感器	239
§11.4 压电式加速度传感器	245
§11.5 不接触式电涡流位移传感器	248
§11.6 基频 ($1 \times \text{RPM}$) 幅值与相位的检测	253
§11.7 基频检测仪	261
§11.8 单圆盘轴不平衡响应的极坐标图	263
§11.9 多圆盘轴不平衡响应的极坐标图	266
§11.10 轴心运动轨迹的测试	272
§11.11 轴的绝对振动的测定	276
§11.12 轴振动测试中的初始偏摆问题	278
§11.13 频谱分析和级联图	281
参考文献	287
名词索引	288

第一章 单圆盘转子的临界转速和不平衡响应

早期的旋转机器结构比较简单。可以把转子看作由圆盘装在无重的弹性转轴上，而转轴的两端则由完全刚性即不变形的轴承及轴承座支持。这种模型称为刚性支承的转子。根据这种模型进行分析计算所得的概念和结论在转子动力学中是基本的。它们应用于简单的旋转机器足够准确。就是对于较为复杂的旋转机器，这些概念和结论虽然不够精确，但仍能定性地说明问题。

§ 1.1 转子的涡动

通常转轴的两支点在同一水平线上，如图 1.1 所示。转轴未变形时，中心线是水平的。设圆盘位于两支点的中央。由于圆盘的重量，即使在没有转动时，转轴也有弯曲变形即静变形。变形曲线为 ACB 。转动时，转轴可能有进一步的弯曲变形。此时圆盘中心 o' 的位置以向径 r 表示。在圆盘位于两支点中央的条件下，转轴变形时，圆盘平面的方向保持不变。由于静变形较小，对转子运动的影响不显著而可以忽略，则 r 可认为从不动的轴线 AB 的中点算起的位移。为了避开静变形，可以考虑转轴的两支点在同一垂直线上，而圆盘位于水平面如图 1.2。

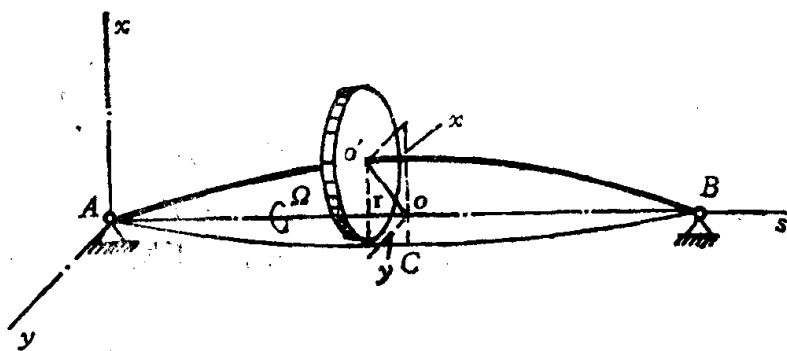


图 1.1

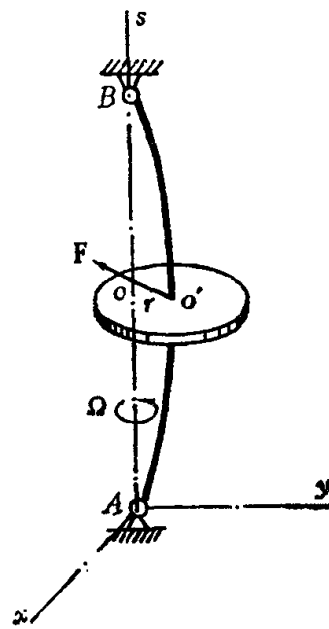


图 1.2

为了确定圆盘运动时，其中心 o' 的位置，以固定坐标系 $Axys$ 作为参考。 o' 的坐标以 x 、 y 表示。参看图 1.2，设转轴的中心线通过圆盘的中心。它以角速度 Ω 作等速转动。当正常运转时，转轴是直的。如果在它的一侧加一横向冲击，则因转轴有弹性而发生弯曲振动，或圆盘作横向振动。现研究这种运动的性质。

圆盘的质量以 m 表示。它所受的力是转轴的弹性恢复力 F ，

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r} \quad (1.1)$$

其中 k 为转轴的刚度系数, $\mathbf{r} = \overline{oo'}$ 。相对于固定坐标系 Axy , 圆盘的运动微分方程为

$$m\ddot{x} = F_x = -F\frac{x}{r} = -kx$$

$$m\ddot{y} = F_y = -F\frac{y}{r} = -ky$$

$$\text{令} \quad \omega_n^2 = k/m \quad (1.2)$$

$$\text{则有} \quad \left. \begin{aligned} \ddot{x} + \omega_n^2 x &= 0 \\ \ddot{y} + \omega_n^2 y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

它的解可写作

$$\left. \begin{aligned} x &= X \cos(\omega_n t + \alpha_x) \\ y &= Y \sin(\omega_n t + \alpha_y) \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

其中振幅 X 、 Y 和初位相 α_x 、 α_y 都由起始的横向冲击决定。

由 (1.4) 式可知, 圆盘或转轴的中心 o' 在互相垂直的两个方向作频率同为 ω_n 的简谐运动。在一般情况下, 振幅 X 和 Y 不相等, (1.4) 式确定了 o' 点的轨迹为一椭圆。 o' 的这种运动是一种“涡动”或称“进动”。自然频率 ω_n 称为进动角速度。

因 (1.3) 的两个式子中, ω_n 是相同的, 所以用复数的形式代替 (1.3) 式, 然后求解并用所得结果来描述圆盘中心的涡动比较简单。令复变量为 z (图 1.3)。

$$z = x + iy \quad (i = \sqrt{-1})$$

则 (1.3) 式变为

$$\ddot{z} + \omega_n^2 z = 0 \quad (1.5)$$

其解为

$$z = B_1 e^{i\omega_n t} + B_2 e^{-i\omega_n t} \quad (1.6)$$

B_1 、 B_2 都是复数, 由起始的横向冲击决定。第一项是半径为 $|B_1|$ 的反时针方向的运动, 与转动角速度 Ω 同向, 称为正进动。第二项是半径为 $|B_2|$ 的顺时针即与 Ω 反方向的运动, 称为反进动。圆盘中心 o' 的涡动就是这两种进动的合成。由于起始条件不同, 圆盘中

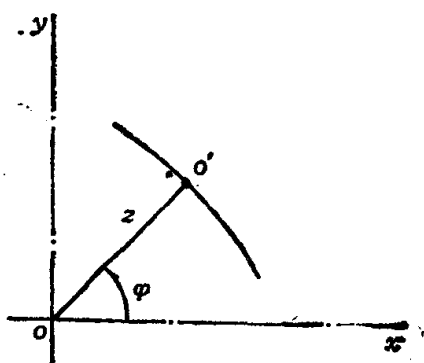


图 1.3

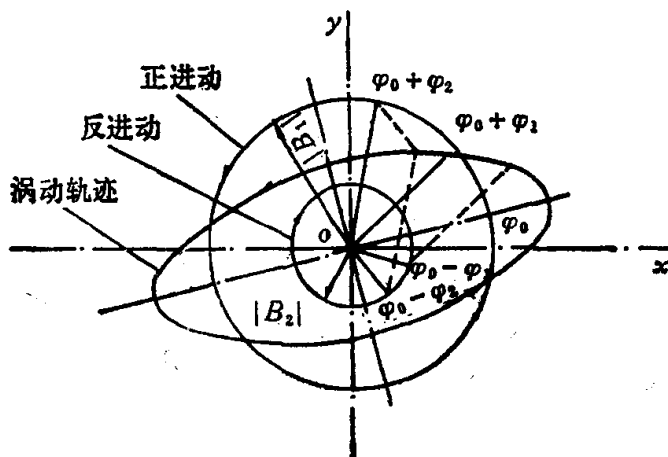


图 1.4

心的运动可能出现以下几种不同的情况:

(1) $B_1 \neq 0, B_2 = 0$; 涡动为正进动, 轨迹为圆, 其半径为 $|B_1|$ 。

(2) $B_1 = 0, B_2 \neq 0$; 涡动为反进动, 轨迹为圆, 其半径为 $|B_2|$ 。

(3) $B_1 = B_2$; 轨迹为直线, 点 o' 作直线简谐运动。

(4) $B_1 \neq B_2$; 轨迹为椭圆, $|B_1| > |B_2|$ 时, o' 作正向涡动。 $|B_1| < |B_2|$ 时, o' 作反向涡动。正进动和反进动合成后的运动也可以称为进动 (图 1.4)。

由上面的讨论可知, 圆盘或转轴中心的进动或涡动属于自然振动。它的频率就是圆盘没有转动时, 转轴弯曲振动的自然频率。

在上面讨论的问题中, 没有考虑象空气阻力那样的外阻力。如果考虑这种力, 则(1.5)式变为

$$\ddot{z} + 2n\dot{z} + \omega_n^2 z = 0 \quad (1.7)$$

其中 n 为阻尼系数。方程的解为

$$z = e^{-nt}(B_1 e^{i\omega'_n t} + B_2 e^{-i\omega'_n t}) \quad (1.8)$$

其中

$$\omega'_n = \sqrt{\omega_n^2 - n^2} \quad (1.9)$$

在这种情况下, 涡动是衰减的。轴心轨迹是围绕固定中心 o 并最后趋向 o 的曲线 (图 1.5)。

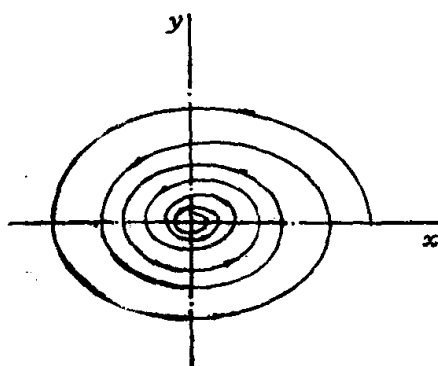


图 1.5

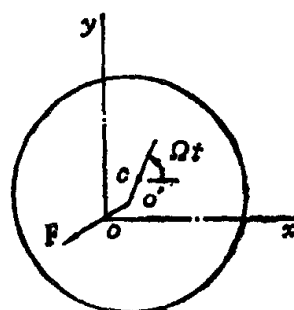


图 1.6

§ 1.2 圆盘的偏心质量引起的振动, 临界转速

如果圆盘的重心 c 与转轴中心 o' 不重合, 如图 1.6 所示; 当圆盘以角速度 Ω 转动时, 重心 c 的加速度在坐标轴上的投影为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_c &= \ddot{x} - e\Omega^2 \cos \Omega t \\ \ddot{y}_c &= \ddot{y} - e\Omega^2 \sin \Omega t \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

其中 $e = o'o'$ 为圆盘的偏心距。在转轴的弹性力 F 的作用下, 由质心运动定理, 有

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_c &= -kx \\ m\ddot{y}_c &= -ky \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

代入 (1.10) 式, 可得轴心 o' 的运动微分方程

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \omega_n^2 x &= e\Omega^2 \cos \Omega t \\ \ddot{y} + \omega_n^2 y &= e\Omega^2 \sin \Omega t \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

这是强迫振动的微分方程。式右边相当于偏心质量即不平衡质量所产生的激振力。

将 (1.12) 式改写为复变量的形式,

$$\ddot{z} + \omega_n^2 z = e\Omega^2 e^{i\Omega t} \quad (1.13)$$

其特解为

$$z = Ae^{i\Omega t}$$

代入 (1.13) 式后, 可求得振幅

$$|A| = \left| \frac{e\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \right| = \left| \frac{e(\Omega/\omega_n)^2}{1 - (\Omega/\omega_n)^2} \right| \quad (1.14)$$

圆盘或转轴中心 o' 对于不平衡质量的响应为

$$z = \frac{e(\Omega/\omega_n)^2}{1 - (\Omega/\omega_n)^2} e^{i\Omega t} \quad (1.15)$$

比较 (1.13) 式和 (1.15) 式可知, 轴心 o' 的响应频率和偏心质量产生的激振力频率相同, 而位相也相同 ($\Omega < \omega_n$ 时) 或相差 180° ($\Omega > \omega_n$ 时)。这表明, 圆盘转动时, 图 1.6 的 o 、 o' 和 c 三点始终在同一直线上。这直线绕 o 点以角速度 Ω 转动。 o' 点和 c 点作同步进动。两者的轨迹是半径不相等的同心圆。这是正常运转的情况。如果在某瞬时, 转轴受一横向冲击, 则圆盘中心 o' 同时有自然振动和强迫振动。其合成的运动是比较复杂的。 o 、 o' 和 c 三点不在同一直线上, 而且涡动频率与转动角速度不相等。实际上由于有外阻力作用, 涡动是衰减的。经过一段时间, 转子将恢复其正常的同步进动。

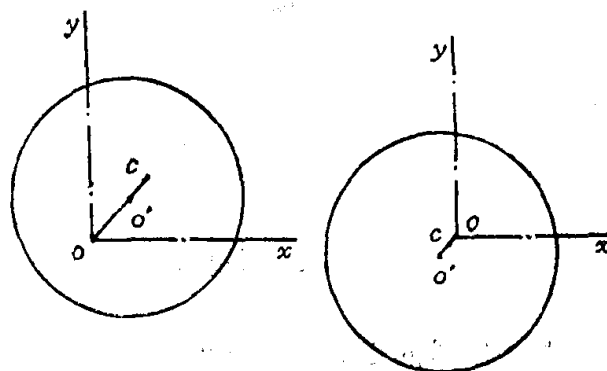
在正常运转的情况下, 由 (1.14) 式可知, 当

(1) $\Omega < \omega_n$ 时, $A > 0$ 。 o' 点和 c 点在 o 点的同一侧, 如图 1.7(a) 所示;

(2) $\Omega > \omega_n$ 时, $A < 0$ 但 $|A| > e$, c 在 o 和 o' 之间, 如图 1.7(b);

(3) $\Omega \gg \omega_n$ 时, $A \approx -e$, 或 $\overline{oo'} \approx -\overline{o'c}$ 。圆盘的重心 c 近似地落在固定点 o ; 振动很小, 转动反而比较平稳。这种情况称为“自动对心”。

由 (1.14) 式, 当 $\Omega = \omega_n$ 时, $A \rightarrow \infty$, 是共振情况。实际上由于存在阻尼, 振幅 $|A|$ 不是无穷大而是较大的有限值。但转轴的振动仍然非常剧烈, 以致有可能断裂。 ω_n 称为转轴的“临界角速度”; 与其对应的每分钟转数则称为“临界转速”, 以 n_c 表示:



(a) $\Omega < \omega_n$ (b) $\Omega > \omega_n$

图 1.7

$$n_c = \frac{60\omega_n}{2\pi} = 9.55\omega_n \quad (1.16)$$

因

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_s}}$$

故

$$n_c = 9.55\sqrt{\frac{g}{\delta_s}} \quad (1.17)$$

其中 δ_s 为圆盘重量引起的转轴中心 o' 的静挠度。

如果机器的工作转速小于临界转速, 则转轴称为刚性轴。如果工作转速高于临界转速,

则转轴称为柔性轴。上面已经分析过，具有柔性轴的旋转机器运转时较为平稳。但在起动过程，要经过临界转速。如果缓慢起动，则经过临界转速时，也会发生剧烈的振动。

如果研究不平衡响应时考虑外阻力的作用，则 (1.13) 式变为

$$\ddot{z} + 2n\dot{z} + \omega_n^2 z = e\Omega^2 e^{i\Omega t} \quad (1.18)$$

设其特解为

$$z = |A| e^{i(\Omega t - \theta)}$$

代入后可得

$$(\omega_n^2 - \Omega^2 + 2n\Omega i)|A| = e\Omega^2 e^{i\theta}$$

因

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

故有

$$\left. \begin{aligned} (\omega_n^2 - \Omega^2)|A| &= e\Omega^2 \cos \theta \\ 2n\Omega|A| &= e\Omega^2 \sin \theta \end{aligned} \right\}$$

由此解出 $|A|$ 及 θ ：

$$|A| = \frac{e(\Omega/\omega_n)^2}{\sqrt{[1 - (\Omega/\omega_n)^2]^2 + (2n/\omega_n)^2(\Omega/\omega_n)^2}} \quad (1.19a)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{(2n/\omega_n)(\Omega/\omega_n)}{1 - (\Omega/\omega_n)^2} \quad (1.19b)$$

振幅 $|A|$ 与位相差 θ 随转动角速度对固有频率的比值 Ω/ω_n 改变的曲线，即幅频响应曲线与相频响应曲线分别示于图 1.8 和图 1.9。

由图 1.8 可知，由于外阻尼，转子中心 o' 对不平衡质量的响应在 $\Omega = \omega_n$ 时不是无

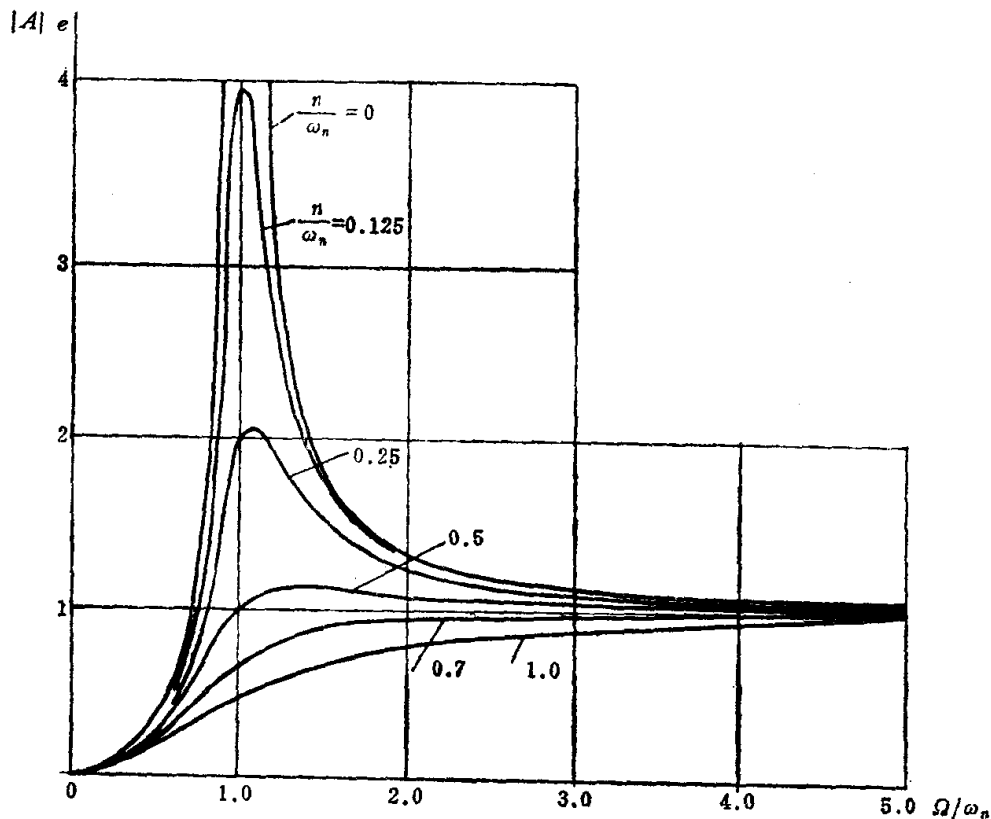


图 1.8

穷大而是有限值，而且不是最大值。最大值发生在 $\Omega \gtrsim \omega_n$ 的时候。对于实际的转子系统，有时在升速或降速过程中，用测量响应的办法来确定转子的临界转速。因为在转子升速或降

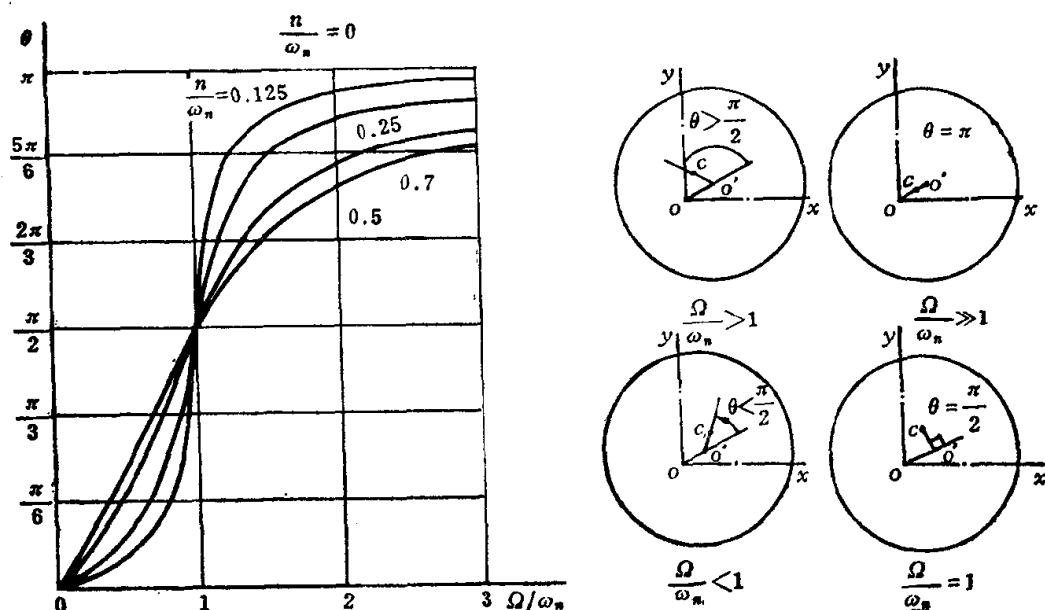


图 1.9

速过程中测响应的最大值比较容易；所以常常把出现这最大值即峰值时的转速作为临界转速。测量所得的临界转速在升速时略大于前面所定义的临界转速 ω_n ，而在降速时则略小于 ω_n 。

由 (1.19b) 式或图 1.9 可知，由于阻尼的存在，位相差 $\theta \neq 0$ 或 π ，说明圆盘中心 o' 、重心 c 和固定点 o 不在同一直线上。但当 $\Omega \gg \omega_n$ 时， $\theta \approx \pi$ ，仍可认为三点在同一直线上，而且仍然有“自动对心”。

§ 1.3 圆盘相对于转动坐标系的运动

为了进一步深入了解转子的运动性质，现研究它相对于转动坐标系的运动即相对运动。转子相对于固定坐标系的运动为绝对运动。

参看图 1.10，固定坐标系为 oxy ；动坐标系 $o\xi\eta$ 以转子的角速度 Ω 绕 o 轴转动。圆盘中心 o' 的坐标为：绝对坐标 $z = x + iy$ ，相对坐标 $\xi = \xi + i\eta$ 。由图可知

$$z = re^{i(\theta + \Omega t)} \quad (1.20)$$

$$\xi = re^{i\theta} \quad (1.21)$$

比较两式，可得

$$z = \xi e^{i\Omega t} \quad (1.22)$$

这是以复数表示的绝对坐标和相对坐标的关系。

1. 相对运动的自然振动

将 (1.22) 式对时间求导数，

$$\left. \begin{aligned} \dot{z} &= (\dot{\xi} + i\Omega\xi)e^{i\Omega t} \\ \ddot{z} &= (\ddot{\xi} + 2i\Omega\dot{\xi} - \Omega^2\xi)e^{i\Omega t} \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

代入 (1.5) 式得

$$\ddot{\xi} + 2i\Omega\dot{\xi} + (\omega_n^2 - \Omega^2)\xi = 0 \quad (1.24)$$

它的解为

$$\xi = B_1 e^{i(\omega_n - \Omega)t} + B_2 e^{-i(\omega_n + \Omega)t} \quad (1.25)$$

这表明，在一般情况下，圆盘中心的相对运动仍然是由正进动和反进动组成；对正进动的角速度为 $\omega_n - \Omega$ ，反进动的角速度则为 $-(\omega_n + \Omega)$ 。两者不相等。合成的涡动轨迹不是椭圆而呈“花瓣”形，见图 1.11。

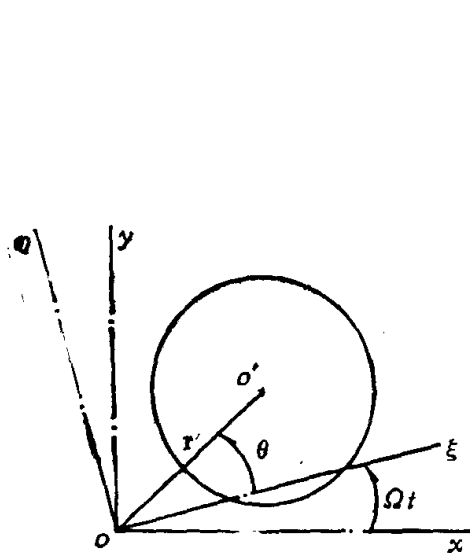
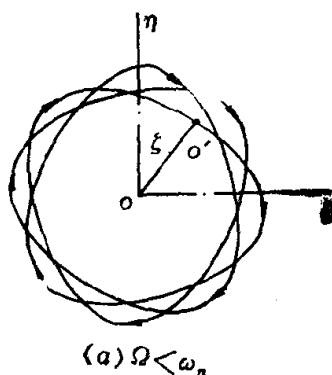
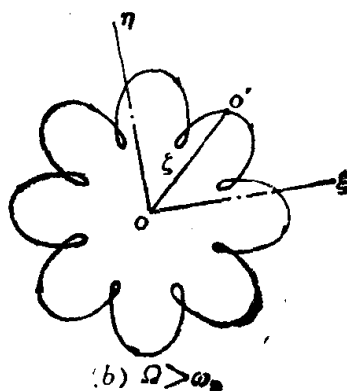


图 1.10



(a) $\Omega < \omega_n$



(b) $\Omega > \omega_n$

图 1.11

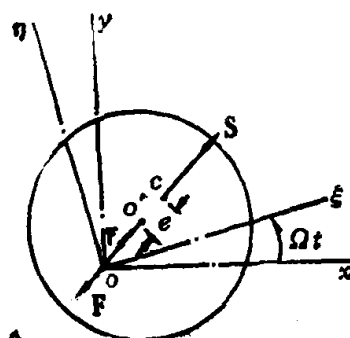


图 1.12

2. 对不平衡质量的响应

将 (1.23) 式代入 (1.13) 式得

$$\ddot{\xi} + 2i\Omega\dot{\xi} + (\omega_n^2 - \Omega^2)\xi = e\Omega^2$$

其特解为

$$\xi = \frac{e(\Omega/\omega_n)^2}{1 - (\Omega/\omega_n)^2} \quad (1.26)$$

ξ 与时间 t 无关，即 $\dot{\xi} = 0$ ， $\ddot{\xi} = 0$ ，表明圆盘中心相对于动坐标系是不动的。(1.26) 式确定了它的相对平衡位置。换句话说，(1.14) 式的响应振幅 $|A|$ 可以通过确定相对平衡位置的办法求得。

参看图 1.12，圆盘相对于转动坐标系运动的惯性力 S 和转轴加于它的弹性力 F 互相平衡。这两个力必须在同一直线上大小相等方向相反。因此， o' 、 c 和 o 三点应在同一直线上，并满足

$$S = F$$

即

$$m(r+e)\Omega^2 = kr$$

$$r+e = \left(\frac{\omega_n}{\Omega}\right)^2 r$$

由此得

$$r = \frac{e(\Omega/\omega_n)^2}{1 - (\Omega/\omega_n)^2}$$

这与 (1.26) 式完全相同。

§ 1.4 陀螺力矩

当圆盘不装在两支承的中点而偏于一边时, 转轴变形后, 圆盘的轴线与两支点 A 和 B 的连线有一夹角 ψ 。设圆盘的自转角速度为 Ω , 极转动惯量为 J_p , 则圆盘对质心 o' 的动量矩为

$$\mathbf{H} = J_p \boldsymbol{\Omega}$$

它与轴线 AB 的夹角也应该是 ψ , 见图 1.13。当转轴有自然振动时, 设其频率为 ω_n , 则圆盘中心 o' 与轴线 AB 所构成的平面绕 AB 轴有进动角速度 ω_n 。由于进动, 圆盘的动量矩 $\mathbf{H}$ 将不断改变方向。因此有惯性力矩

$$\mathbf{M}_g = -(\boldsymbol{\omega}_n \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega}_n = J_p \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}_n$$

方向与平面 $o'AB$ 垂直, 大小为

$$M_g = J_p \Omega \omega_n \sin \psi \quad (1.27)$$

这一惯性力矩称为陀螺力矩或回转力矩。它是圆盘加于转轴的力矩。因夹角 ψ 较小, $\sin \psi \approx \psi$, 上式可写作

$$M_g = J_p \Omega \omega_n \psi \quad (1.28)$$

这一力矩与 ψ 成正比, 相当于弹性力矩。在正进动 ($0 < \psi < \pi/2$) 的情况下, 它使转轴的变形减小, 因而提高了转轴的弹性刚度, 即提高了转子的临界角速度。在反进动 ($\pi/2 < \psi < \pi$) 的情况下, 这力矩使转轴的变形增大, 从而降低了转轴的弹性刚度, 即降低了转子的临界角速度。

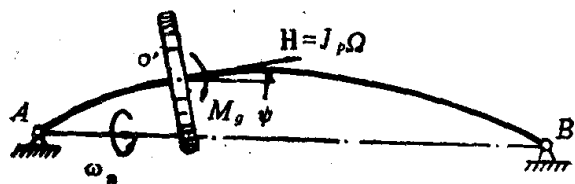


图 1.13

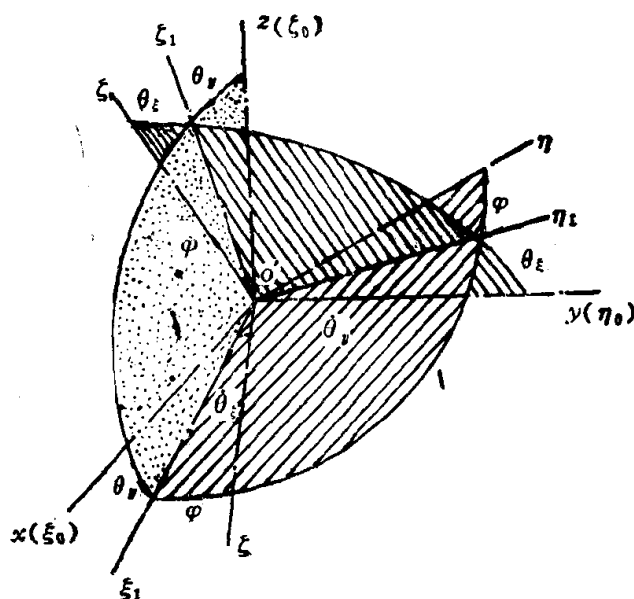


图 1.14

下面进一步讨论, 当考虑陀螺力矩时, 如何计算转子的临界角速度。为此先要研究圆盘

的角速度以及怎样列出圆盘的运动微分方程。

1. 圆盘的角速度

当考虑转轴横截面的转角变化时, 圆盘绕中心 o' 的转动用三个欧拉角表示。参考图 1.14, 以 o' 为坐标原点建立一移动坐标系 $o'xyz$ 。另外建立固结于圆盘即与圆盘一起运动的坐标系 $o'\xi\eta\zeta$ 。其中 $o'\zeta$ 为圆盘的中心轴。圆盘绕 o' 点转动的位置由 $o'\xi\eta\zeta$ 相对于 $o'xyz$ 的位置表示。设开始时, 圆盘位于 $o'\xi_0\eta_0\zeta_0$ 的位置, 与 $o'xyz$ 重合。转动时, 可以认为圆盘先绕 $o'y$ 轴转一 θ_y 角而到达 $o'\xi_1\eta_0\zeta_1$ 的位置; 然后绕 $o'\xi_1$ 轴转一 θ_ξ 角而到达 $o'\xi_1\eta_1\zeta$; 最后绕 $o'\zeta$ 轴转一 φ 角而到达 $o'\xi\eta\zeta$ 的位置。

圆盘的上述三种转动角速度分别以 $\dot{\theta}_\xi$ 、 $\dot{\theta}_y$ 和 $\dot{\varphi}$ 表示。绝对角速度为

$$\omega = \dot{\theta}_\xi + \dot{\theta}_y + \dot{\varphi} \quad (1.29)$$

如果把圆盘的转动分解为随坐标系 $o'\xi_1\eta_1\zeta$ 的转动和相对于此坐标系的转动, 则坐标系 $o'\xi_1\eta_1\zeta$ 的转动角速度为

$$\omega_1 = \dot{\theta}_\xi + \dot{\theta}_y,$$

而圆盘相对于此动坐标系的转动就是绕其中心轴的转动, 角速度为 $\varphi = \Omega$, 称为自转角速度。

角速度 ω 在 $o'\xi_1\eta_1\zeta$ 各轴的投影为

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\xi_1} &= \dot{\theta}_\xi \\ \omega_{\eta_1} &= \dot{\theta}_y \cos \theta_\xi \\ \omega_\zeta &= \dot{\varphi} - \dot{\theta}_y \sin \theta_\xi = \Omega - \dot{\theta}_y \sin \theta_\xi \end{aligned} \right\} \quad (1.30)$$

为了便于计算角速度在 $o'\xi\eta\zeta$ 各轴的投影, 利用坐标系 $o'\xi\eta\zeta$ 和 $o'\xi_1\eta_1\zeta$ 各轴之间的方向余弦矩阵

$$[A_\varphi] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

角速度 ω 在 $o'\xi\eta\zeta$ 各轴的投影为

$$\begin{bmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{bmatrix} = [A_\varphi] \begin{bmatrix} \omega_{\xi_1} \\ \omega_{\eta_1} \\ \omega_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{\xi_1} \cos \varphi + \omega_{\eta_1} \sin \varphi \\ -\omega_{\xi_1} \sin \varphi + \omega_{\eta_1} \cos \varphi \\ \omega_\zeta \end{bmatrix}$$

或

$$\begin{bmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_\xi \cos \varphi + \dot{\theta}_y \cos \theta_\xi \sin \varphi \\ -\dot{\theta}_\xi \sin \varphi + \dot{\theta}_y \cos \theta_\xi \cos \varphi \\ \Omega - \dot{\theta}_y \sin \theta_\xi \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

参看图 1.15 及 (1.30) 式, 将角速度 ω 分解为沿圆盘的自转轴 $o'\zeta$ 和赤道平面 $o'\xi_1\eta_1$ 的两个分量 ω_ζ 和 ω_e , 则有

$$\begin{aligned} \omega_e &= \omega_{\xi_1} \mathbf{i}_1 + \omega_{\eta_1} \mathbf{j}_1 \\ \omega_e^2 &= \omega_{\xi_1}^2 + \omega_{\eta_1}^2 = \dot{\theta}_\xi^2 + \dot{\theta}_y^2 \cos^2 \theta_\xi \end{aligned} \quad (1.33)$$